

# 量子关联简介

周涛<sup>1</sup> 龙桂鲁<sup>1,†</sup> 傅双双<sup>2</sup> 骆顺龙<sup>2,††</sup>

(1 清华大学物理系 低维量子物理国家重点实验室 北京 100084)

(2 中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100190)

## Introduction to quantum correlations

ZHOU Tao<sup>1</sup> LONG Gui-Lu<sup>1,†</sup> FU Shuang-Shuang<sup>2</sup> LUO Shun-Long<sup>2,††</sup>

(1 State Key Laboratory for Low-Dimensional Quantum Physics and Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(2 Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

2013-07-07收到

† email: gllong@tsinghua.edu.cn

†† email: luosl@amt.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20130802

**摘要** 量子纠缠作为一种非局域的关联, 是一种重要的资源而被广泛应用于量子信息处理。然而, 最近的研究结果发现, 可分态中也可以存在非经典的关联, 量子纠缠只是量子关联的一部分; 非纠缠的量子关联在一些量子通信和量子计算任务中扮演着重要的角色。文章简要综述了量子关联的基本概念, 描述了几种常见的量子关联度量, 并介绍了量子关联在量子信息处理中的作用以及一些最新动态。

**关键词** 量子纠缠, 量子关联, 量子失协, 量子信息处理

**Abstract** Quantum entanglement is a kind of nonlocal quantum correlations that has been widely used in quantum information processing. Recent studies have found that quantum (non-classical) correlations can exist even in separable states, and quantum entanglement is just one form of quantum correlation. Non-entangled quantum correlations play important roles in various quantum communications and quantum computing tasks. In this article, we briefly review the basic concepts of quantum correlation, introduce some commonly used measures of quantum correlation, and describe various applications and recent developments, together with several important references.

**Keywords** quantum entanglement, quantum correlations, quantum discord, quantum information processing

## 1 引言

近年来, 量子信息理论和技术都得到了突飞猛进的发展。量子信息处理具有经典信息处理难以比拟的优越性, 可以完成经典信息中不能实现的信息处理任务, 例如量子密钥分配、量子隐形传态、量子秘密共享、量子密集编码、量子直接安全通信、以及大数因子分解量子算法和量

子搜索算法等<sup>[1]</sup>。在这一背景下, 对量子系统中关联的研究也变得越来越重要, 因为关联在信息处理中是一种基本资源, 量子信息处理之所以具有经典信息处理所不具有的优越性, 通常都是因为量子系统之间存在着超越经典的关联。

其实, 在量子力学早期著名的EPR文章中<sup>[2]</sup>, Einstein等人就注意到量子系统之间的超强关联, 但是他们从定域实在论的前提出发, 认为量子系统之间的这种超强关联反映了量子力学的不

完备性。同年, Schrödinger 在著名的猫态文章中提出了纠缠(entanglement)的概念<sup>[3]</sup>,用以称呼EPR文章中的超强关联。有关量子力学完备性的争论一直持续,直到20世纪60年代,Bell提出了一些数学不等式<sup>[4]</sup>,称之为Bell不等式,首次提供了用实验在爱因斯坦的定域实在性和量子理论的超强关联之间做出判决的机会。20世纪80年代,Aspect等人进行了很多精细实验<sup>[5]</sup>,结果与量子力学理论的预测一致,说明量子系统之间确实存在经典所不允许的关联。进入20世纪90年代,量子信息理论和技术开始飞速发展,量子纠缠作为一种资源被广泛探索和应用。然而,近年的研究发现,量子纠缠并不能刻画量子系统中的所有量子关联,某些非纠缠(可分)态也可用于量子信息处理,具有超越经典信息处理的优势。所以,人们又基于量子测量,提出将关联分为经典关联和量子关联,把量子关联作为资源用于量子信息处理。

目前,对量子系统中关联的刻画和量化主要是基于如下两种不同的框架:(1)纠缠/可分;(2)量子关联/经典关联。前一框架在过去的二十多年中得到了广泛而又深刻的研究,后一框架只是在近几年才被部分人所关注。由于纠缠/可分框架已广为人们熟悉<sup>[6,7]</sup>,本文主要基于量子关联/经典关联这一框架来讨论量子系统中关联的刻画和量化。然而,为了提供一个初步全面的认识,我们先简单介绍一下量子纠缠的概念和刻画,然后将重心转移到量子关联上,着重介绍量子失协的概念、性质以及相关刻画。我们还将简单介绍一些量子关联的其他度量,如几何量子失协和相对熵量子失协。最后是对量子关联的一个总结和展望。关于量子关联的综述和论文集,可参阅文献[8—10]。

## 2 量子纠缠

量子纠缠是量子体系之间的一种特殊的关联,是量子力学区别于经典力学的一个重要特征,也是量子信息处理的一种重要资源,近二十

年来无论是在理论上还是实验上都已得到广泛的研究,通常被视为量子信息最核心的概念。量子纠缠这一概念虽然在1935年就有人从物理的观念提出<sup>[2,3]</sup>,但是直到1989年才由Werner首次给出其数学上的刻画<sup>[11]</sup>:两体量子态 $\rho^{ab}$ 称为可分态,如果

$$\rho^{ab} = \sum_i p_i \rho_i^a \otimes \rho_i^b, \quad (1)$$

否则,称之为纠缠态。其中 $\{p_i\}$ 为概率分布, $\{\rho_i^a\}$ 以及 $\{\rho_i^b\}$ 分别为系统a和b上的任意量子态。

纠缠/可分这一关联的分类框架具有很直观的操作解释:对两体量子系统ab而言,可分态由于可表示为乘积态的凸组合形式,故均可由a和b经局部操作和经典通信(LOCC)得到,而纠缠态仅通过LOCC操作不能得到。

自纠缠的概念提出以来,人们一直试图给纠缠一个很好的量化<sup>[6,7,12—14]</sup>,但是到目前为止,仍旧没有一个统一的度量,现在已有的几个常用纠缠度量(如形成纠缠度、相对熵纠缠度等)的计算都很困难,导致这种局面的根本原因是纠缠本身的复杂性和人们对纠缠背后的丰富的物理和数学结构还没有完全了解。

## 3 量子关联

相当长一段时间,人们对量子关联的认识仅局限于量子纠缠,通常将量子纠缠完全等同于量子关联,认为量子纠缠是很多信息处理任务中量子优越性的唯一原因。但在1998年,Knill和Laflamme提出了著名的DQC1模型<sup>[15]</sup>,这一模型能有效地计算 $n$ 维酉矩阵的迹,被认为与经典算法相比,可以实现指数加速。要实现该量子算法,需要准备 $n+1$ 个量子比特,然而其中只有一个比特处于赝纯态,其余的 $n$ 个比特都处于最大混合态,在这一系统中几乎没有量子纠缠<sup>[16]</sup>。该结果在核磁共振(NMR)实验中得到了验证,从而对量子纠缠是实现量子算法加速的唯一原因提出了质疑。

在这样的背景下,人们基于量子测量,提出了将关联分为经典关联和量子关联的分类

方案<sup>[17]</sup>: 一个两体量子态 $\rho^{ab}$ 是(关于双边测量)经典关联态, 又称经典—经典(关联)态, 如果存在系统 a 和 b 上的 von Neumann 测量(秩为一的正交投影测量)  $\{\Pi_i^a\}$  和  $\{\Pi_j^b\}$ , 使得该测量不扰动 $\rho^{ab}$ , 即

$$\rho^{ab} = \sum_j (\Pi_i^a \otimes \Pi_j^b) \rho^{ab} (\Pi_i^a \otimes \Pi_j^b),$$

否则, 称为量子关联态(关于双边测量)。若只考虑一个系统的 von Neumann 测量, 则称两体量子态 $\rho^{ab}$ 是经典—量子(关联)态, 如果存在系统 a 上的 von Neumann 测量  $\{\Pi_i^a\}$ , 使得该测量不扰动 $\rho^{ab}$ , 即

$$\rho^{ab} = \sum_i (\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b) \rho^{ab} (\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b),$$

否则, 称为量子关联态(关于单边测量), 以下直接简称为量子关联态。在本文中, 我们限制测量为系统 a 上的 von Neumann 测量, 这样经典关联态的集合就是所有的经典—量子态。

从上面的讨论我们看到, 经典关联/量子关联这一分类框架主要是基于量子测量, 而纠缠/可分的分类框架主要是基于 LOCC, 两种分类框架有本质上的不同, 又有深刻的联系<sup>[18]</sup>。实际上, (1) 式所表达的可分态是一个经典—量子态, 当且仅当  $\{\rho_i^a\}$  可交换, 即  $[\rho_i^a, \rho_j^a] = 0$ 。

2001 年, Henderson 和 Vedral<sup>[19]</sup>以及 Ollivier 和 Zurek<sup>[20]</sup>基于测量分别提出了量子失协(quantum discord)的概念, 作为量子关联的一种度量。之后, 人们又提出很多不同的刻画量子关联的量, 如测量诱导的扰动(measurement-induced disturbance)<sup>[17]</sup>、相对熵量子失协(relative entropy of discord)<sup>[21]</sup>、几何量子失协(geometric measure of quantum discord)<sup>[22-24]</sup>等。下面, 我们将着重介绍量子失协的概念和性质, 并简单介绍一下几何量子失协和相对熵量子失协。

### 3.1 量子失协

先回顾一下信息论中的基本概念。在经典信息论中<sup>[25]</sup>, (离散)态是用经典概率分布  $p = \{p_i\}$  来

描述的。Shannon 熵定义为

$$H(p) := - \sum_i p_i \log_2 p_i,$$

它可以用来表示态  $p$  的不确定度。对于一个经典的两体系统态(即联合概率分布) $p^{ab} = \{p_{ij}^{ab}\}$ , 系统 a 和 b 的边缘态(即约化态)分别为  $p^a = \{p_i^a := \sum_j p_{ij}^{ab}\}$ ,  $p^b = \{p_j^b := \sum_i p_{ij}^{ab}\}$ 。此时, 系统 a 和 b 之间的关联可以用 Shannon 互信息

$$I(p^{ab}) := H(p^a) + H(p^b) - H(p^{ab})$$

来度量。如果定义系统 b 相对于 a 的条件熵为

$$H(p^{ab}|p^a) := H(p^{ab}) - H(p^a) = \sum_i p_i^a H(p_i^{b|a}),$$

其中  $p_i^{b|a} := \{p_{ij}^{ab}/p_i^a\}$  是条件概率分布, 则得到 Shannon 互信息的另一等价表达式:

$$J(p^{ab}) := H(p^b) - H(p^{ab}|p^a).$$

在经典信息论中, Shannon 互信息的以上两种表达形式是等价的, 即  $I(p^{ab}) = J(p^{ab})$ 。

现将经典系统中以上概念相应地推广到量子系统。在量子系统中, 态对应的是密度矩阵 $\rho$ (Hilbert 空间上迹为 1 的正算子), 观测对应的是自伴算子。Shannon 熵自然地推广为 von Neumann 熵, 即

$$S(\rho) := - \text{tr} \rho \log_2 \rho.$$

Shannon 互信息  $I(p^{ab})$  对于两体量子系统 $\rho^{ab}$  的直接推广为 von Neumann(量子)互信息

$$I(\rho^{ab}) := S(\rho^a) + S(\rho^b) - S(\rho^{ab}).$$

接下来对  $J(p^{ab})$  进行推广, 这涉及到对条件熵的推广, 可以借助于测量, 对系统 a 做 von Neumann 测量  $\Pi^a = \{\Pi_i^a\}$ , 其中  $i$  对应不同的测量结果。测量后, 得到结果  $i$  时系统 b 的状态变为

$$\rho_i^b := \frac{\text{tr}_a(\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b) \rho^{ab} (\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b)}{\text{tr}(\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b) \rho^{ab} (\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b)},$$

该结果出现的概率为  $p_i := \text{tr}(\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b) \rho^{ab} (\Pi_i^a \otimes \mathbb{1}^b)$ 。于是, 推广的条件熵可定义为

$$S(\rho^b|\Pi^a) := \sum_i p_i S(\rho_i^b).$$

相应地,  $J(p^{ab})$  可推广为

$$J(\rho^{ab}|\Pi^a) := S(\rho^b) - S(\rho^b|\Pi^a).$$

容易看出,推广到量子情形后,互信息的两个表达式并不一定相等,实际上,  $I(\rho^{ab}) \geq J(\rho^{ab}|\Pi^a)$ 。  $I(\rho^{ab})$  可以作为系统总关联的度量,而  $J(\rho^{ab}|\Pi^a)$  的大小与测量基的选择有关,在所有的 von Neumann 测量中对  $J(\rho^{ab}|\Pi^a)$  取最大值,得到

$$C(\rho^{ab}) := \max_{\Pi^a} J(\rho^{ab}|\Pi^a),$$

这可作为经典关联的度量<sup>[19]</sup>,于是,

$$D(\rho^{ab}) := I(\rho^{ab}) - C(\rho^{ab})$$

可以作为量子关联的度量,即通常所说的量子失协<sup>[20]</sup>。

实际上,量子失协还存在另外一个等价的描述。若定义

$$\Pi^a(\rho^{ab}) := \sum_i (\Pi_i^a \otimes I^b) \rho^{ab} (\Pi_i^a \otimes I^b),$$

则

$$I(\Pi^a(\rho^{ab})) = J(\rho^{ab}|\Pi^a), \quad C(\rho^{ab}) = \max_{\Pi^a} I(\Pi^a(\rho^{ab})).$$

所以,

$$D(\rho^{ab}) = I(\rho^{ab}) - \max_{\Pi^a} I(\Pi^a(\rho^{ab})),$$

即量子失协就是单边的 von Neumann 测量对量子态所造成的最小扰动(扰动大小用互信息的变化来刻画)。

量子失协在近几年得到很多关注。量子失协具有以下性质<sup>[8]</sup>:

(1) 对于纯态,量子失协等于量子纠缠;对于混态,它们一般不相等。

(2) 一般来说,量子失协不是对称的,这是由于条件熵的定义依赖于测量作用在哪一个系统上,即

$$D_a(\rho^{ab}) \neq D_b(\rho^{ab}),$$

此处  $D_a(\rho^{ab})$  和  $D_b(\rho^{ab})$  分别表示对 a, b 系统做 von Neumann 测量得到的量子失协。当然,我们也可基于双边测量,从而得到对称化的量子失协<sup>[26, 27]</sup>。以下在提到量子失协时,若不做特殊说明,都是指  $D_a(\rho^{ab})$ 。

(3)  $0 \leq D(\rho^{ab}) < I(\rho^{ab})$ 。进一步,  $D(\rho^{ab}) \leq S(\rho^a)$ , 但  $D(\rho^{ab}) \leq S(\rho^b)$  不一定成立<sup>[28]</sup>。

(4) 量子失协在局部酉操作下保持不变,即量子态  $\rho^{ab}$  和  $(U^a \otimes U^b) \rho^{ab} (U^a \otimes U^b)^\dagger$  具有相同的量子失

协,此处  $U^a$  和  $U^b$  分别是系统 a, b 上的酉算子。

(5) 在一定的意义下,几乎所有的态都具有非零的量子失协。  $D(\rho^{ab}) = 0$  当且仅当这个态是经典—量子态,即  $\rho^{ab} = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \otimes \rho_i^b$ , 其中  $\{p_i\}$  为概率分布,  $\{|i\rangle\}$  为系统 a 上的标准正交基,  $\rho_i^b$  为系统 b 上的态<sup>[29]</sup>。

值得指出的是,对经典—量子态还有一个等价的刻画:两体量子态  $\rho^{ab}$  为经典—量子态,当且仅当其可被系统 a 局部广播<sup>[30, 31]</sup>。这一命题实际上与下述两命题互相等价<sup>[31]</sup>: (1) 一组量子态可同时被广播,当且仅当它们可交换<sup>[32]</sup>; (2) 两体量子态可被系统 a, b 双边局部广播,当且仅当其为经典—经典态,即  $\rho^{ab} = \sum_{ij} p_{ij} |i\rangle \langle i| \otimes |j\rangle \langle j|$ , 其中  $\{p_{ij}\}$  为两体概率分布,  $\{|i\rangle\}$  和  $\{|j\rangle\}$  分别为系统 a 和 b 上的标准正交基<sup>[33]</sup>。

(6) 对于没有量子关联但有经典关联的量子态,可以通过局域操作产生量子关联。事实上,所有的非纠缠量子关联都可由局域操作在经典态上产生<sup>[18]</sup>。

这一点与纠缠相比具有很大区别,因为对于可分态,任何局域操作都不能产生量子纠缠。关于局域操作产生量子关联的条件,见文献[34, 35]。

(7) 所有的纠缠态都具有非零的量子失协,但是部分可分态的量子失协也非零。一个很简单的例子是:

$$\rho^{ab} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| \otimes |+\rangle\langle +| + |+\rangle\langle +| \otimes |1\rangle\langle 1|),$$

其中  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 。

(8) 通常情况下,量子失协在噪声环境中的演化要比量子纠缠更平稳、更持久,量子失协一般不会像量子纠缠那样出现突然消失的现象<sup>[36—38]</sup>。

量子失协的上述性质使得它在量子计算和量子信息中被广泛应用。下面,我们简单讨论一下 DQC1 模型及关联在其中的作用<sup>[15]</sup>。DQC1 模型由  $n+1$  个量子比特构成,如图 1 所示。

初始时刻,系统的状态为  $\rho^{ab} = \rho^a \otimes \frac{1^b}{2^n}$ , 其中



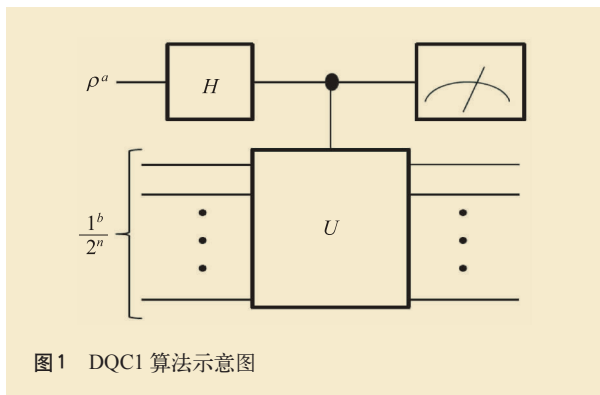


图1 DQC1 算法示意图

系统 a 由一个量子比特组成，处于赝纯态  $\rho^a = \frac{1-\alpha}{2}|1\rangle\langle 1| + \alpha|0\rangle\langle 0|$ ，余下的  $n$  个量子比特组成系统 b，处于极大混合态。然后，对  $\rho^a$  做一次 Hadamard 变换，再将它作为控制比特，对其余的  $n$  个量子比特做  $U$  (酉算子) 控操作，系统的态变为

$$\rho_i^{ab} = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| \otimes \frac{1}{2^n} + \alpha|0\rangle\langle 0| \otimes \frac{U^\dagger}{2^n} + \alpha|1\rangle\langle 0| \otimes \frac{U}{2^n}) .$$

相应地，初始时处于赝纯态的量子比特变成

$$\rho_i^a = \text{tr}_b \rho_i^{ab} = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + \alpha|0\rangle\langle 0| \cdot \frac{\text{tr} U^\dagger}{2^n} + \alpha|1\rangle\langle 0| \cdot \frac{\text{tr} U}{2^n}) .$$

在该比特上测量 Pauli 算子  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  的期望值分别是：

$$\text{tr}(\sigma_x \rho_i^a) = \frac{\alpha}{2^n} \text{Re}(\text{tr} U) ,$$

$$\text{tr}(\sigma_y \rho_i^a) = \frac{\alpha}{2^n} \text{Im}(\text{tr} U) .$$

这样，我们就能够快速计算  $n$  维酉矩阵  $U$  的迹，与已有的经典算法相比，可以实现指数加速。

但是正如上文已经指出的那样，当  $\alpha$  足够小的时候，这一系统中不可能出现量子纠缠。那么什么是实现该量子算法加速的原因？2008 年，Datta 计算了该模型中的量子失协，发现并不为零<sup>[16]</sup>，特别是，当  $\alpha$  足够小时， $\rho_i^{ab}$  的量子失协有如下表达式：

$$D(\rho_i^{ab}) = 2 - H\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - \log_2(1 + \sqrt{1-\alpha^2}) -$$

$$(1 - \sqrt{1-\alpha^2}) \log_2 e .$$

此处  $H(x) := -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$  是 Shannon 熵函数。尽管目前对这一模型的分析仍然存

在争议，但是这一发现在一定程度上支持了非纠缠的量子关联仍可作为一种量子资源，用于量子信息处理任务。实验上，量子失协在一些具体物理系统中的演化情况已被开始研究并产生广泛影响<sup>[39, 40]</sup>，发表在 *Nature*, *Nature Physics* 和 *Nature Photonics* 上的评述和实验文章显示，量子失协的确可以作为一种资源用于一些量子信息处理任务<sup>[41-44]</sup>。

此外，量子失协也可用于分析一些基本的物理问题，如麦克斯韦妖，量子相变等<sup>[45-51]</sup>。在量子开放系统方面，量子关联的演化也是一个很重要的问题，在马尔科夫环境和非马尔科夫环境下的演化已经得到广泛研究<sup>[8, 52, 53]</sup>。

综上所述，可以看出量子失协可以比较好地度量量子关联。但是，量子失协的计算在数学上非常困难。众所周知，纠缠的度量一般情况下也很难计算，但是至少对于两量子比特的态可以给出形成纠缠度的一个解析的表达式<sup>[54]</sup>。然而，数学上已经证明，即使对两量子比特的态，量子失协也不存在解析表达式<sup>[55]</sup>。到目前为止，仅对一些特殊的态可以解析计算其量子失协<sup>[56-63]</sup>。特别是对于 Bell 对角态：

$$\rho^{ab} = \frac{1}{4} \left( |1^{ab}\rangle\langle 1^{ab}| + \sum_i c_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) ,$$

可给出量子失协的解析表达式<sup>[56]</sup>：

$$D(\rho^{ab}) = \frac{1}{4} [(1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3) + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) + (1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3) - \frac{1-c}{2} \log_2(1-c) - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c)] .$$

其中  $c_i := \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ 。

### 3.2 几何量子失协

下面简单介绍一种计算比较方便的量子关联的度量，即 2010 年由 Dakić 等提出的几何量子失协<sup>[22]</sup>：

$$D_G(\rho^{ab}) := \min_{\chi^{ab}} \|\rho^{ab} - \chi^{ab}\|^2,$$

其中  $\min$  是对所有量子失协为零的态  $\chi^{ab}$  取最小值,  $\|\rho^{ab} - \chi^{ab}\|^2 := \text{tr}(\rho^{ab} - \chi^{ab})^2$  是  $\rho^{ab}$  和  $\chi^{ab}$  的 Hilbert—Schmidt 距离的平方。几何量子失协存在如下更简便的等价表示<sup>[23]</sup>:

$$D_G(\rho^{ab}) = \min_{\Pi^a} \|\rho^{ab} - \Pi^a(\rho^{ab})\|^2,$$

其中  $\Pi^a(\rho^{ab}) := \sum_i (\Pi_i^a \otimes 1^b) \rho^{ab} (\Pi_i^a \otimes 1^b)$ 。这样, 与量子失协相似, 就可以把几何量子失协看成是单边的 von Neumann 测量对两体量子态所带来的最小扰动(用 Hilbert—Schmidt 距离的平方来刻画扰动)。

对于任意两比特的量子态, 更一般地  $2 \times n$  维的态, 都可以给出几何量子失协的解析表达式<sup>[22, 23]</sup>。任何一个两比特的量子态都有如下的 Bloch 表示:

$$\rho^{ab} = \frac{1}{4} \left( 1^a \otimes 1^b + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i \otimes 1^b + \sum_{i=1}^3 y_i 1^a \otimes \sigma_i + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right),$$

其中  $x_i = \text{tr}(\sigma_i \otimes 1^b)$ ,  $y_i = \text{tr}(1^a \otimes \sigma_i)$ ,  $t_{ij} = \text{tr}(\sigma_i \otimes \sigma_j)$ 。  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)^T$  和  $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3)^T$  是边缘态  $\rho^a$  和  $\rho^b$  的 Bloch 矢量, 而  $T := \{t_{ij}\}$  是两体量子态的关联矩阵。  $\rho^{ab}$  的几何量子失协为

$$D_G(\rho^{ab}) = \frac{1}{4} (\|\mathbf{x}\|^2 + \|T\|^2 - k_{\max}),$$

其中,  $k_{\max}$  是矩阵  $K = \mathbf{x}\mathbf{x}^T + TT^T$  的最大本征值。

进一步, 对于任意的两体纯态以及一些高度对称的态, 都可以给出几何量子失协的解析表达式。但是, 对于一般的两体量子态, 目前仍没有得到几何量子失协的解析表达式, 这主要是因为在高维情形时, 量子态的 Bloch 表示没有一个很好的几何对应关系<sup>[23, 24]</sup>。

另外, 还存在一个与几何量子失协密切相关的量, 即测量诱导的非局域性<sup>[64]</sup>:

$$N(\rho^{ab}) := \max_{\Pi^a} \|\rho^{ab} - \Pi^a(\rho^{ab})\|^2,$$

其中  $\max$  是对所有不扰动  $\rho^a$  的系统  $a$  上的 von Neumann 测量(即  $\Pi^a(\rho^a) = \rho^a$ ) 取最大。

### 3.3 用相对熵量化关联

上面指出, 量子纠缠不是全部的量子关联, 但是之前纠缠的度量 and 量子关联的度量分别是基于不同的出发点的, 难以将量子纠缠和量子关联进行统一的比较。为了给出经典关联、量子关联以及纠缠的一种统一的度量, Modi 等人提出了用相对熵来度量关联<sup>[21]</sup>。

密度矩阵  $\rho$  相对于  $\sigma$  的相对熵定义为

$$S(\rho|\sigma) := -\text{tr} \rho \log_2 \sigma - S(\rho),$$

$S(\rho|\sigma) \geq 0$ 。当且仅当  $\rho = \sigma$  时, 有  $S(\rho|\sigma) = 0$ ,  $S(\rho|\sigma)$  可以看做  $\rho$  与  $\sigma$  之间的某种距离。

记可分态构成的集合为  $S$ , 经典—经典(关联)态构成的集合为  $C$ , 则可以定义两体量子态  $\rho^{ab}$  的相对熵纠缠度(relative entropy of entanglement)为

$$E_r(\rho^{ab}) := \min_{\sigma^{ab} \in S} S(\rho^{ab}|\sigma^{ab}),$$

相对熵量子失协(relative entropy of discord) 为

$$D_r(\rho^{ab}) := \min_{\chi^{ab} \in C} S(\rho^{ab}|\chi^{ab}),$$

以及 dissonance 的度量(relative entropy of dissonance)

$$Q_r(\rho^{ab}) := \min_{\chi^{ab} \in C} S(\sigma^{ab}|\chi^{ab}).$$

其中  $\sigma^{ab}$  是  $E_r(\rho^{ab})$  定义中的最优  $\sigma^{ab}$ 。dissonance 是量子关联中除去量子纠缠后剩下的部分。在两体纯态中, 量子纠缠就是所有的量子关联, 即两体纯态中是不存在 dissonance 的。但是在两体的混合态中, 量子纠缠一般并不是所有的量子关联<sup>[21]</sup>。

用相对熵来度量关联的一个优势是, 可以计算多体系统的关联, 并且将各种关联放在一个统一的框架里进行比较。

## 4 总结与展望

随着量子信息论的进一步发展, 人们对量子关联的本质和应用越来越感兴趣。在量子关

联中还有许多重要的理论问题需要研究,例如两体系统中量子关联的计算,量子关联与量子纠缠以及量子非局域性之间的关系,多体系统中关联的刻画和度量,量子关联在退相干及量子测量中的应用,等等。对量子体系中量子关联的深入认识不仅有利于设计出更好的量子信息处理方案,而且有利于对一些基本物理问题的理解。此外,对量子关联的理论研究应当同实验结

合起来,通过相关实验,可以更好地理解和运用量子关联。

总之,虽然量子关联的研究还处于初步阶段,相关概念及问题还引起不少怀疑和争论,本文也只是作了一个简略的介绍,但量子关联无疑是个重要的研究领域,在数学和物理方面都有深刻的理论价值和巨大的应用潜力,很多课题都值得进一步探讨。

## 参考文献

- [1] Nielsen M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000
- [2] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. *Phys. Rev.*, 1935, 47: 777
- [3] Schrödinger E. *Naturwissenschaften*, 1935, 23: 807, 823, 844
- [4] Bell J S. *Physics (N. Y.)*, 1964, 1: 195
- [5] Aspect A, Grangier P, Roger G. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, 49: 91
- [6] Bennett C H, DiVincenzo D P, Smolin J A *et al.* *Phys. Rev. A*, 1996, 54: 3824
- [7] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M *et al.* *Rev. Mod. Phys.*, 2009, 81: 865
- [8] Modi K, Brodutch A, Cable H *et al.* arXiv:1112.6238 (2012)
- [9] Luo S, Maniscalco S, Modi K *et al.* *Int. J. Quantum Information*, 2011, 9(7,8): V
- [10] Amico L, Bose S, Korepin V *et al.* *Int. J. Modern Phys. B*, 2012, 27(1—3): 1302005
- [11] Werner R F. *Phys. Rev. A*, 1989, 40: 4277
- [12] Chen K, Alberverio S, Fei S M. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95: 040504
- [13] Li Y S, Zeng B, Liu X S *et al.* *Phys. Rev. A*, 2001, 64: 054302
- [14] 龙桂鲁, 李岩松, 曾蓓等. 量子纠缠及其在量子信息中的应用. 见: 曾谨言, 裴寿镛, 龙桂鲁主编. 量子力学新进展(第二辑). 北京: 北京大学出版社, 2001. 189—259
- [15] Knill E, Laflamme R. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81: 5672
- [16] Datta A, Shaji A, Caves M. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100: 050502
- [17] Luo S. *Phys. Rev. A*, 2008, 77: 022301
- [18] Li N, Luo S. *Phys. Rev. A*, 2008, 78: 024303
- [19] Henderson L, Vedral V. *J. Phys. A*, 2001, 34: 6899
- [20] Ollivier H, Zurek W H. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 88: 017901
- [21] Modi K, Paterek T, Son W *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104: 080501
- [22] Dakić B, Vedral V, Brukner C. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105: 190502
- [23] Luo S, Fu S. *Phys. Rev. A*, 2010, 82: 034302
- [24] Luo S, Fu S. *Theoret. Math. Phys.*, 2012, 171: 870
- [25] Cover T M, Thomas J A. *Elements of Information Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1991
- [26] Luo S, Zhang Q. *J. Stat. Phys.*, 2009, 136: 165
- [27] Wu S, Poulsen U V, Mølmer K. *Phys. Rev. A*, 2009, 80: 032319
- [28] Li N, Luo S. *Phys. Rev. A*, 2011, 84: 042124
- [29] Dakić B, Vedral V, Brukner Č. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105: 190502
- [30] Luo S. *Lett. Math. Phys.*, 2010, 92: 143
- [31] Luo S, Sun W. *Phys. Rev. A*, 2010, 82: 012338
- [32] Barnum H, Caves C M, Fuchs C A *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1996, 76: 2818
- [33] Piani M, Christandl M, Mora C E *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102: 250503
- [34] Streltsov A, Kampermann H, Bruß D. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 107: 170502
- [35] Hu X, Fan H, Zhou D L *et al.* *Phys. Rev. A*, 2012, 85: 032102
- [36] Werlang T, Souza S, Fanchini F F *et al.* *Phys. Rev. A*, 2009, 80: 024103
- [37] Fanchini F F, Werlang T, Brasil C A *et al.* *Phys. Rev. A*, 2010, 81: 052107
- [38] Hu M L, Fan H. *Ann. Phys.*, 2012, 327: 851
- [39] Xu J S, Xu X Y, Li C F *et al.* *Nature Commun.*, 2010, 1: 7
- [40] Rong X, Wang Z, Jin F *et al.* *Phys. Rev. B*, 2012, 86: 104425
- [41] Merali Z. *Nature*, 2011, 474: 24
- [42] Dakić B, Lipp Y O, Ma X *et al.* *Nature Phys.*, 2012, 8: 666
- [43] Gu M, Chrzanowski H M, Assad S M *et al.* *Nature Phys.*,

- 2012, 8: 671
- [44] Datta A. Nature Photonics, 2012, 6: 724
- [45] Brodutch A, Terno D R. Phys. Rev. A, 2010, 81: 062103
- [46] Werlang T, Trippe C, Ribeiro G A P *et al.* Phys. Rev. Lett., 2010, 105: 095702
- [47] Li Y, Lin H. Phys. Rev. A, 2011, 83: 052323
- [48] Luo D W, Lin H Q, Xu J B *et al.* Phys. Rev. A, 2011, 84: 062112
- [49] Liu B Q, Shao B, Li J G *et al.* Phys. Rev. A, 2011, 83: 052112
- [50] Chen Y X, Li S W, Yin Z. Phys. Rev. A, 2010, 82: 052320
- [51] Yao Y, Li H W, Zhang C M *et al.* Phys. Rev. A, 2012, 86: 042102
- [52] Wang B, Xu Z, Chen Z *et al.* Phys. Rev. A, 2010, 81: 014101
- [53] Li Y, Luo B, Guo H. Phys. Rev. A, 2011, 84: 012316
- [54] Wootters W K. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 2245
- [55] Girolami D, Adesso G. Phys. Rev. A, 2011, 83: 052108
- [56] Luo S. Phys. Rev. A, 2008, 77: 042303
- [57] Ali M, Rau A R P, Alber G. Phys. Rev. A, 2010, 81: 042105
- [58] Li B, Wang Z X, Fei S M. Phys. Rev. A, 2011, 83: 022321
- [59] Cen L X, Li X Q, Shao J *et al.* Phys. Rev. A, 2011, 83: 054101
- [60] Chen Q, Zhang C, Yu S *et al.* Phys. Rev. A, 2011, 84: 042313
- [61] Shi M, Yang W, Jiang F *et al.* J. Phys. A, 2011, 44: 415304
- [62] Shi M, Sun C, Jiang F *et al.* Phys. Rev. A, 2012, 85: 064104
- [63] Xi Z, Lu X M, Wang X *et al.* Phys. Rev. A, 2012, 85: 032109
- [64] Luo S, Fu S. Phys. Rev. Lett., 2011, 106: 120401

市 场 由 而 宽 阔

www.ilope-expo.com

垂询电话: 010-8460 0344

# 北京国际光电产业博览会 暨

## 第十八届中国国际激光·光电子及LED光电显示产品展览会

北京·中国国际展览中心(三元桥) 2013年10月16日-18日

<p><b>主办单位</b></p> <p>中国国际贸易促进委员会 中国国际展览中心集团公司 中国光学光电子行业协会</p> <p><b>承办单位</b></p> <p>中国光学光电子行业协会 中展集团北京华港展览有限公司</p>	<p><b>支持单位</b></p> <p>中国工业和信息化部 中国兵器工业集团公司 美国光电协会 德国光学、医疗精密设备协会</p> <p>中国科技部 北京市科学技术委员会 日本光产业技术振兴会 财团法人光电科技工业协进会</p> <p>中国科学院 北京光机产业基地 德国工商总会 北京市市政工程总公司(集团)</p> <p><b>展品范围</b></p> <p>激光与红外产品及设备 光电材料与元件</p> <p>光电显示及照明 光学元件与材料</p> <p>LED &amp; OLED &amp; FPD 光通讯设备</p>
---	--