

纪念 Bohr 的《伟大的三部曲》发表 100 周年暨 北京大学物理专业建系 100 周年

曾谨言[†]

(北京大学物理学院 北京 100871)

2013-04-12 收到

[†] email: jyzeng@pku.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20130908

1 它山之石, 可以攻玉

2013 年, 迎来了北京大学物理专业建系 100 周年纪念。一个偶然但很愉快的巧合是, 同时迎来了 N. Bohr 的《伟大的三部曲》¹⁾ (The Great Trilogy)¹⁾ 发表 100 周年 (见图 1)。此文敲开了原子结构量子理论的大门。在这之后的十几年中, 在 Bohr 思想的影响下, 经一批杰出的物理学家的共同努力, 使当时还比较落后的欧洲小国丹麦首都 Copenhagen 的 Bohr 研究所 (见图 3), 成为世界公认的量子物理学研究中心。由于尼尔斯·玻恩对量子理论的卓越贡献, 丹麦国王破格授予他荣誉勋章 (见图 2)。在北京大学建设世界第一流的物理学院院所之际, 《玻尔研究所的早年岁月, 1921—1930》一书^{2), 2)} 所讲述的经验很值得借鉴。“它山之石, 可以攻玉”³⁾。按照我的理解, 这些宝贵经验是:

(1) 科学进步本身有赖于鼓励不同思想的自由交流, 也有赖于鼓励不同国家的科学家提出各具特色的研究方法时相互切磋与密切合作²⁾。Bohr 的原子结构的量子理论就汇合了当时物理学两支主要潮流: 一是以英国人 E. Rutherford 和 J.J. Thomson 为先驱的有关物质结构的实验发现, 另一是德国物理学家 M. Planck 和 A. Einstein 引导的关于自然规律的理论研究²⁾。表征 Bohr 研究



图 1 N. Bohr 发表《伟大的三部曲》时期的照片, 刊登在 1963 年纪念《伟大的三部曲》发表 50 周年的专辑上³⁾



图 2 由于尼尔斯·玻尔对量子理论的卓越贡献, 丹麦国王破格授予他荣誉勋章, 现陈列在 Frederiksborg 皇宫内 (王世光 摄)

所初期特色的不是一张给人深刻印象的庞大的物理学家名单, 而是存在于这个集体中的不寻常的合作精神。不断的讨论和自由交换思想, 给每个物理学家带来了最美好的东西, 常常提供了一个能引起决定性突破的灵感或源泉。Bohr 不是一个人孤独地工作, 把世界上最活跃的, 最有天赋和最有远见的物理学家集聚在他的周围是他最大力量所在。矩阵力学的奠基人 Heisenberg 说过: “科学植根于讨论之中 (Science is rooted in conversation)”²⁾。对量子力学和相对论

1) N. Bohr 于 1913 年在 *Philosophical Magazine* 上发表的关于原子和分子结构的三篇论文。后来, 人们为了纪念这三篇文章的重要贡献, 称之为“伟大的三部曲”。在 1963 年, 为纪念这三篇文章发表 50 周年, 著名物理学家 L. Rosenfeld 写了一个长篇序言, 介绍三篇论文的主要贡献, 并把三篇论文重印成一本书出版, 书名为 *On the Constitution of Atoms and Molecules* (W. A. Benjamin, N. Y., 1963)。

2) 此书为 P. Robertson 原著。为纪念 N. Bohr 诞辰 100 周年, 1985 年, 译成中文出版。

3) 最近在 *Nature*, 2013, 498(6) 期上发表了纪念 N. Bohr 的“伟大三部曲”发表 100 周年纪念的专辑。



图3 N. Bohr研究所

量子力学做出了杰出贡献的Dirac在获得诺贝尔物理学奖后给Bohr的信中提到：“我感到我所有最深刻的思想，都受了我和你谈话的巨大而有益的影响，它超过了与其他任何人的谈话，即使这种影响并不表现在我的著作中，它却支配着我进行研究的一切打算和计划^[2]”。Bohr相信，国际合作能在物理学发展中发挥积极的作用。在20世纪20年代，Bohr研究所已成了培育世界各国物理实验室和研究所的未来指挥员的一个苗圃(见图(3)和图(4))^[2]。

(2)相对论与量子力学是20世纪物理学的两个划时代的贡献。A. Einstein的名字被神话般地在人群中流传，可能是因为相对论主要是由他一人完成。与此不同，量子力学的建立是如此困难和复杂，不可能由一个人独立完成。在此艰辛的征途上，闪烁着当时最优秀的一群科学家的名字：M. Planck, A. Einstein, N. Bohr, W. Heisenberg, W. Pauli, L. de Broglie, E. Schrödinger, M. Born, P.A.M. Dirac等。值得注意的是，他们都是在青年时代(小于或等于45岁)对量子力学理论做出了杰出贡献，之后获得诺贝尔物理学奖。Bohr研究所的一条重要经验是：不仅仅要依靠少数科学家的能力和才华，而是要不断吸收相当数量的年轻人，让他们熟悉科学研究的成果与方法。只有这样，才能在最大程度上不断提出新问题。新思想就会不断涌进

科研工作中^[2]。

(3)进行理论性研究工作，必须每一时刻把理论的这个或那个结果与实验结果相比较，然后才能在各种可能性之间做出选择。这种工作方式表现在量子力学理论体系提出之前，Bohr的原子的电子壳层结构理论应用于化学元素周期律的唯象探索工作中。尔后，Pauli的第4个量子数和不相容原理的提出，也深受其影响。“Bohr的巨大力量之一在于他总是凭借神奇的直观就能了解物理现象，而不是形式地从数学上去推导出同样的结果”^[2]。同样，实验研究工作者必须与理论研究密切结合，这样可以减少实验工作的盲目性^[2]。实验结果永远是检验一个自然科学理论正确与否的决定性的判据。

2 量子理论是科学史中经过最准确检验的和最成功的理论

在量子论诞生100周年之际，物理学界的主流认为：“量子理论是科学史中经过最准确检验的和最成功的理论”^[4]。量子力学理论在诠释微观领域(原子与分子结构，原子核结构，粒子物理等)，进行物质的基本属性(导电性、导热性、磁性等)的研究以及天体物理和宇宙论中的众多宏



图4 1985年参加N.Bohr诞辰100周年纪念时，本文作者(左)和另一位访问学者与A.Bohr(中)的合照，A.Bohr是N.Bohr的儿子，由于在原子核结构理论的杰出贡献，A.Bohr获得Nobel物理学奖

观现象的研究,都取得了令人惊叹的成果。但由于量子力学的基本原理和概念与人们日常生活经验是如此格格不入,人们对它的疑虑和困惑长期存在。J. A. Wheeler 把量子力学原理比作“Merlin principle”^[5](Merlin 是传说中的魔术师,他可以随追逐者而不断变化,让追逐者感到震惊)。回忆量子理论的一百多年的进展历史,真是光怪陆离。忽而柳暗花明,忽而又迷雾重重。N. Bohr 曾经说过:“对量子力学未曾感到困惑的人,还没有理解量子力学(Anyone who was not shocked by quantum theory has not understood it.)”。R. P. Feynman^[6]也说过:“我可以负责任地说,至今还没有人理解量子力学(I think I can safely say that nobody today understands quantum mechanics.)”

20世纪伊始,Planck和Einstein以及Bohr的辐射(光)和实物粒子的能量的量子化所展示的离散性(discreteness)与经典物理量的连续性(continuity)的概念格格不入。1927年,Heisenberg^[7]的不确定性原理(uncertainty principle)动摇了经典力学中用相空间(正则坐标和正则动量空间)描述粒子运动状态的概念。1935年,在Einstein等人发表的“EPR佯谬”文章中^[8],对量子力学正统理论的完备性提出质疑(主要涉及波函数的几率诠释和量子态的叠加原理所展示的“非局域性”(non-locality))。同年稍早,Schrodinger猫态佯谬^[9]提出的“纠缠”(entanglement),对量子力学正统理论是否适用于宏观世界提出质疑。在尔后长达几十年的时空中,EPR佯谬与Schrodinger猫态佯谬一直成为人们争论的课题。但迄今所有实验观测都与基于局域实在论(local realism)而建立起来Bell不等式(CHSH不等式)相矛盾,而与量子力学的预期一致^[10]。量子非局域性在R. P. Feynman提出的“路径积分”(path-integral)理论中,特别是在AB(Aharonov-Bohm)效应中,表现得特别明显^[5]。例如,电子经过一个无磁通的空间中的轨迹,依赖于此空间以外的磁场。此外,迄今人们所知的所有基本相互作用,与AB效应一样,都具有

规范不变性。

尽管量子力学理论的所有预期(predictions)已为迄今所有实验观测所证实,人们对其实用性已经没有什么怀疑。但仍然有人对量子力学理论的正统理论(Copenhagen诠释)提出非议,认为它是“来自北方的迷雾”(the fog from the north)^[11]。特别是对于电子的双缝干涉实验的诠释,Feynman^[12]认为是“量子力学中核心的问题”。在此干涉实验中,人们不知道电子是经过哪一条缝而到达干涉屏上的。而一旦人们能确定电子是经过哪一条缝(例如紧靠一条缝放置一个适当的测量电子位置的仪器),干涉条纹就立刻消失。Copenhagen诠释认为:这是由于测量仪器的不可避免的测量干扰(“unavoidable measurement disturbance”)所致。近期Dürr等人^[13]在原子干涉仪上做了一个“测定路径的实验”(which-way experiment),即用一束冷原子对于光驻波(standing waves of light)的衍射,可以观测到对比度很高的衍射花样。在此实验中未用到双缝,也不必测定原子的位置,而是用原子的内部态来标记原子束的不同的路径。此时,衍射花样立即消失。在此实验中,测定路径的实验装置的反作用太小(与说明衍射花样的条纹间距相比,小4个量级),不足以说明衍射花纹。他们认为,不必借助于测量仪器的不可控制的干扰来说明此现象。他们提出另一种看法:即利用测定路径装置与原子运动的关联,即用“纠缠”(entanglement)来说明。P. Knight^[14]指出:“纠缠是量子力学的一个奇特但很基本的特性。每一个量子力学实体并无完全确定的态,而是代之以与其他实体的集体关联的(纠缠)态,只有整体的叠加态才携带信息。纠缠概念可用于描述一组粒子,也可用于描述单个粒子的两个或多个性质”。

3 如何理解量子力学教材中有关不确定度关系的表述

近期,在文献中有不少涉及不确定度关系的

评论。在量子力学教材中, 不确定度关系(uncertainty relation)通常表述如下: 对于任意两个可观测量 A 和 B ,

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad (1)$$

式中 $[A, B] \equiv (AB - BA)$, $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$ 与 $\Delta B = \sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}$ 是标准偏差, $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ 与 $\langle B \rangle = \langle \psi | B | \psi \rangle$ 分别是可观测量 A 和 B 在量子态 $|\psi\rangle$ 下的平均值。不确定度关系(1)式首先是由 Robertson^[15], Kennard^[16] 和 Weyl^[17] 等人分别给出。它表明, 在给定的量子态 $|\psi\rangle$ 下, 两个可观测量 A 和 B 的同时测量值的不确定度的乘积要受到的限制, 这是基于可观测量 A 和 B 的不对易性以及波函数的统计诠释而得出的。上述不确定度关系是给定的量子态 $|\psi\rangle$ 所固有的, 这已经为众多实验所证实^[18]。Schrödinger 很早还指出^[19], 与不确定度关系(1)式的平方相应的表示式的右侧, 还应加上一项正定的协变项, 即

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{2} \langle \psi | (AB - BA) | \psi \rangle^2 + \frac{1}{4} [\langle \psi | (AB + BA) | \psi \rangle - 4 \langle \psi | A | \psi \rangle \langle \psi | B | \psi \rangle]^2. \quad (2)$$

在一般情况下, 不确定度关系式(1)给出的 $(\Delta A)^2 (\Delta B)^2$ 小于 Schrödinger 给出的(2)式。

应该指出, Heisenberg^[7] 原来给出的是测量误差—干扰关系

$$\varepsilon(A) \eta(B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad (3)$$

其中 $\varepsilon(A)$ 是被观测量 A 的测量误差, $\eta(B)$ 反映被观测量 B 受到的测量仪器的干扰(包括反冲等)。我国老一辈物理学家王竹溪先生把 Heisenberg 原来讨论过的关系译为测不准关系是很有根据的。实际上, 文献[20]早已指出, (3)式在形式上不完全正确。仔细一点即可看出, (3)式对于被观测的力学量 A 与 B 的对换是不对称的。后来, Ozawa 证明^[21], (3)式应该修订为

$$\varepsilon(A) \eta(B) + \varepsilon(A) \Delta B + \eta(B) \Delta A \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad (4)$$

它对于被观测的力学量 A 与 B 的对换是对称的。最近, 文献[22, 23]给出了 Ozawa 的测量误差—干扰关系(4)式的实验验证⁴⁾。由此, 引发了涉及不确定度关系的很多讨论。

我们认为, 应该把测量误差—干扰关系(测不准关系)与不确定度关系区分开来, 不要混为一谈。更不可把测量误差—干扰关系与不确定度原理混为一谈。测量误差—干扰关系的修订, 不会动摇 Heisenberg 不确定性原理的普适性和量子力学理论的基础。

在经典力学中, 一个粒子在同一时刻的坐标和动量在原则上可以任意精确地确定, 粒子的运动状态可用相空间(正则坐标与正则动量空间)中的一个点来描述。对于给定 Hamilton 量的体系, 其运动状态随时间的演化, 由它在相空间初始位置和正则方程完全确定, 这就是经典力学中的 Laplace 决定论(determinism)。

在量子力学中, 一个粒子的同一个方向的坐标和动量是不对易的(正比于普适常数 \hbar), 粒子的坐标和动量在原则上就不能同时确定, 这就是 Heisenberg 不确定性原理的主要含义。表现在量子态只能用 Hilbert 空间中的一个矢量来描述。1927年, Heisenberg 不确定性原理的提出, 是科学史中的一个重大成就。Heisenberg 不确定性原理展现出量子力学中的非决定性(indeterminacy)与经典力学中的决定论(determinism)所形成的截然反差, 它标志量子力学理论与经典力学理论的本质的差异。

4 量子纠缠的确切含义与量子纠缠的 CSCO 判据

现今人们已经普遍认同, 1935年 Schrödinger 提出的纠缠^[8], 是量子力学的一个非常基本但又很奇特的概念^[14]。我们惊奇地发现, 在如此长时期内, Heisenberg 的不确定性(uncertainty)与 Schrödinger 的纠缠(entanglement)两个概念之间的

4) 近期, 有人对于 Ozawa 的测量误差—干扰关系(4)提出质疑。参见 I. Cowen R. *Nature*, 2013, 498: 419; B. Busch P, Lahiri P, Werner RF, <http://arxiv.org/abs/1306.1565>(2013)。

密切关系，并未引起人们的广泛注意^[24]。关键点是要弄清量子纠缠的确切含义。

纠缠的一种流行的看法是：“与波动-粒子二象性属于单粒子性质相反，量子纠缠至少涉及两个粒子”^[25]。另一种看法是：“纠缠并不一定涉及两个粒子，而只涉及(至少)两个彼此对易的可观测量(observables)”。这一点在 P. Knight 的文献[14]中已提及。在 V. Vedral 的文献[26]中更明确提到：“纠缠的确切含义是什么？不管怎样，纠缠涉及把(至少)两个东西纠缠起来，尽管这两个东西不一定是两个粒子。为了研究纠缠，要确定两个或多个子体系，以及可能被纠缠的自由度。在技术上，这些子体系被称为模式(mode)。更形式地说，纠缠是涉及不同模式的可观测量的关联，这种关联度超过经典物理学规律所允许的任何关联。”

只涉及两个彼此对易的可观测量的纠缠态的实验制备已经在很多实验室中完成。例如，在 Dürr 等^[13]的实验中，制备了一个原子的动量与它的内部电子态的纠缠态。在 C. Monroe 等^[27]实验中，实现了在 Paul 阱中的一个 ${}^9\text{Be}^+$ 离子的内部态(电子激发态)与其质心运动(即离子的空间运动)的纠缠态。在文献[28]中，分析了一个自旋为 $\hbar/2$ 的粒子的自旋与其路径的纠缠态。

从量子力学理论上来看，一般而言，量子纠缠涉及至少两个可对易可观测量。这两个可观测量，既可属于同一个粒子，也可属于两个粒子。但为确切起见，谈及一个纠缠态时，必须指明它是什么样的两个(或多个)对易的可观测量的同时测量值之间的关联^[24]。例如，对易的两个可观测量 A 和 B 的纠缠态，有如下两个特点^[29]：

(1) 测量之前， A 和 B 都不具有确定的值(即不是 A 和 B 的共同本征态)。

(2) A 和 B 的同时测量值之间有确切的关联(几率性的)。

我们注意到，不确定性原理主要强调：两个彼此不对易的可观测量(non-commuting observables)一般是不能同时测定的(满足 $\langle \psi | C | \psi \rangle = 0$ 的

特殊的量子态 $|\psi\rangle$ 除外)。如果两个可观测量属于不同的自由度，则彼此一定是对易的，因而原则上可以同时测定，不涉及不确定性原理。纠缠则是涉及两个或多个彼此对易的可观测量的同时测量值之间的关联。这两个(或多个)彼此对易的可观测量，既可以属于同一个自由度，也可以属于不同自由度。所以，量子纠缠与 Heisenberg 的不确定性原理应该有很密切的关系。

对于一个给定的量子态的纠缠问题，已经有很多的理论工作，但问题并未得到很好解决。我们给出下列试探性的纠缠态的判据^[30]。为此，我们要讨论多自由度或多粒子体系。一个多自由度或多粒子体系的量子态，需要用一组可对易的可观测量完全集(a complete set of commuting observables, CSCO)的共同本征态来完全确定^[31]，而一组可对易的可观测量原则上是可以同时测定的。在实验上，相当于进行一组完备可观测量的测量，用以完全确定体系的一个量子态。

设 (A_1, A_2, \dots) 构成体系的一组 CSCO， (A_1, A_2, \dots) 的共同本征态记为 $\{|A'_1, A'_2, \dots\rangle\}$ 。同样，设 (B_1, B_2, \dots) 构成体系的另一组 CSCO，其共同本征态记为 $\{|B'_1, B'_2, \dots\rangle\}$ 。定义厄米对易式矩阵 $C = C^\dagger$ ，其矩阵元素为 $C_{\alpha\beta} \equiv i[B_\beta, A_\alpha]$ ，用以描述 (A_1, A_2, \dots) 中的任何一个可观测量与 (B_1, B_2, \dots) 中任何一个可观测量的对易关系。考虑到不确定度关系的普遍性， A_α 与 B_β 的同时测量的不确定度也应满足如下不确定度关系：

$$\Delta A_\alpha \Delta B_\beta \geq \frac{1}{2} |[A_\alpha, B_\beta]| = \frac{1}{2} |C_{\alpha\beta}|. \quad (5)$$

下面我们考虑，在 (A_1, A_2, \dots) 的共同本征态下，彼此对易的各可观测量 (B_1, B_2, \dots) 的同时测量值之间的关联。以下我们给出如下纠缠的 CSCO 判据：(证明从略)

条件(1) 设矩阵 C 的每一行 $i (i = 1, 2, \dots)$ 至少有一个矩阵元素 C_{ij} 不为零，即每一行 i 的所有元素 $C_{ij} (j = 1, 2, \dots)$ 不完全为零。

条件(2) 对于所有 $\{|\psi\rangle = |A'_1, A'_2, \dots\rangle\}$ ， $\langle \psi | C | \psi \rangle$ 不完全为 0。

如以上两个条件都满足,则在量子态 $\{|\psi\rangle=|A'_1, A'_2, \dots\rangle\}$ 态下,对 (B_1, B_2, \dots) 进行完备测量时,它们的的同时测量值是彼此关联的(几率性),即 $\{|\psi\rangle=|A'_1, A'_2, \dots\rangle\}$ 是 (B_1, B_2, \dots) 的纠缠态。如果只有条件(1)满足,而条件(2)不满足,则不能判定所有量子态 $\{|\psi\rangle=|A'_1, A'_2, \dots\rangle\}$ 都是或都不是 (B_1, B_2, \dots) 的纠缠态。

可以看出,上述量子纠缠的 CSCO 判据是不确定性原理在多粒子体系或多自由度情况下的推广。读者不难从一些常见的纠缠态来进行验证。例如, Einstein 等人发表的有关“EPR 佯谬”一文^[8]中所涉及的 2 粒子(无自旋)纠缠态, 2 量子比特的纠缠态(Bell 基), $N(\geq 3)$ 量子比特的纠缠态(GHZ 态), 单个电子的总角动量(j^2, j_z)的共同本征态($j = l + s$, l 是轨道角动量, s 是自旋), (S^2, S_z)的共同本征态($S = s_1 + s_2$ 是两个电子自旋之和)等。

5 量子力学与广义相对论的协调

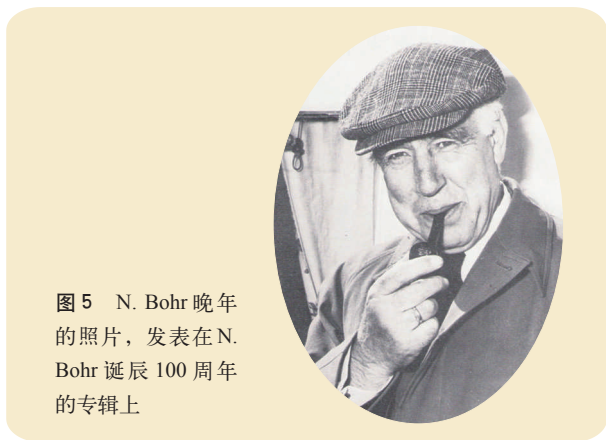


图 5 N. Bohr 晚年的照片,发表在 N. Bohr 诞辰 100 周年的专辑上

在纪念量子论诞生 100 周年之际, G. Amelino-Camelia^[32]提及:量子理论与相对论是 20 世纪物理学的最成功的两个理论。广义相对论是一个纯经典的理论,它描述的空间-时间的几何是连续和光滑的,而量子力学描述的物理量一般是分立的。这两个理论是不相容的,但都在各自的不同的领域取得巨大成功(“大爆炸”现象除外)。量子力学成功地说明了微观世界以及一定

条件下的一些宏观现象的规律,而广义相对论成功说明了宇观领域的一些现象。把相对论与量子理论协调起来,是人们必须克服的一个巨大障碍,而在解决两者冲突的过程中可能诞生新的物理学规律。

关于纠缠和非局域关联, N. Gisin^[33]说:“在现代量子物理学中,纠缠是根本的,而空间是无紧要的,至少在量子信息论中是如此,空间并不占据一个中心位置,而时间只不过是标记分立的时钟参量。而在相对论中,空间-时间是基本的,谈不上非局域关联。”

涉及纠缠和非局域关联的近期工作,应提及 Schrödinger 的操控(steering)概念^[34]以及信息因果性(information causality)^[35]。操控是一种新的量子非局域性形式,介于纠缠与非局域性之间。而信息因果性作为一个原理,对于能进行传递的信息总量给出了一个限制。特别应该提到 J. Oppenheim 和 S. Wehner 的有关不确定性原理与非局域性的密切关系的工作(见文献[36])。他们在文献[36]中提到:量子力学的两个核心概念是 Heisenberg 不确定性原理与 Einstein 称之为“离奇的超距作用”的一种奇妙的非局域性(non-locality)。迄今,这两个基本特性被视为不同的概念。我们指出,两者无法分割,并定量地联系在一起。量子力学的非局域性不能超越不确定性原理的限制。事实上,对于所有物理理论,不确定性与非局域性的联系都存在。应特别指出的是,任何理论中的非局域度(degree of nonlocality)由两个因素决定:不确定性原理的力度和操控的力度,后者决定在某一个地点制备出来的量子态中,哪些量子态可以在另一个地点被制备出来。

与任何一个自然科学理论一样,量子力学是在不断发展中的一门学科,而且充满争议。从更积极的角度来看待过去长时期有关量子力学理论的争论, C. Teche^[37]说:“往日所谓的佯谬,正在发展为未来的技术”。的确,在过去的 20 多年中,量子信息理论和技术,量子态工程,纳米材料学科等领域都有了长足的进展。在 20 世纪即

将结束之际, P. Davis 写道^[6]: “19 世纪被人们称为机械时代(machine age), 即将过去的 20 世纪将是信息时代(information age), 我相信 21 世纪将是量子时代(quantum age).” 对此, 有人持不同看法, 认为 21 世纪将是生物学的世纪。作者认为, 这两种说法都有一定道理。不同学科领域的进展是互相影响和互相渗透的。显然, 如果没有物理

学的进展(例如, 光谱学、显微镜、X 射线与核磁共振等技术), 现代生物学和医学的进展就难以理解。物理学研究的是自然界最基本的但相对说来又是比较简单的规律。生物学与医学的规律要复杂得多, 它的发展与化学和物理学等更基础的学科的进展密切相关。可以期望, 在 21 世纪, 这些领域都会有出乎我们意料之外的进展。

参考文献

- [1] N. Bohr. *Philosophical Magazine*, 1913, 26: 1—25; 471—502; 857—875
- [2] Robertson 著, 杨福家, 卓益忠, 曾谨言译, 玻尔研究所的早年岁月(1921—1930). 北京: 科学出版社, 1985
- [3] 见《诗经——小雅, 鹤鸣》一书
- [4] Kleppner D, Jackiw R. *Science*, 2000, 289: 893; Zeilinger A. *Nature*, 2000, 408: 639; Tegmark M, Wheeler J A. *Scientific American*, 2001, 284: 68
- [5] Popescu S, Rohrlich D. *Foundations of Physics*, 1994, 24: 379
- [6] Hey T, Walters P 著. 雷奕安译, 新量子世界. 长沙: 湖南科技出版社, 2005
- [7] Heisenberg W. *Zeit. Physik*, 1927, 43: 172
- [8] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. *Phys. Rev.*, 1935, 47: 777
- [9] Schrödinger E. *Naturwissenschaften*, 1935, 23: 807
- [10] Aspect A. *Nature*, 1999, 398: 189; Gröblacher S *et al.* *Nature*, 2007, 446: 871
- [11] Schlosshauer M. *Nature*, 2008, 453: 39
- [12] Feynman R P *et al.* *The Feynman Lectures of Physics* (vol. 3): *Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1965
- [13] Dürr S, Nonn T, Rempe G. *Nature*, 1998, 395: 33
- [14] Knight P. *Nature*, 1998, 395: 12
- [15] Robertson H P. *Phys. Rev.*, 1929, 34: 163
- [16] Kennard E H. *Zeit. Physik.*, 1927, 44: 326
- [17] Weyl H. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Hirzel, Leipzig, 1928
- [18] Nairz O, Arndt M, Zeilinger A. *Phys. Rev. A*, 2002, 65: 032109
- 以及所引文献
- [19] Schrödinger E. *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, 1930, 14: 296
- [20] Ballentine L E. *Rev. Mod. Phys.*, 1970, 42: 358
- [21] Ozawa M. *Phys. Rev. A*, 2003, 67: 042105; *Phys. Lett. A*, 2004, 320: 367
- [22] Erhart J, Sponar S, Sulyok G *et al.* *Nature Physics*, 2012, 8: 185
- [23] Rozema L A, Darabi A, Mahler D H *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 109: 100404
- [24] Ruan M Q, Zeng J Y. *Chin. Phys. Lett.*, 2003, 20: 1420
- [25] Aspect A. *Nature*, 2007, 446: 866
- [26] Vedral V. *Nature*, 2008, 453: 1004
- [27] Monroe C, Meekhof D M, King B E *et al.* *Science*, 1996, 272: 1131
- [28] Pranmanik T *et al.*, *Phys. Lett. A*, 2010, 374: 1121
- [29] Mair A, Vaziri A, Weith G *et al.* *Nature*, 2001, 412: 313
- [30] Zeng J Y, Lei Y A, Pei S Y *et al.* <http://arXiv.org/abs/1306.3325>
- [31] Dirac P A M. *The Principles of Quantum Mechanics*. 4th ed. Oxford: Oxford University Press, 1958
- [32] Amelino-Camelia G. *Nature*, 2000, 408: 661; 2007, 448: 257
- [33] Gisin N. *Science*, 2009, 326: 1357
- [34] Brunner N. *Science*, 2010, 326: 842 以及所引文献
- [35] Pantowski M *et al.* *Nature*, 2003, 466: 1101; Popescu S, Rohrlich D. *Foundations of Physics*, 1994, 24: 379
- [36] Oppenheim J, Wehner S. *Science*, 2010, 330: 1072
- [37] Teche C. *Science*, 2001, 290: 20