

从非线性与统计物理多重角度探讨数值地震预测

张寿安[†]

(南洋理工大学物理与应用物理系 新加坡 637371)

2013-02-21 收到

[†] Email: cheongsa@ntu.edu.sg

DOI: 10.7693/w120130404

Quantitative earthquake prediction from the perspectives of nonlinear and statistical physics

Cheong Siew Ann (ZHANG Shou-An)

(Division of Physics and Applied Physics, Nanyang Technological University, Singapore 637371)

摘要 在科技文献中,地震常被比喻为非线性动力学过程或统计物理中的相变过程。文章探讨了如何从非线性力学中的分岔理论以及统计物理内的朗道相变理论出发,从势垒穿越,临界涨落与临界慢化等多个角度来分析和了解地震发生的全过程。文章作者试图在这些非线性力学与统计物理的基础上,综合地震过程中在时间与空间上应出现的前兆,解释如何可能做出具有普适性的数值地震预测。

关键词 分岔, 相变, 临界涨落, 临界慢化

Abstract In the scientific literature we frequently find earthquakes referred to as a bifurcation in nonlinear dynamics or a phase transition in statistical physics. In this article we examine how we can understand earthquake processes in terms of barrier crossing, critical fluctuations, and critical slowing down, starting from our understanding of bifurcation theory in nonlinear dynamics and Landau's theory of phase transitions in statistical physics. We will then explain how quantitative earthquake prediction is possible, combining universal spatial and temporal signatures that must occur prior to a large earthquake.

Keywords bifurcation, phase transitions, critical fluctuations, critical slowing down

1 引言

从物理角度看,地震是一种令人费解的现象。一般地说,一种自然现象,当其时间尺度小时,其空间尺度也相应地小;时间尺度大时,空间尺度也相应地大。如果我们以地震破裂的规模作为它的空间尺度,并以地震时地表强烈震荡的持续时间作为它的时间尺度,就会发现地震的时间尺度和空间尺度极不相称。另外,地震是由地壳板块之间的碰撞造成的。地壳板块每年移动2—7cm^[1],板块运动速度的尺度又跟地震时地表震荡的速度尺度相差甚远。再者,地震的频率和震级服从著名的古腾堡—里氏定律^[2]。震级是地震释放能量的对数,所以古腾堡—里氏定律告诉我们,地震频率在能量尺度上呈现幂律分布。上述种种迹象,使我们相信地震是一种复杂系统现象。

基于地震的突发性,许多地球物理学家把它们比喻为非线性动力学中的分岔过程或统计物理中的相变过程^[3-5]。当然,如果能从地震模式直接映射成非线性力学模式或统计物理模式,这就很容易叫人信服。可惜的是,到目前为止,还没有人建立地球物理界都能接受的微观地震模式。

所以,一种流行的观念就是没有让人信服的地震模式,也就不可能有让人信服的跟地震有关联的非线性力学或统计物理模式。其实这种观念是错误的。在非线性力学与统计物理学中,我们常提到标准方程(normal form equations)^[6]和金兹堡—朗道理论^[7]。在讨论这些方程与理论时,数学家和物理学家提醒我们,许多不同的微观模式可以有相同的宏观形态,而且这些宏观形态往往和微观模式中的细节没有直接关联。

2 标准方程

在非线性动力学系统中,有一套能将耦合的微分方程组(coupled system of differential equations)转换成标准方程(normal form equations)的程序。将许多不同的微分方程组转换成标准方程之后,我们就可以对非线性动力学过程中的分岔进行分析。不同的标准方程通常都会有不同的分岔结构。我们可以利用这一点对微分方程组进行分类。假设我们有两组截然不同的微分方程组,一组方程描述传染病散播过程,另一组方程描述化学反应过程,两组微分方程的微观参数含义自然不同。但是两组微分方程的标准形式可能完全一样,

分岔结构也自然相同。这就是所谓的分岔结构的普适性。

3 朗道与金兹堡—朗道理论

在统计物理中，只含时间演化的标准方程称为朗道理论(Landau theories)，而附带空间性质的标准方程被称为金兹堡—朗道理论(Ginzburg—Landau theories)。这些理论通常是由微观模式粗粒化(coarse graining)产生的。就像非线性动力系统标准方程一样，许多不同的微观模式都可以简化成普适性的朗道理论或金兹堡—朗道理论。

综合非线性动力学和统计物理对地震预测的认识和理解，我们知道标准方程和金兹堡—朗道理论是普适的。基于这种普适性，我们即使全然不知微观地震模式的细节，也一样可以求得介观或宏观的地震模式。如果地震确实是分岔或相变现象，那我们预测地震可能不需要直接地测定跟地震有关的所有微观参数。

4 临界涨落与临界慢化

我们接下来谈谈怎么样借助分岔理论和相变理论来预测地震。首先，我们知道地震的根源是地壳板块漂移时碰撞累积能量的释放。就朗道相变理论而言，碰撞累积能量的释放过程相当于一种慢速的驱动，而这种慢速驱动又相当于缓慢调整控制与地震有关的微观参数。图1展示了借助于分岔理论和相变理论来预测地震的两种相变过程。如果地震过程确实是二级相变，那么系统在分岔以前呈现的平衡涨落主要是由自由能方程的二次方项控制，涨落的振幅小且服从胡克定律(Hooke's law)，涨落的时间尺度也小。在分岔以后，系统在平衡状

范德波尔(van der Pol)方程的标准方程

著名的范德波尔方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

是一个用来描述非线性阻尼振荡器的二阶常微分方程^[8]。在分析这个常微分方程的分岔结构之前，我们需要先把它写成标准方程。首先，我们将二阶常微分方程写成两个一阶非线性常微分方程：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2ay - x^2y - x \end{bmatrix} .$$

此耦合方程组可分为线性部分与非线性部分，即

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x^2y \end{bmatrix} .$$

我们先从线性部分着手，计算该系数矩阵的特征值

$$\lambda = a + i\sqrt{1-a^2}, \bar{\lambda} = a - i\sqrt{1-a^2}$$

和特征向量

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} .$$

在对角化的过程中，我们会把变量改写成

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = zu + \bar{z}\bar{u} ,$$

藉此把常微分方程写成

$$(\bar{\lambda} - \lambda)\frac{dz}{dt} = (\bar{\lambda} - \lambda)z + (z + \bar{z})^2(z\lambda + \bar{z}\bar{\lambda}) .$$

最后，我们利用一个非线性变换

$$z = w + \alpha w^3 + \beta w^2\bar{w} + \gamma w\bar{w}^2 + \delta \bar{w}^3 ,$$

将常微分方程简化成标准方程：

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w - \frac{1}{2}w^2\bar{w} .$$

态下呈现的平衡涨落同样由自由能方程在平衡点泰勒级数展开后的二次方项控制，涨落的振幅小，且时间尺度也小。在临界点上，自由能的二次方项消失，于是涨落的振幅变得极大，时间尺度也同时变得无穷大。我们称这现象为临界涨落与临界慢化。如果地震过程是一级相变，我们在慢速驱动控制参数时，同样会出现临界涨落与临界慢化的现象。

朗道相变理论

在热力学中,相变前后的系统定性全然不同。为解释这种激变,我们假设每一个相有自己独特的序参数(order parameter)。序参数一般是由微观参数粗粒化产生的综合参数,所以我们自然可以把系统的自由能(free energy)写成序参数的函数。在接近相变的范围内,自由能函数自然而然地可简化成标准方程。一级与二级相变的朗道理论如右图所示。

朗道为了解释二级相变,假设自由能的标准方程是

$$F(\phi) = \phi_0 + \frac{t}{2!}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4$$

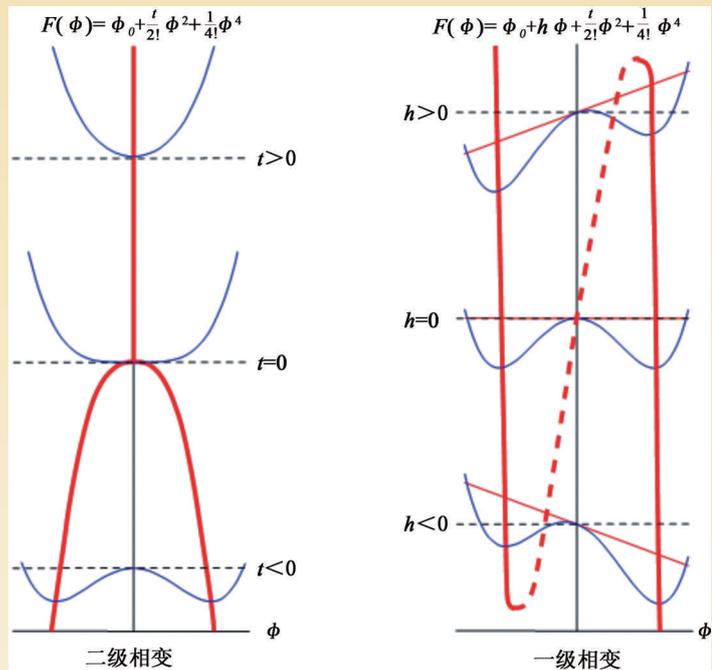
此方程内的 ϕ 是该系统的序参数, ϕ_0 是常数, $t = \alpha(T - T_c)$ 是温度 T 和临界温度 T_c 组成的相变控制参数。在临界温度以下时, $t < 0$,自由能有两个对称的极小值 $\phi = \pm\phi^* \neq 0$ 。在临界温度以上时, $t > 0$,自由能只有一个极小值 $\phi = 0$ 。当我们从 $t < 0$ 转到 $t > 0$ 时,系统就会从 $\phi = 0$ 的相持续转变成 $\phi = \pm\phi^* = \pm(-t/2)^{1/2}$ 的相,为二级相变。

自由能要是再加上一道线性项,则变

$$F(\phi) = \phi_0 + h\phi + \frac{t}{2!}\phi^2 + \frac{1}{4!}\phi^4$$

就能解释一级相变。如果 $t < 0$ 保持不变,当 $h < 0$ 时,自由能的极小值接近 $+\phi^*$ 。当 $h > 0$ 时,自由能的极小值则接近 $-\phi^*$ 。如果我们从 $h < 0$ 转到 $h > 0$,系统就会从 $+\phi^*$ 的相直接转变成 $-\phi^*$ 的相,为一级相变。

一级(右)与二级(左)相变的朗道理论。蓝色的曲线代表朗道自由能在不同相变控制参数下的形态。红色的实曲线是朗道自由能的极小值,代表系统可能呈现的平衡态。红色的虚曲线则是朗道自由能的拐点,代表系统从一个平衡态到另一个平衡态的过渡态



所不同的是,在这种慢速驱动过程中,驱动方向不同,一级相变发生的控制参数值也不同。这种滞后现象是一级相变的特征。

基本上,只要是分岔或临界相变,就肯定会出现临界涨落和临界慢化。在2009年, Marten Scheffer 发表了一篇极具影响力的评论,评述在各领域状态转变(regime shift)、早期预警信号(early warning signal)与临界点(tipping point)等方面所做的工作^[9]。继这篇评论后, Scheffer 接着发表了关于树林转变成草原^[10]、蓝藻在强光催化的情况下如何损失应变能^[11],

以及北方森林转变成林地^[12]等文章。在2012年年底, Scheffer 又写了第二篇关于预测临界相变的评论文章^[13]。从状态转变的出发点来看,因为分岔现象具有普适性,就算全然不知地震过程里的细节,照样可以做出数值预测。如果想要从临界涨落着手,可以测量不同时段的信息量。临界涨落增强时,时段内大小地震的信息量也同时变大。如果想从临界慢化着手,可以测量不同时段大小地震发生时间的系列的自相关时间尺度。当我们逼近临界点时,时间尺度出现临界慢

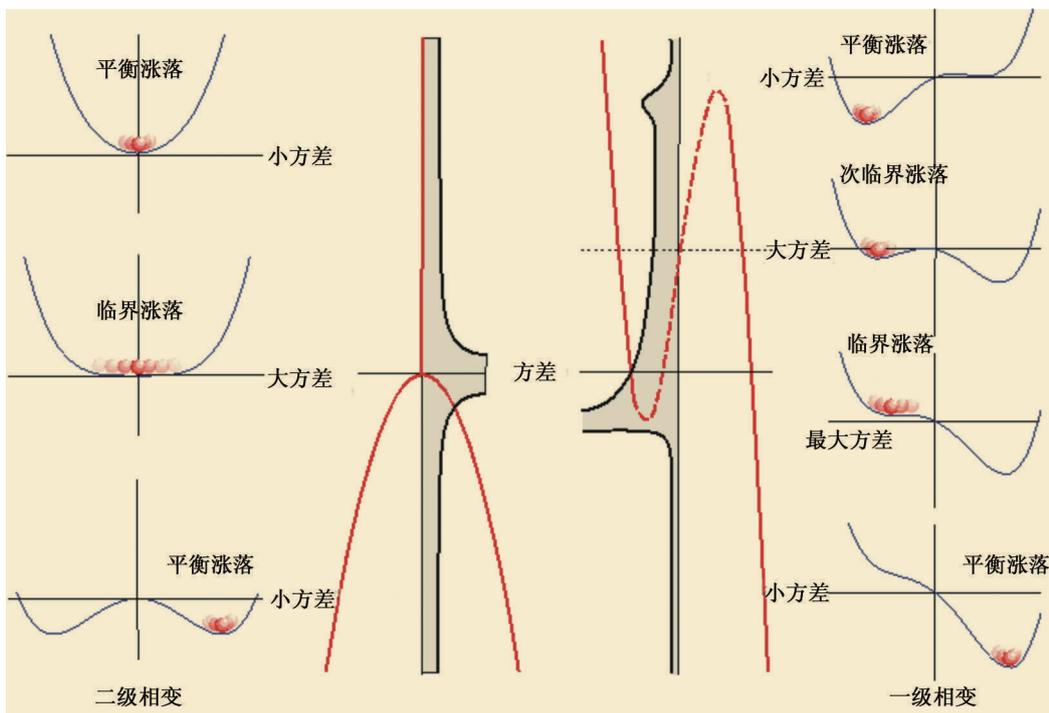


图1 在一级(右)与二级(左)相变过程里,系统从一种状态转变成另一种状态时,涨落也先从小方差的平衡涨落转为大方差的临界涨落,再转回到小方差的平衡涨落。在临界点,临界涨落会变得极大。图中蓝色的曲线代表朗道自由能在不同相变控制参数下的形态。红色的实曲线是朗道自由能的极小值,代表系统可能呈现的平衡态。红色的虚曲线则是朗道自由能的拐点,代表系统从一个平衡态到另一个平衡态的过渡态。黑色的曲线显示系统涨落的方差如何随着相变控制参数变化,尤其是在临界点附近变大

化,所以自相关时间尺度也愈变愈大。最后,如果我们想从回归平衡态的速度着手,可以针对一个指定的地震震级,测量每一个指定震级地震过后余震的持续时间。同样地,在逼近临界点时,时间尺度出现临界慢化,所以余震的持续时间也会越来越久。综合以上种种预警信息,我们可以很确切地知道大地震即将发生。若要预测大地震发生的时间,就必须事先知道该次大地震所属的普适性分岔。但是用这类方法,无法预测地震震中和震级。

5 时间尺度与空间尺度的关联

严格地讲, Scheffer 虽有上述许多成功的研究工作,但在研究和开拓临界相变的预测工具方面却仍处于刚起步的阶段。Scheffer 发展的预测方法主要针对时间尺度上的临界慢化,并没有特别探讨空间尺度在临界相变时变无穷大。从统计物理中,我们认识到许多“玩

具”模型(toy model),譬如伊辛模型(Ising model)。统计物理学家之所以研究这些“玩具”模型,是因为我们能准确求解这些模型,非常深刻地了解其中的物理。多年来研究伊辛模型的心得告诉我们,该模型从高温接近临界温度时,自旋与自旋之间的关联越来越强,继而形成巨大的自旋与自旋的关联团簇。当温度等于临界温度时,自旋与自旋的关联团簇变得无穷大。这就是所谓的空间尺度变无穷大。在这个临界点上,伊辛模型的时间尺度取决于自旋反转的频率。在自旋与自旋的关联团簇中,自旋的方向非常稳定,所以关联团簇越大,自旋反转的频率也就越低。当关联团簇为无穷大时,自旋反转的频率就会变成零。这就是为什么伊辛模型在临界点上时间尺度变无穷大的原因。

当然,伊辛模型只是“玩具”模型。能解释现实现象的模型要比伊辛模型复杂得多。但我们确信在临界点上,这种时间尺度和空间尺度同时变无穷大

的关联是一种普适现象。这意味着在地震发生之前，除了临界慢化，我们也应该可以观测到临界增长。的确，我们在还未发表的研究工作中，发现在大地震发生以前，苏门达腊岛上全球定位系统网络中的观测站的位置涨落，出现了慢慢增长的关联团簇。除了观测到巨型关联团簇在大地震以后分裂成许多小的关联团簇，我们也发现关联团簇表现出类似前震与余震的效应。在本文的第6节中，我们将更深入地探讨临界相变的时间演化。

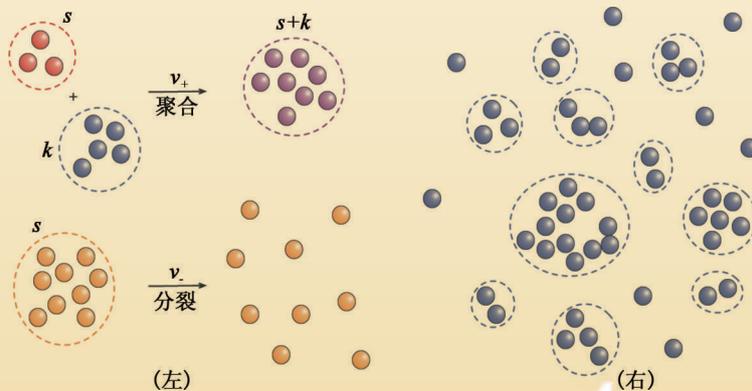
最后，我们从伊辛模型的研究结果中，认识到许多系统处在临界点上，其关联团簇的大小都会有普适性的幂律分布。在本文第四节中，我们说明了相变和分岔的关联，并借助自由能态势图解释了分岔过程如何产生临界涨落和临界慢化。这里我们解释了宏观的临界慢化是如何从微观上相关尺度分布演变成幂律分布。当然，伊辛模型是热力平衡态的典型范例，所呈

现的也是平衡态相变。纵观自然科学界的种种现象，更多的是非平衡态现象。这些非平衡态现象并没有跟温度相似的概念，无法用热力学的相关语言描述。幸好，在从微观统计力学转变为宏观朗道相变理论的同时，温度所扮演的角色也从经典热力学中的状态变量转变成与热力学定律无关的控制参数。朗道相变理论让我们认识到，操纵控制参数等于操纵至少两股相互竞争的非线性势力。胜出的势力决定系统的不动点。当胜者从一股势力转到另一股势力时，系统就出现分岔。

另外，也有一些自然界及社会经济系统，在没有外力驱动控制参数的情况下，自行组织，呈现出与分岔及相变相似的临界性质。著名的已逝世的统计物理学家 Per Bak 在 1987 年发展了一种自组织临界性 (self organized criticality, SOC) 的学说^[14]。Bak 解释说，自然界中有很多系统同时经历积累和耗散的过程。这两种过

群汤(soup-of-groups)模型

为了解释分裂主义和恐怖主义事件规模的分布，迈阿密大学的物理学家 Neil Johnson 于 2009 年建立了群汤 (soup-of-groups) 模型。这是一个以弗洛里(Flory)的聚合物化学动力学理论作为基础，描述族群聚合分裂的统计物理模型。图中左上方显示的是两个不同大小族群聚合的过程。不论族群大小，聚合率均是 v_i 。图中左下方显示的是一个族群完全分裂成个别的成员。同样地，不论分裂前族群大小，分裂率均是 v_i 。在这个模型为动态平衡时，族群大小呈现普适性的幂律分布(右)。



程相互对抗，但是只要其中之一呈现非线性，积累和耗散只有在系统达到一个独特的状态时才会互相抵消。这个独特的状态就是 Bak 称之为 SOC 的自组织临界状态。自组织临界状态是一个动态平衡点，其涨落因系统的临界性质而呈现幂律分布。这个学说提出以后，过了不久就有物理学家兴致勃勃地将它应用到地震学上^[15-17]。可惜的是，期望愈高，失望愈大。虽然还有物理学家坚信地震是自组织临界现象^[18, 19]，但是有太多疑问无法从此学说中求得解答，所以地球科学界渐渐对它质疑^[20, 21]。

其实，在作地震预测以前，我们首先要找到一个能解释地震现象里的幂律分布的普适性模型。最近，迈阿密大学的物理学家 Neil Johnson 建立了一个族群聚合分裂的统计物理模型，称之为群汤 (soup-of-groups (SOG)) 模型^[22]。利用这个模型，Johnson 成功地解释了恐怖分子攻

击造成的死伤人数的幂律分布。基于我们从全球定位系统网络观测到的关联团簇聚合分裂的迹象，我们试着利用 SOG 模型，建立能够对地震进行数值预测的前兆信息。我们发现，只要假设群汤系统空间上接近二维，且地震能量释放与分裂族群大小成正比，就可以解释古腾堡-里氏定律。另外，在大地震的酝酿过程中，地震区域会渐渐远离平衡态，出现一个越长越大的巨型族群。在这个巨型族群分裂以前，较小型的地震次数也会越变越少。跟分岔理论和自组织临界性学说比较，我们发现，利用大地震前持续生长的巨型族群对较小型地震压制的群汤模型信息，可以更精确地预测最大型地震发生的时间、震级与震中^[23]。同时，我们意识到 SOC 理论和 SOG 理论之间的紧密关联，也试着利用同样的 SOG 前兆信息预测 SOC 系统中的巨型雪崩。

群汤模型的主方程(master equation)为

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} = \frac{v_+}{N^2} \sum_{k=1}^{s-1} kn_k(s-k)n_{s-k} - \frac{v_- sn_s}{N} - \frac{2v_+ sn_s}{N^2} \sum_{k=1}^{\infty} kn_k, \quad s \geq 2,$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{v_-}{N} \sum_{k=2}^{\infty} k^2 n_k - \frac{2v_+ n_1}{N^2} \sum_{k=1}^{\infty} kn_k.$$

在这个主方程里，拥有 s 成员的族群共有 n_s 个，而群汤总共有 N 个成员。当群汤成员无限多时，我们解求出

$$n_s \sim s^{-\alpha} \exp(-s/s_0).$$

以上方程告诉我们，群汤模型里族群大小呈现幂律分布。另外，不论模型里的参数 v_+ 和 v_- 是什么，幂律分布的指数均是 $\alpha = 2.5$ 。这意味着群汤模型具有普适性，可以用来形容许多微观图像全然不同的物理现象。除了用来解释分离主义和恐怖主义事件，Johnson 也利用群汤模型解释了高温超导体内间隙性氧原子团簇大小的幂律分布^[24]。我们目前也针对地震和股市风暴，利用群汤模型进行数值预测。

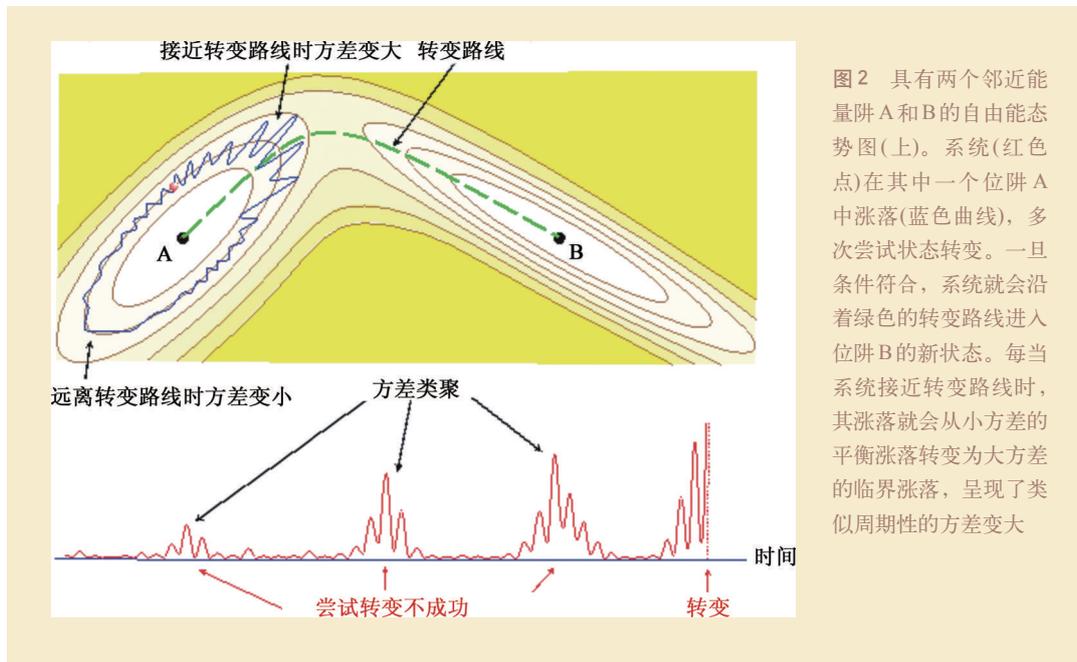


图2 具有两个邻近能量阱A和B的自由能态势图(上)。系统(红色点)在其中一个位阱A中涨落(蓝色曲线),多次尝试状态转变。一旦条件符合,系统就会沿着绿色的转变路线进入位阱B的新状态。每当系统接近转变路线时,其涨落就会从小方差的平衡涨落转变为大方差的临界涨落,呈现了类似周期性的方差变大

6 多尺度数值地震预测

针对临界慢化的预警信号, Scheffer 发展了一套普适的预测手段。这种预测手段在全球地球物理学界中还没有人采用。这是一个绝佳的机会。不论地震是一级或二级相变,我们都应该能观测到地震前期的临界慢化。另外,我们可以从图1认识到一级相变独有的滞后(hysteresis)现象。对地震预测来讲,如果地震是一级相变,这种滞后现象是件好事。因为我们发现了临界慢化之后,不会马上就发生相变(地震)。当然,因为一级相变的随机性很强,我们不能从临界慢化的信息中得知地震的确切日期。不过,一旦我们知道地震是一级相变,我们可以利用 Scheffer 发展的预测工具,可以很确切地知道地震最迟发生的日期。

除了针对单一的大地震进行短期数值预测,我们也可以借助动力系统学和统计物理学的分岔与相变理论,对大地震群进行长期数值预测。从中国的地震目录里,

我们发现每隔10年就会出现一组间隔甚短的大地震。这种变化在金融市场经常出现,称之为 volatility clustering。从动力系统学和统计物理学的角度来看,很容易解释这种周期性的变化。图2显示一个自由能态势图中的两个位阱A与B。该系统目前处于位阱A的稳定状态中,而且在位阱A中做类似周期性的涨落。

两个位阱的自由能态势图,自然会有低的位垒,将两个位阱分隔开来。系统从位阱A出发,沿着转变路线,必须先攀越过位垒,才能到达位阱B。另外,系统在位阱A涨落,每次接近转变路线时,也会因为自由能起伏变小的关系而使涨落振幅变大。要是状态转变不成功,系统就会慢慢远离转变路线,涨落也变成小方差的平衡涨落。只有在一系列的涨落变强之后,系统才会成功地从位阱A转变成位阱B的新状态。从这种角度来看,我们最担心的是转变尝试与尝试之间的时间间隔是否变短。时间间隔变短意味着自由能态势承受着外来力量的驱动,正一步一步濒临更高尺度的状

态的转变。另外，我们也关注临界涨落的振幅有没有随着时间增强。临界涨落振幅变大，意味着两个位阱之间的自由能起伏越来越小，且位垒越来越低。这同样告诉我们，系统正在逼近一个更高尺度的状态转变。

7 结束语

在这篇文章中，我们探讨了动力系统标准方程和分岔理论，统计物理中的金兹堡—朗道相变理论，临界涨落与临界慢化等概念，并解释和说明了如何利用这些概念尝试做数值地震预测。首先，我们描述如何从微观模式简化或粗粒化得到标

准方程和金兹堡—朗道相变理论，并解释它们对微观模式中的参数如何不敏感，因而具备普适性。接着，我们介绍了动力学系统或统计物理系统在接近临界点时呈现的普适性的临界涨落、临界慢化、临界增长、以及自组织临界性等现象，并且描述如何通过这些现象的观测，针对大地震作出数值预测。最后，我们说明了如何将时间与空间现象结合成一套状态转变的多尺度理论，用以解释大地震为何会出现类似周期性的群发现象。目前，利用这种宏观理论来了解和预测大地震仍处于刚起步的阶段。我们希望读者看了这篇文章之后能有所启发，着手研究和开拓这项具有重大意义的科学工作。

参考文献

- [1] Kanamori H, Brodsky E E. *Physics Today*, 2001, 54 (6):34
- [2] Gutenberg B, Richter C F. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1944, 34:185
- [3] Phillips J D. *Geomorphology*, 1992, 5:219
- [4] Sornette D, Sammis C G. *Journal de Physique I*, 1995, 5:607
- [5] Bowman D D, Ouillon G, Sammis C G *et al.* *Journal of Geophysical Research*, 1998, 103:24359
- [6] Murdock J. *Normal forms and unfoldings for local dynamical systems*. Springer, 2002
- [7] Hoffmann K H, Tang Q. *Ginzburg-Landau phase transition theory and superconductivity*. Birkhauser, 2001
- [8] Van der Pol B. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1927, 2:978
- [9] Scheffer M, Bascompte J, Brock W A *et al.* *Nature*, 2009, 461:53
- [10] Hirota M, Holmgren M, Van Nes E H *et al.* *Science*, 2011, 334:232
- [11] Veraart A J, Faassen E J, Dakos V *et al.* *Nature*, 2012, 481:357
- [12] Scheffer M, Hirota M, Holmgren M *et al.* *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2012, 109:21384
- [13] Scheffer M, Carpenter S R, Lenton T M *et al.* *Science*, 2012, 338:344
- [14] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. *Physical Review Letters*, 1987, 59:381
- [15] Chen K, Bak P, Obukhov S P. *Physical Review A*, 1991, 43:625
- [16] Feder H J S, Feder J. *Physical Review Letters*, 1991, 66:2669
- [17] Olami Z, Feder H J S, Christensen K. *Physical Review Letters*, 1992, 68:1244
- [18] Sornette A, Sornette D. *Europhysics Letters*, 2007, 9:197
- [19] Huang Y, Saleur H, Sammis C *et al.* *Europhysics Letters*, 2007, 41:43
- [20] Turcotte D L. *Reports on Progress in Physics*, 1999, 62:1377
- [21] Yang X, Du S, Ma J. *Physical Review Letters*, 2004, 92:228501
- [22] Bohorquez J C, Gourley S, Dixon A R *et al.* *Nature*, 2009, 462:911
- [23] Cheong S A, Tan T L, Chen C C *et al.* *In preparation*
- [24] Johnson N F, Ashkenazi J, Zhao Z *et al.* *AIP Advances*, 2011, 1:012114