

麦克斯韦妖与信息处理的物理极限*

孙昌璞^{1,†} 全海涛^{2,††}

(1 中国工程物理研究院北京计算科学研究中心 北京 100084)

(2 北京大学物理学院 北京 100871)

2013-09-16收到

† email: cpsun@csrc.ac.cn

†† email: htquan@pku.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20131101

Maxwell's demon and the physical limits on information processing

SUN Chang-Pu^{1,†} QUAN Hai-Tao^{2,††}

(1 Beijing Computational Science Research Center, Chinese Academy of Engineering Physics, Beijing 100084, China)

(2 School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

摘要 文章系统地评述了麦克斯韦妖佯谬相关的热力学基本观念的发端、历史沿革以及当前正在发展的科学前沿问题。文章作者从以下两个方面详细地阐述了为什么信息处理过程本质上是一个与麦克斯韦妖观念相“纠缠”的物理过程：(1)信息认知和提取可以辅助物理系统更有效地做功；(2)物理定律会对信息处理过程施加一个不可逾越的物理极限。这些分析与概念的澄清将有助于正确理解计算过程和热力学之间的关系。

关键词 麦克斯韦妖, 信息处理, 热力学熵, 兰道尔原理

Abstract We review the origin and historical evolution of the fundamental concepts regarding Maxwell's demon as well as the latest developments at the frontiers of scientific research derived from the paradox. It is demonstrated from two complementary aspects that information processing is a process that is in essence “entangled” with the concept of Maxwell's demon: (1) A physical system can work more efficiently by acquiring information, and (2) physical laws impose an ultimate limit on the energy dissipation during information processing. Our analysis and clarification of these concepts should promote our understanding of the intrinsic relation between computation processes and the theory of thermodynamics.

Keywords Maxwell's demon, information processing, thermodynamic entropy, Landauer's principle

1 引言

众所周知, 热力学的许多原理通常表述为能量从一种形式转化为另一种形式的不可能性。例如, 热力学第二定律的开尔文表述是: 通过一个热力学循环, 不可能从一个单一热源提取能量做功, 而不对外界产生影响^[1, 2]。在与日常生活相关

的经典、宏观领域, 这个定律得到迄今为止所有实验的支持, 业已成为一个常识性的真理。但是, 怎样从微观角度理解热力学第二定律却经常是莫衷一是, 众说纷纭, 甚至会导致一些违反这一常识性真理的永动机设想的生产。特别是将它应用到计算科学领域时, 其间的一些说辞更是有

* 国家自然科学基金(批准号: 11121403, 11375012)、国家重点基础研究发展计划(批准号: 2012CB922104)资助项目; 青年千人计划项目

失严谨，例如，改进材料性能可以使计算机不消耗能量不散热。要回答计算过程原理上是否需要消耗能量，就必须了解当代与麦克斯韦妖(Maxwell's demon)佯谬相关的热力学科学前沿的发展。

麦克斯韦妖是理想实验中的智慧精灵^[3]。在麦克斯韦假想实验中，它可以区分容器中每个分子的速度，并据此打开和关闭容器中间隔板上的阀门，使得原本温度均匀分布的气体分子最终按高、低两种速度分别分布于隔板的两边，从而在隔板两边形成温度差(见图1)。置于它们之间的热机随后就会通过完成热力学循环对外做功。在这个过程中，外界没有对妖怪做功，妖怪和系统也没有发生能量交换。乍一看，麦克斯韦妖的存在使得热量从低温热库流向高温热库，而没有产生任何其他后果。因此，表面上看，热力学第二定律(克劳修斯表述)可以被违反，第二类永动机就有可能出现。

然而当代研究表明，这种违反热力学第二定律的结论只是一个佯谬。麦克斯韦妖必须作为热机工作物质的一部分参与热力学循环。在上述描述中，存贮于麦克斯韦妖记忆体(存储单元)中关于气体分子速度的信息没有被擦除，热力学循环本质上并没有完成。根据兰道尔(R. Landauer)原理^[4]，擦除一个比特信息在平衡态时至少要消耗能量 $kT\ln 2 \sim 10^{-21}\text{J}$ (这里 k 是玻尔兹曼常数， T 是环境温度)。这是因为每擦除1 bit信息，环境中的熵将增加 $k\ln 2$ 。这里的熵增最终会补偿前面的热流引起的熵减少^[5, 6]。因此，即使自然界存在无所谓的麦克斯韦妖，也绝不会存在第二类永动机。由于现有的普适的计算过程必然包括擦除信息的初始化过程，这就意味着必然要消耗一定的能量。兰道尔原理本质上也预言了现有计算过程能量消耗一定存在下界约束。在现有的计算框架下，无论怎样改进器件的物理性能，都不能破坏这个下界。这是热力学第二定律的要求。在过去的五十年中，这个预言激发人们去不断探索超越现有计算技术物理极限的可能性，从而导致了可逆计算^[7-9]和量子计算^[10]等前沿科学领域的兴起。

本文结合当代热力学发展的前沿科学问题，

从麦克斯韦(J. C. Maxwell)最早提出的热力学佯谬谈起，并论及希拉德(L. Szilard)利用单分子热机模型对此热力学佯谬进行的精确表述，然后给出兰道尔原理一个直观的证明，以演示信息擦除为什么必定要耗功并产生热，使得热力学对计算过程施加一个物理极限。我们还以单分子热机为例，阐述贝奈特(C. H. Bennett)是怎样从可逆计算的研究受到启发，利用兰道尔信息擦除原理解决麦克斯韦佯谬的。最后，我们还指出，正是这些探索，促使了人们开始量子信息和量子计算的研究。

2 麦克斯韦妖假想实验挑战热力学第二定律

1871年，麦克斯韦在他出版的《热理论》(*Theory of Heat*)一书的一章中，讨论了热力学第二定律的局限性。他设想有一个充满气体、温度均匀的容器(如图1)，容器中间有一个隔板，把容器分成A和B两个区域，隔板上有一个阀门。另外，有一个今天被称为麦克斯韦妖(Maxwell's demon)的想象中的精灵，它能够观察气体中每个分子的速度，并能够自由地打开和关闭这个阀门。我们可以假设，在理想情况下，打开和关闭阀门都不做功。所以，它可以让较快的分子从A到B，而让较慢的分子从B到A。经过足够长的时间以后，容器中的A区温度变低，而B区温度变高。从而使处于A和B之间热机可以利用两边温度差对外做功。把麦克斯韦妖和热机集成为一个整体，似乎形成了一个违反第二定律的永动机

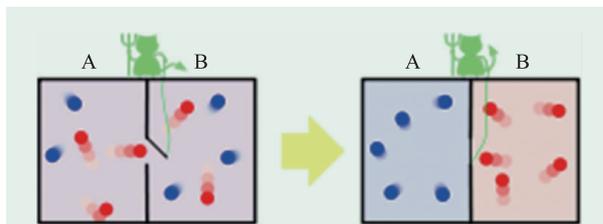


图1 麦克斯韦妖示意图(取自维基百科网站)。其中绿色图标代表麦克斯韦妖，蓝色和红色分别代表低速和高速运动的分子。由于妖怪的干预，开始均匀分布的气体分子最后被分割开来。快速(高温)的分子全部到右边，慢速(低温)的分子全部到左边

——第二类永动机，实现了从单一热源吸热做功。

麦克斯韦由此认为，如果存在这种智慧精灵，那么热力学第二定律有可能被违反。麦克斯韦本来是想通过这个假想实验说明热力学第二定律是一个统计性的原理，它有一定的概率因为涨落现象被违反。不过这种可能性随着系统的自由度数量(如气体中分子数)增加而急剧减少。麦克斯韦的这个假想实验后来吸引了很多物理学家的注意，他们认为这个假想实验还有很多地方并没有被理解清楚^[3, 11]。比如，有人认为，即使存在这个智慧精灵(开尔文(W. Thomson)在1874年第一次将它命名为麦克斯韦妖)，热力学第二定律仍然不会被违反，但是并不能进一步说明为什么不被违反；还有人关心如果麦克斯韦妖能够导致热力学第二定律被违反，那么整个热力学理论体系是否都要改写。

在众多的早期对麦克斯韦妖模型有兴趣的物理学家中，布朗运动理论研究的先驱者之一，波兰物理学家斯莫卢霍夫斯基(M. Smoluchowski)就是其中很著名的一位。他认为，完全自动化的(没有智能的)模型才能够在物理实验中实现。因此他提问：能否构造一个完全机械的模型来取代麦克斯韦的智能模型？斯莫卢霍夫斯基希望没有智慧精灵的参与，但是同样能够利用分子运动的涨落，使一个体系的熵减少，从而构造出一个永动机。1912年斯莫卢霍夫斯基提出了一个“单向弹簧门”(trapped door)模型(见图2)^[12, 13]。这个模型和麦克斯韦最初的模型很相似。不同之处在于斯莫卢霍夫斯基的“单向弹簧门”模型中没有作为

外界控制者的智慧精灵。阀门由弹簧与挡板连接，并且阀门只能单向移动。当右边腔中的分子以很高的速度撞击阀门时，阀门被打开，从而使分子可以进入到左边腔中，但是当分子速度不够高时，它无法撞击开阀门，从而仍然呆在右边腔中。这个完全自动化的模型似乎也可以实现麦克斯韦开始设想的效果，把速度快和速度慢的分子区分开。但是斯莫卢霍夫斯基自己当时就认识到他的模型并不能实现麦克斯韦开始的设想。因为这个阀门足够小，在经历几次撞击之后，它的温度就会足够高。这样“单向弹簧门”开始做布朗运动，从而变成了“双向弹簧门”。气体分子既可以从左到右，又可以从右到左了。因此斯莫卢霍夫斯基当时就断言，不可能构建一个完全自动化的(机械的)模型来实现麦克斯韦的设想，但是如果有一个智慧精灵的参与(如同麦克斯韦设想的那样)，还是有可能构造出一个永动机的^[14]。顺便指出一下，在斯莫卢霍夫斯基的模型被提出近80年后，美国物理学家祖瑞克(W. H. Zurek)和合作者进行了数值模拟研究。他们的数值结果肯定了斯莫卢霍夫斯基在1912年的论断，即“单向弹簧门”模型不可能实现麦克斯韦设想的效果。他们的结果发表在1992年的《美国物理》杂志上^[15]。

无独有偶，还有另一个重要的自动化的模型。那就是1963年费曼(R. P. Feynman)在他的《费曼物理讲义》(卷一)^[16]中提出的“费曼棘齿和棘爪”(ratchet and pawl)模型(见图3)。这个模型由一个连杆连接着一个形状不对称的棘齿和棘爪，一个由绳子吊着重物，还有几个很大的叶片。其中叶片和棘齿棘爪系统分别处于两个温度不同的热库中，温度分别用 T_1 和 T_2 表示。当温度为 T_1 的热库中的快速运动的气体分子撞击叶片时，叶片会发生转动。连杆会同时带动棘齿转动。由弹簧连接的棘爪与棘齿相互咬合。需要指出的是，棘爪处于温度为 T_2 的热库中，它会在气体分子的碰撞下做布朗运动。从而使这个棘爪与棘齿时而咬合，时而松开。当棘爪与棘齿未咬合时，棘齿就不仅仅作顺时针运动，它有时也会做逆时针运动。由于棘齿的形状不对称，连杆向一个方

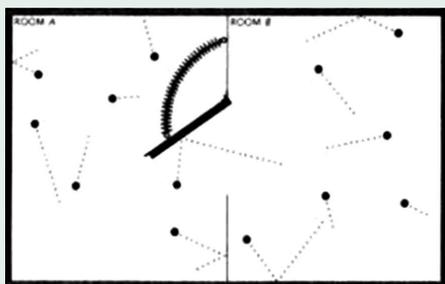


图2 斯莫卢霍夫斯基单向弹簧门模型(图片取自文献[6])。挡板上的“单向弹簧门”在分子撞击下时而开启，时而关闭。斯莫卢霍夫斯基设想由于挡板运动的“单向”性，分子只能从右边到左边，不能从左边到右边

向转动的概率会大于向另一个方向转动的概率，平均来看，连杆会向一个方向(棘齿斜率小的那边)作定向转动。

不同于斯莫卢霍夫斯基的“单向弹簧门”模型，这个模型可以利用气体分子的热涨落来实现对外做功或制冷(把热量从低温热库抽运到高温热库)的功能。至于到底它是对外做功还是制冷，依赖于两个热库的温度、重物的质量和棘爪尺寸等参数的选取。需要指出的是，对于费曼棘齿和棘爪模型，无论参数是选取在做功区间还是制冷区间，它都非常不同于一般的热机和制冷机模型。后者一般对应一些热力学循环(如卡诺循环、奥托循环)，而费曼棘齿和棘爪模型不对应于任何热力学循环，它工作时处于一个非平衡稳态。另外，费曼棘齿和棘爪必须依赖热涨落来工作，而一般的热机和制冷机不需要考虑工作物质的涨落。需要指出的是，如果两个热库的温度相同(即 $T_1 = T_2$)，费曼棘齿和棘爪模型也不能对外做功。因为此时棘爪做布朗运动，棘齿向两个方向运动的几率相同，不会导致定向运动。因此，虽然费曼棘齿和棘爪模型可以利用热涨落实现对外做功或制冷，但是它不能实现麦克斯韦设想那样的“永动机”，即在单一温度条件下($T_1 = T_2$)，实现对外做功^[18]。

3 信息的价值和获取信息的代价

有关麦克斯韦妖问题的研究在1929年出现了一个转折。著名的物理学家希拉德提出了一个简化版的麦克斯韦妖模型——希拉德单分子热机模型^[19]。在这个模型中，希拉德设想一个智慧精灵(麦克斯韦妖)操控一个单分子热机，其基本原理如图4(A)和图4(B)所示。开始时，一个气体分子在一个盒子中自由运动(如图4(A)的第一排和图4(B)中的(a)图所示)。若在中间插入一块挡板将盒子分成两个部分，则气体分子必然占据某一侧，如图4(A)的第二排所示。由于分子运动的随机性，我们在插入挡板的时候，并不确切知道这个分子是处于左侧还是右侧。在这个时候，麦克斯韦妖做了一次测量，通过测量，了解分子所处的

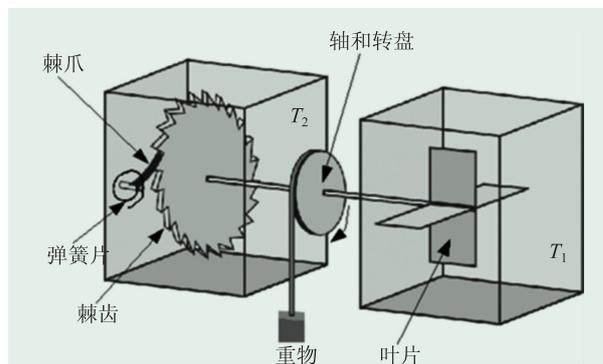


图3 费曼棘齿和棘爪模型(图片取自文献[17])。这个模型依赖分子运动的涨落工作。它既可以工作在热机区间(热流从 T_1 到 T_2 ，重物被举起)，也可以工作在制冷机区间(热流从 T_2 到 T_1 ，重物下降)，具体在哪个区间由模型的参数决定

位置到底是左边还是右边。如果测量的结果是分子处于挡板的右边(如图4(A)第二排左边和图4(B)中的(b)图所示)，则在挡板右边通过一根细绳连接一个重物(如图4(B)中的(c)图所示)。整个容器与一个热库接触足够长的时间，单个分子气体经历一个等温过程，通过从环境吸热而膨胀，同时提升重物做功(如图4(A)的第三排左边和图4(B)中的(c)图和(d)图所示)。如果测量的结果是分子处于挡板的左边，则在挡板左边通过一根细绳连接一个重物，通过同样的方式提升重物做功。这就是图4(A)第二排到第四排右边代表的过程。完成上述膨胀做功过程后，气体分子回到初始状态(如图4(A)的第五排和图4(B)中的(a)图所示)。这样一个循环完成，接下来进入下一个循环，完全重复上述过程。

在一个循环中，单分子气体等温膨胀，体积从 $V/2$ 扩张到 V ，推动活塞做功，提升重物。显然，抽出活塞，系统形式上完成了一个循环，其净效应是从单一热源提取热量对外做功。若整个过程足够缓慢(即准静态过程)，不难计算这个过程中气体分子做功为

$$W = \int_{V/2}^V P dV = \int_{V/2}^V \frac{kT}{V} dV = kT \ln 2,$$

这里 P 为压强， V 为体积， k 为玻尔兹曼常数， T 为外界温度。如果仅考虑这个单分子气体以及它的环境热库，而忽略麦克斯韦妖，希拉德单分子热机相当于一个永动机，它可以源源不断地从单

一热源吸热对外做功。或者说它不断让环境的热力学熵减少。不过希拉德不认为这个模型是一个永动机，他认为必然是因为某一过程(如测量过程)导致熵增。这个熵增足够补偿前面提到的熵减少。但是希拉德本人对于到底是哪个步骤有熵增以及熵增的机制有些含混不清^[6]。希拉德相信，因为这个原因，即使存在麦克斯韦妖，热力学第二定律也不会被违反。值得指出的是，早在信息科学诞生之前的1929年，希拉德就意识到与二进制有关的信息的概念，他还发明了我们今天称为“比特”的信息单位。另外，希拉德还认识到麦

克斯韦妖在获取信息过程中的另外两个重要概念：测量过程和存储单元。可以说希拉德先驱性的工作为现代信息科学奠定了基础，并且指出了它与物理学的联系。

1951年，另外一个著名的物理学家布里渊(L. Brillouin)更加具体地研究了获取信息(测量)过程的能量消耗及其导致的熵增。他希望把测量过程更加具体化，以此来证实测量过程导致熵增这种假设或猜测。同时还有盖博(D. Gabor)^[21]独立地进行了类似的研究。他们聚焦在麦克斯韦妖获取信息的过程中，而且他们都假设妖怪是通过光信号照射单个分子来对分子进行测量的。他们的结论是：获取信息的过程一定会有能量的耗散。因而，即使存在这样的妖怪，热力学第二定律也不会被违反^[22]。布里渊还声称，他发现了一个重要的物理定律：每次测量过程都伴随着一个熵增，而且存在一个熵增下限，如果低于这个下限，测量无法完成。

至此，人们一般认为，麦克斯韦在1871年提出的问题已获得解决。获取信息不是免费的。麦克斯韦妖必须为获取信息付出代价。这个代价将导致能量的消耗以及环境的熵增，并最终保证热力学第二定律不被违反。

4 有关信息擦除的兰道尔原理与贝奈特的解决方案

然而事实证明，布里渊等人并没有最终的解决有关麦克斯韦妖问题。我们现在暂时离开物理学，来看看另外一个领域——计算机科学领域发生的故事^[6]。大约在1960年，IBM公司的物理学家兰道尔开始研究数据处理的热力学问题。数据处理，比如从一个器件到另一个器件复制数据，与测量过程很类似，都是一个器件获得另一个器件的态的信息。在1950年代，人们都认为数据处理的过程是内禀不可逆的过程(热力学意义上的不可逆)。这和希拉德及布里渊所认为的测量过程是不可逆过程是一致的。因此当时人们普遍接受的观点是：任何一种数据操作都会导致一个不低于某下限的热量耗散。大约在1960年，兰道尔更仔细地分析了这

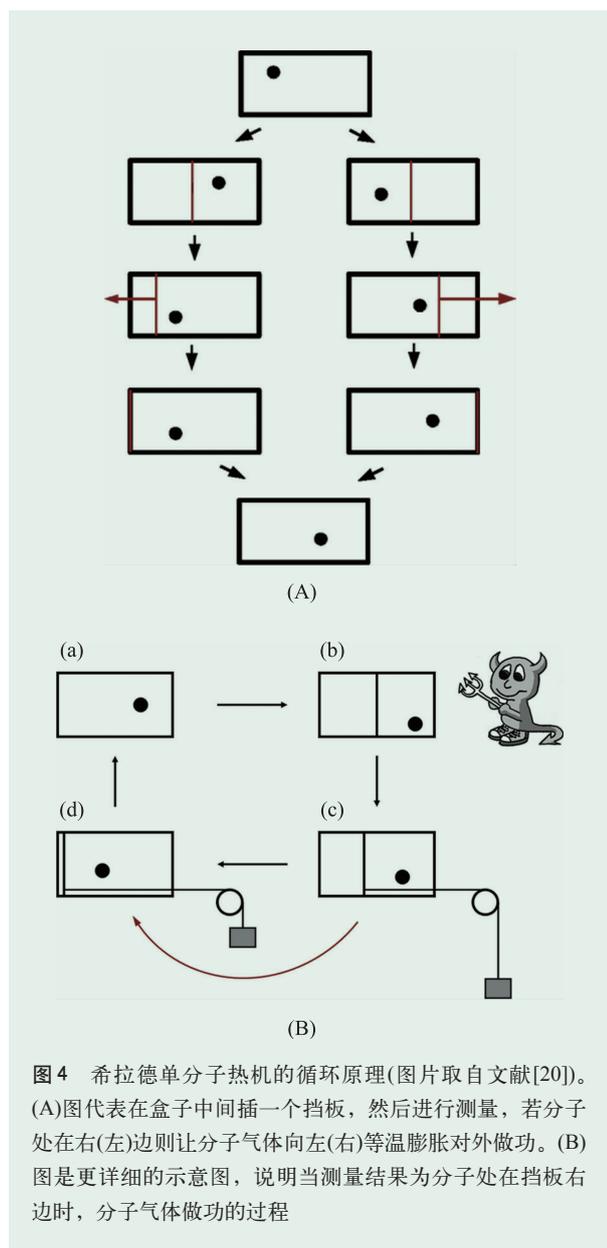


图4 希拉德单分子热机的循环原理(图片取自文献[20])。(A)图代表在盒子中间插一个挡板，然后进行测量，若分子处在右(左)边则让分子气体向左(右)等温膨胀对外做功。(B)图是更详细的示意图，说明当测量结果为分子处在挡板右边时，分子气体做功的过程

个问题，他却发现大家以前普遍接受的观点其实是有问题的。正确的结论是：完成几乎所有的信息处理过程，比如“读”、“写”和“复制”数据，原则上可以不消耗任何能量。但是另外一些数据操作过程，比如信息擦除过程，有一个能量耗散的下限，同时会导致热量耗散的下限^[4]。这个结论今天被称作兰道尔原理，其文字表述如下^[4]：“任何对于信息的逻辑上不可逆的操作，比如擦除1比特(bit)的信息或者合并两条计算路径，一定伴随着信息载体以外的系统的相应的熵增。”

擦除存储单元的信息是一个热力学不可逆的操作。兰道尔还确认了其他几种热力学不可逆的操作，所有这些热力学不可逆的操作都有一个共同点，那就是“丢掉计算机过去的状态的信息”。用兰道尔本人的话说，这些操作是“逻辑上不可逆”的。信息擦除的过程就是从一个现有的态K(这个态是任意的)到一个标准态L(如全部为0的态)，是一个逻辑不可逆的过程。逻辑不可逆是指从K到L的映射没有一个唯一的逆映射，即“输出态不能够唯一确定输入态”。兰道尔认为，任何一个逻辑态都对应一个物理态。逻辑不可逆的过程对应着物理态自由度减少的过程，必然导致能量耗散^[6]。兰道尔原理预言了擦除1 bit信息所需要耗费的最少的能量为 $kT\ln 2$ 。这里 k 是玻尔兹曼常数(约 1.38×10^{-23} J/K)， T 是环境温度(约27 °C或300 K)， $\ln 2$ 是2的自然对数。用 $kT\ln 2 \sim 10^{-21}$ J的功擦除1 bit的信息，同时导致同样多的热量被释放到环境中。

这个关于逻辑不可逆操作的能量耗散下限最早是冯·诺依曼(Von Neumann)提出来的^[23]，但是严格的论证是由兰道尔给出的。兰道尔用双势阱中的一个粒子处于左边和右边势阱分别代表0和1。中间的势垒远超过 kT 。这样热涨落不会使系统在0和1之间发生跳跃。擦除信息的过程就是，通过使势阱变形，让开始处于任意一边的粒子都演化到某一边，如左边(0态)。兰道尔比较信息擦除过程

中的散热量与擦除的信息量，就得到了兰道尔原理。兰道尔在证明他的定理时用到了热力学第二定律。兰道尔认为，擦除信息的过程导致环境熵增。另外，英国物理学家彭罗斯(O. Penrose)也在1970年独立于兰道尔提出了类似的原理^[24]。这里顺便指出，这个原理在它被提出半个多世纪后的2012年才最终被欧洲科学家从实验上验证^[25]。

前面提到，在研究麦克斯韦妖问题时，布里渊认为测量的过程会导致 kT 量级的能量损耗。兰道尔认为“计算过程与测量过程有密切联系”，而且他认为，布里渊的分析中提到测量过程，却没有能够很好定义测量过程。兰道尔还认为，布里渊没有回答下面这个重要的问题：当系统A和系统B耦合在一起时，测量是在何时发生的？事实上两个物理系统耦合在一起，并不一定导致耗散。

1982年，兰道尔在IBM的同事贝奈特明确指出，测量并获得信息的过程原则上是逻辑可逆的过程，可以做到不消耗能量，也不导致熵增^[5, 6, 1]。由此他很自然地得到：即使存在麦克斯韦妖，热力学第二定律也不会被违反。关键在于麦克斯韦妖信息存储单元中信息擦除的过程，而不是布里渊等人认为的测量过程。相反，信息擦除的过程一定是逻辑不可逆的过程，它总是伴随着一个最低的能量消耗和一个最小的熵增。这个能量消耗的下限或熵增的下限是兰道尔原理给出的。它保证了即使存在麦克斯韦妖这种智慧精灵，热力学第二定律也不会被违反。贝奈特证明的一个关键点是，认识到用光信号来做测量手段不是必须的。虽然布里渊证明了如果妖怪用光信号来获取信息，测量过程的能量耗散足以保证热力学第二定律不被违反。贝奈特发现用光信号来测量(获取信息)不是必须的。若用别的手段来做测量，测量过程原则上可以不导致能量耗散。他给出的一个例子是通过分子磁矩(而不是布里渊用的光信号)来进行测量^[5]，所耗散的能量原则上可以无穷小。

1) 兰道尔在他的1961年发表的文章中，提到测量过程与数据操作过程的关系，因而也隐含测量过程可以不消耗能量，但是没有明确表述出来。1970年代，MIT的弗里德金(E. Fredkin)和贝奈特在研究可逆计算的模型时也认识到测量过程与数据操作过程的关系，因而也隐含测量过程可以不消耗能量，但是同样没有明确表述出来。

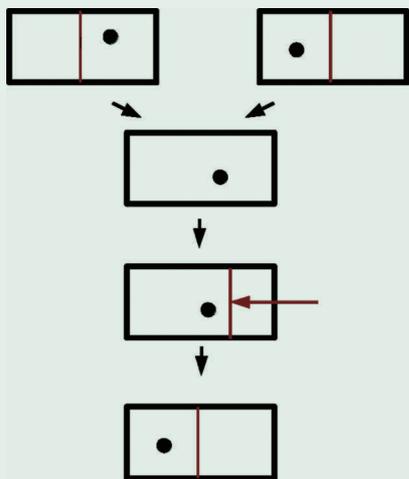


图5 信息擦除的物理过程(其基本思想是:无论分子开始处于左还是右(0或1态),抽出中间挡板,然后从右边开始等温压缩气体分子,直到挡板到达活塞中间。这样分子必然到左边(0态),原来的信息被擦除。这个擦除过程的能耗为 $kT\ln 2$)

为了说明测量与观察等信息提取过程在上述麦克斯韦妖热机循环过程中的作用,我们首先说明什么是信息和信息的度量,以及为什么信息本质上是物理的。一般说来,一个物体所包含的信息是由其可能状态的多少来确定的。一个人事先并不知道物体处在 n 个状态中的哪一个状态上,只是知道每一个状态相应的几率为 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, 香农(C. E. Shannon)用

$$S = - \sum_{k=1}^n P_k \log_2 P_k$$

来刻画信息量^[26], 此 S 称为香农熵。例如,在希拉德模型中,气体分子开始以50%的几率分别处于A和B两个区域。一旦人们知道气体分子是处在两个态之中的哪一个态上,人们便获得了1 bit的信息。

基于以上关于信息及其度量的简单讨论,我们可以用图5描述一个信息擦除的物理过程。设一个气体分子可能处在左边或右边中任意一个,但是我们不知道到底是哪一个。我们事先不管分子是处在左边或右边,只要抽出中间挡板,并且把活塞从右向左一直推到中间,分子最后必然是处在左边。于是,体系的香农熵减少1 bit(即由 $S = 1$ bit变为0)。相应地,外界对系统做功为 $W = kT\ln 2$ 。

基于上述物理分析,我们看到擦除信息需要消耗功,我们可以重新描述麦克斯韦妖佯谬(见图6)。注意到麦克斯韦妖的作用是观察单分子的状态,然后把信息贮存在它的存储单元中,存储单元在物理上是一个二态系统。初始时系统处于A态,分子可以处于空间的任何一个位置,妖怪处于0态。妖怪进行一次测量(过程(a))后,整个系统达到B态。若分子处在挡板的右边,妖怪将其信息存储单元重置为R态;若分子处在挡板的左边,妖怪将其记忆存储单元重置为L态。过程(a)不花费能量。接下来的过程(b)是妖怪根据自己记录的信息控制分子气体。让它从热库吸热向外膨胀,同时对外做功,最后系统到达状态C。此时系统加妖怪的熵比以前增加了。如果前面的过程完全可逆,这个增加量正好等于热库熵的减少量。此时妖怪的信息存储单元中的信息未被擦除。为了麦克斯韦妖的初始化,在(c)过程中外界必须对其做功,最后擦除它的信息,回到初态A。不难看出,若计算这个可逆过程对外做功,净做功量为零。因此,没有第二类永动机存在。

在1982年贝奈特的工作之前,绝大多数的研究者都先验地接受布里渊的假设,妖怪是用光信号(而不是其他的物理手段)探测分子速度的。因此,整整一代物理学家都被“洗脑”。认为布里渊已经彻底解决了麦克斯韦妖佯谬问题(参阅文献[27]和[3])。1982年,贝奈特的文章的观点(准确说是兰道尔—彭罗斯—贝奈特方案的出现)让物理学家认识到布里渊工作的问题所在,并很快放弃了布里渊的结论。1982年以后,除了个别研究者持有异议外^[28-30],物理学界几乎一致地接受了兰道尔—彭罗斯—贝奈特的解决方案。

至此,经历一个多世纪的有关麦克斯韦妖的争论终于尘埃落定。麦克斯韦在最初提出他的假想实验时恐怕也没有想到这个问题的答案远远超出了他的时代。对他的问题的最终的回答必须等到信息科学诞生和兰道尔原理的提出。他山之石,可以攻玉,物理学家对麦克斯韦妖佯谬的解决历程再次佐证了这样一个结论:不同学科的发

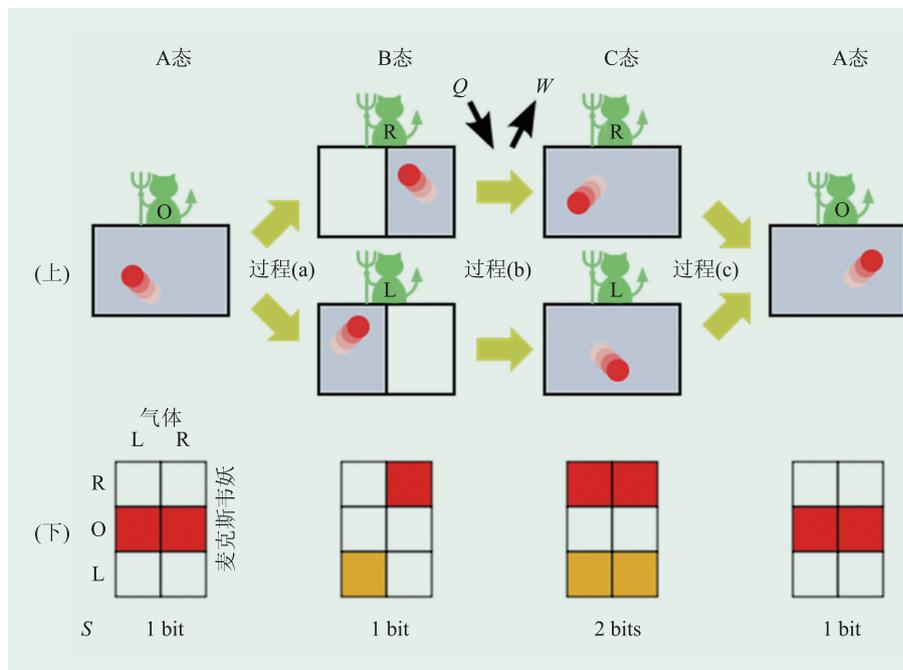


图6 麦克斯韦妖和热机作为一个整体的循环过程(图片取自维基百科网站)。(上)图代表妖怪监控单分子热机对外做功。同时它的存储单元也有相应的信息记录和擦除的过程。妖怪标注为O, R和L, 分别代表妖怪的存储单元处于O态, R态和L态。过程(b)中 Q 和 W 及箭头分别代表热机从外界吸热同时对外做功。(下)图用“相空间”体积的变化描述这个过程, 横轴和纵轴分别代表气体分子及妖怪所处的位置。“相空间”体积正比于热机和妖怪的总熵(S)的大小。在过程(b)中获得的功, 在过程(c)中全部用于擦除妖怪的信息, 因此不会有第二类永动机存在

展可以互相借鉴, 互相促进。

5 自动化信息热机、信息制冷机和信息擦除器

麦克斯韦妖佯谬最终得到了解决。但是物理学家对这个问题的兴趣并没有停止。因为贝奈特虽然说明麦克斯韦妖不会对热力学第二定律构成威胁, 即擦除它的存储单元的信息, 保证热力学第二定律不会被违反, 但是他的假想实验似乎仍然没有完全摆脱“智慧精灵”这个假设。有智慧精灵参与的(非自动化的)信息热机模型不可能在实验室实现, 因为世界上不存在这样的智慧精灵。有没有可能设计一个完全自动化的麦克斯韦热机或麦克斯韦制冷机? 即没有任何“智慧精灵”的参与, 这个机器能够实现麦克斯韦最初的设想, 并且得到和兰道尔原理预言相一致的结果。如果能够构造出一个自动化的信息热机模型, 我们将有希望在实验室中真正制造出一个信息热机或信息擦除器, 从而实现麦克斯韦最初的设想。这个装置不仅可以帮助我们理解信息、熵、热、功这些物理学基本概念, 而且有很重要的应用前景。

这样的自动化机器应该具有下面的性质: 向这个机器输入没有写入信息的存储单元, 这个机器就可以从单一热源吸热做功, 使热库的熵减少。这个自动化的信息处理机器消费信息存储单元和热量, 输出机械功, 并不违反热力学第二定律。因为它虽然从单一热源吸热做功, 但是它却同时在存储单元上写上了大量信息(信息熵增加)。这些信息载体上记录的信息并没有被擦除。一旦擦除这些信息, 那么将消耗一定的能量, 并且导致环境的熵增。这些熵增可以补偿前面的热库的熵减少。就整体而言, 整个宇宙的熵不会减少, 因而热力学第二定律也不会被违反。虽然在原则上找不到理由说明这样的机器不可能存在, 但是实际中却一直没有人来实现自动化的信息热机, 哪怕是提出一个理想化的模型。一个重要的突破出现在2012年。美国马里兰大学雅津斯基教授(C. Jarzynski)及其合作者提出了一个完全自动化的信息热机装置^[31]。它通过消费输入的空白存储单元, 利用热涨落把热能转化为机械功; 或者相反, 通过消费机械功, 实现对存储单元上信息的(部分)擦除。图7是该装置的简单示意图。当输入的信息载体(存储单元)的信息熵很小的时候, 这个信息热机可以从单一热源吸热, 同时把热完

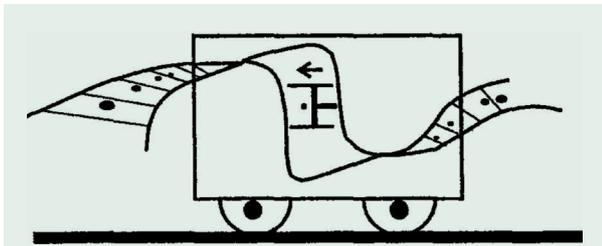


图7 依靠信息驱动的机器示意图(摘自文献[9])。这个示意图的大意是,通过输入空白的信息存储单元,这个机器可以从单一热源吸热对外做功,其代价是输出的信息存储单元上被写满了信息,擦除这些信息要消耗能量

全转化为机械功,并且使存储单元的信息熵增加。如果单看热库的热力学熵的改变,它是负数。这似乎是违反了热力学第二定律,就如同麦克斯韦最开始的模型里设想的那样。但是如果把存储单元上的信息熵与热力学熵等价起来,我们可以看到存储单元的信息熵加上热库的热力学熵之和不会减少。这正是推广的克劳修斯等式,说明热力学第二定律没有被违反。

如果输入的存储单元的信息熵很大,则这个自动化的模型进入另一个工作区间,它的效果正好相反。它将耗费一些机械功,同时减少(或者说擦除一部分)存储单元的信息熵。在这个工作区间时,这个模型被称作信息擦除器。这样信息擦除器与信息热机就被统一在一个物理模型中。至于它到底处于哪个工作区间,完全取决于我们设定的参数所处的范围。有关这个模型的更详细的情况请参阅文献[31]。

同样,雅津斯基教授和合作者(包括本文的作者之一)还考虑了一个自动化的信息制冷机模型^[32]。与信息热机类似,这个自动化的模型通过消费输入的存储单元利用热涨落把热量从低温热库输送到高温热库,或者相反通过消费高温热库的热量,实现对存储单元上信息的(部分)擦除。有关这个模型的更详细的情况请参阅文献[32]。

需要指出的是,1912年,斯莫卢霍夫斯基曾经断言构造一个完全自动化的模拟麦克斯韦想法的装置是不可能的,不过他指出,如果有一个智慧精灵参与,那还是有可能的^[12-14, 6]。费曼在他的《费曼物理讲义》(1963)一书中有过类似的评

论,认为不可能构造出一个完全自动化的模型来实现麦克斯韦想法。因此,雅津斯基等的工作相当于推翻了斯莫卢霍夫斯基和费曼分别在一个世纪及半个世纪前的论断。斯莫卢霍夫斯基在做这个论断的时候,信息学还没有诞生,人们还没有清楚地认识到信息及其在增强做功方面所起的关键作用,更没有认识到信息获取原则上可以不耗能量,但是信息擦除必须消耗一个最低限度的能量。费曼在做他的论断的时候,兰道尔原理刚刚问世,还没有广为人知。因此他们都不可能认识到智慧精灵对于实现麦克斯韦的设想是否是可有可无的。

6 量子力学与麦克斯韦妖

所有前面的有关麦克斯韦妖、信息及热力学问题的讨论都只是在经典物理范围内进行的。实际上,在量子力学范围内讨论麦克斯韦妖相关的问题也吸引了很多物理学家的兴趣。研究的主题包括量子热机,如量子希拉德热机和量子计算等等。我们将摘取其中几个方面进行介绍。这里面也包括我们自己的工作。

1984年,美国物理学家祖瑞克研究了量子希拉德单分子热机^[33]。他的研究结果显示,虽然量子测量和经典系统的测量有些不同,但是贝奈特的方案对于量子系统同样适用。也就是说,把信息擦除考虑进来,则不会有“永动机”出现,或不会有违反热力学第二定律的现象发生。同时,祖瑞克还研究了退相干对量子希拉德单分子热机的影响。1997年,美国物理学家洛伊德(S. Lloyd)研究了一个基于核磁共振系统的量子热机模型^[34]。这个量子热机由两个量子比特和两个热库组成。其中一个量子比特充当麦克斯韦妖,另外一个充当工作物质。洛伊德用他的核磁共振系统很好地演示了量子麦克斯韦妖的测量、反馈控制以及最后的信息擦除等过程。同样,他的模型支持了贝奈特的猜想:测量过程可以不导致熵增,但是信息擦除过程一定会导致熵增,从而保证热力学第二定律不被违反。

2006年,本文作者和其他合作者一起,研究了如何利用超导量子比特实现包含麦克斯韦妖的

热力学循环^[35, 36]。我们的研究动机是，如果在量子领域有麦克斯韦妖的存在，是否会从本质上改善量子热机的效率？在我们的研究中，我们把量子测量处理成一个产生系统和测量仪器之间的理想量子纠缠的相互作用动力学过程，避免了使用基本观念上备受争议的波包塌缩假设。因此，我们从根本上改进了原来的包含麦克斯韦妖的量子热机模型：让一个充当热介质的二能级系统S首先

与温度为 T_s 的热库接触，而另一个充当麦克斯韦妖的二能级系统D被置于温度为 T_D 的热库当中(见图8(a))。开始时二者均处于热平衡态，然后脱离热库。用D测量S处在什么态上，并根据测量结果对S进行反馈控制(采用可控的CNOT门)，如果S处在激发态上，D就把它翻转到基态上；如果S处在基态上，D就让它保持不变。最后让它们分别与各自的热库充分接触，在达到热平衡态后，完成一个热力学循环。我们的计算表明，这样热机的效率形式上为 $\eta = 1 - s\Delta_D/\Delta_S$ ，其中 Δ_D 和 Δ_S 是两个二能级系统的能级差。由于 $s \geq 1$ ，包含麦克斯韦妖的量子热机的效率比不上不包含麦克斯韦妖的量子热机的效率。就总体而言，仍然没有违背热力学第二定律的现象。另外，我们还建议了如图8(b)下图所示的基于超导量子电路的麦克斯韦妖量子热机的物理实现及其量子操控方案。

需要指出的是，虽然量子力学有别于经典力学，有很多独特的地方，比如量子纠缠、叠加原理等，但是迄今为止没有发现量子力学效应使热力学第二定律被违背的现象。也就是说，即使利用量子力学的奇特性质，也不可能造出第二类永动机。但是有些研究者声称他们利用量子力学效应制造出了超越卡诺效率的量子热机，也就是

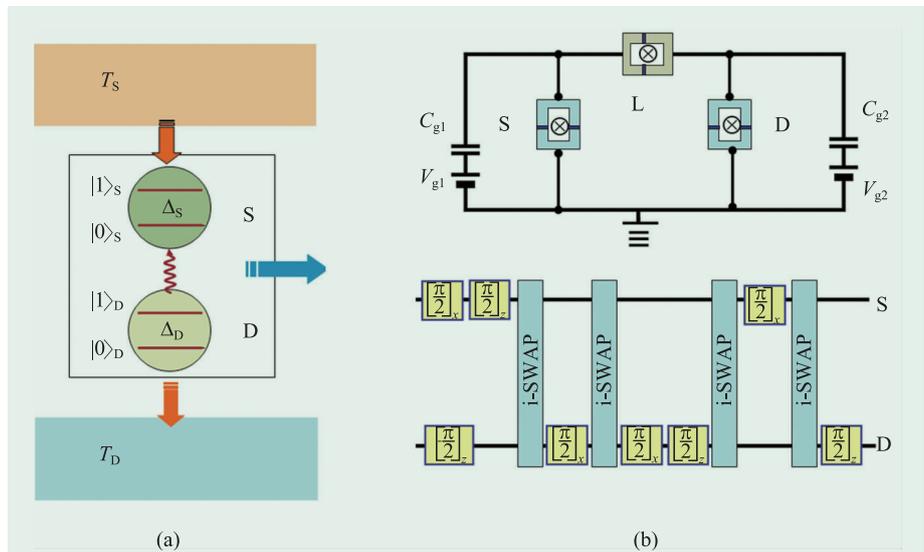


图8 基于麦克斯韦妖的量子热机模型及其超导量子电路实现(取自文献[35]) (a)量子热机的示意图；(b)超导量子电路图(上)和时序控制图(下)(L为控制耦合的量子超导干涉仪，i-SWAP代表一个逻辑门操作(虚互换门))

“违反”了热力学第二定律。比如美国物理学家斯贾里(M. O. Scully)等人于2003年在 *Science* 上发表文章称，他们利用量子相干性，可以实现“从单一热源吸热对外做功”^[37]，从而违背了热力学第二定律的开尔文表述。他们设计了一种光子气体热机的模型如下(见图9)。

在他们的模型中，热量来源于穿过腔的原子。打个比方来说，这里的原子相当于蒸汽机中的煤。腔中的光子气体相当于蒸汽机气缸中的蒸汽。原子穿过微波腔，辐射光子到腔中，相当于蒸汽机中的煤燃烧加热气缸中的蒸汽。他们设想，让稍微偏离热平衡态的原子一个个地穿过微波腔。所谓稍微偏离热平衡态是指密度矩阵对角元满足玻尔兹曼分布，但是非对角元不严格为零，只是接近零。这样的“热库”具有量子相干性，而不是处在一个熵最大混合态上。当这样的“量子相干热库”与量子光场耦合足够长时间后，也会使得量子光场达到一个稳态。入射的原子会在某个光场模式上产生大量相干的光子气体。如果原子开始处在温度为 T 的热平衡态，光场达到稳态后的温度也为 T 。如果原子开始处在稍微偏离 T 的量子态上，光场达到稳态后的温度为 $T_c > T$ ^[37, 38]。这时，光子气体热机的效率为 $\eta = 1 - T_c/T_h - R \cos \phi$ ，

($R < 0$)。这里 T_h 和 T_c 为两个热库的温度, R 为一系数, ϕ 为入射原子的波函数相对相位。入射原子波函数的相对相位为 $\phi = \pi$ 时, 热机效率高于卡诺效率^[37]。从表面上看, 这些结果似乎违反了热力学第二定律, 但实际并非如此。我们经过研究发现^[38], 它之所以“违反”热力学第二定律, 是因为它们隐含了一个麦克斯韦妖在热力学循环中, 妖怪选择只让那些波函数的相对相位为 π 的原子通过, 而不让相对相位为其他值的原子通过。但是斯贾里等人却未考虑对妖怪存储单元的信息擦除过程。这才是他们产生所谓“违反”热力学第二定律的结果的根源。如果考虑了对妖怪存储单元的信息擦除过程, 他们的热机效率不可能超过卡诺效率, 或者热力学第二定律也不会被违背^[38]。

7 可逆计算, 量子计算与信息处理的物理极限

在微观层次上, 人们可以把普适计算的逻辑操作与热机循环过程一样理解为在外部参数控制下的物理系统的时间演化问题。如果在计算过程中每一步都不引入新的不确定性, 原则上也不需要擦除信息, 而是让物理系统按动力学演化“原路返回”, 因为每一步演化中的初态和末态都有一一对应的关系。这样完成一个计算过程

所需的能量损耗可以为无穷小。这就是所谓的逻辑上可逆的计算, 原则上不需要消耗能量。这个概念最早是由兰道尔提出。1973年, 贝奈特证明了那种不要擦除信息的逻辑上可逆的计算原则上是可行的^[39, 7-9]。

要实现可逆计算, 必须保证每一步操作都是确定性的“一一映射”, 并且操作是可逆的。通俗地说, 就是要从一个初态唯一确定一个末态, 从一个末态能够唯一确定一个初态。这样才能保证在计算过程中不引入任何新的不确定性, 以及让系统“原路返回”。这不但要求执行计算的物理系统满足时间反演对称性, 而且还要求系统与环境完全隔绝开来。但是在实际计算过程中, 任何一个系统都不可能完全与环境隔绝开来, 因此很难做到让物理系统完成计算过程后再沿“原路返回”。从另外一个方面讲, 即使我们能够让系统与环境完全隔绝开来, 用于计算的物理系统的自由度实在太太, 以致于我们无法完全跟踪系统每个自由度的演化, 就如同我们无法跟踪了解一个蒸汽机气缸里每个分子的坐标和动量随时间的演化。这都会导致在计算过程中不可避免地引入不确定性。由于上述原因, 现有的普适的计算技术都不是基于可逆计算框架^[7-9], 而是允许在计算过程中引入不确定性, 或者说允许完成计算过程的物理载体的熵在计算过程中增加。最后, 为了使计算系统初始化, 在完成一个计算过程后, 再

擦除计算设备的物理系统增加的熵(转移到环境中去)。由兰道尔原理我们知道, 这意味着不低于某个临界值的能量耗散。用一个比喻来说, 可逆计算模型就如同可逆的卡诺热机模型一样只有理论上的意义。在实际中很难实现这样理想化的模型。以热机模型为例, 真实的热机总是有摩擦的, 而且真实的热力学循环不可能是准静态过程。

上面只是讨论了计算过程中的一个环节——信息擦除。其实还有很多其他的环节, 受各种各样“不那么基本”的物理极限的制约。所有这些限

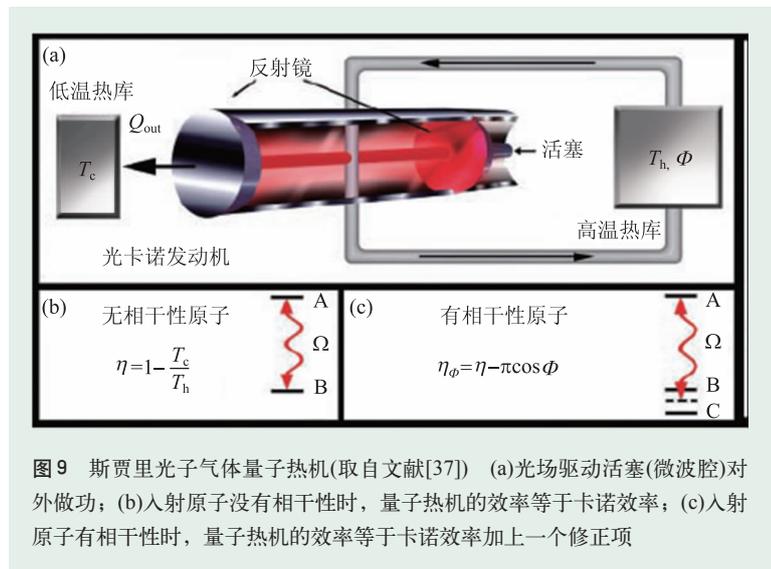


图9 斯贾里光子气体量子热机(取自文献[37]) (a)光场驱动活塞(微波腔)对外做功; (b)入射原子没有相干性时, 量子热机的效率等于卡诺效率; (c)入射原子有相干性时, 量子热机的效率等于卡诺效率加上一个修正项

制一起决定了计算过程中的能量耗散的下限^[40, 41]。例如，逻辑元件是工作在稳态区域，而达到稳态需要一定的弛豫时间；元件的开关时间是一个关键的技术困难；信号在元件之间传播的速度是有限的，信号传播的延迟是另一个技术上的挑战。另外，计算机小型化也有原理上的困难。例如，最终利用原子核作为存储单元进行量子计算需要更高的能量。这些困难都是从物理技术的层面考虑问题，而兰道尔和贝奈特的工作主要强调了计算原理上的物理限制。总之，除了在微观的层面给出麦克斯韦妖佯谬的一个解决方案，兰道尔原理的另一个意义就是预言了计算的物理极限的存在。

兰道尔原理的直接后果是，它将会导致所谓的摩尔定律^[42]的终结。因为现有的计算机在完成一个有效计算的实际过程中，原理上一个循环必须包含初始化过程。物理上它意味着要对上一个计算过程中存储单元的信息进行擦除，从而必须消耗一定能量，并以热量的形式散发掉。计算的速度越快，产生的热量就越多。当计算机芯片单位面积上集成的元件数目越多，需要耗散掉的热量也越来越多。这种(不可逆)计算的热量耗散机制大大限制了计算机芯片的密度，给出了其物理极限，从而导致摩尔经验定律(计算机CPU(中央处理器)的晶体管数目每18个月就会增加一倍)终将不再适用，因为材料散热性能是有限制的。图10为计算机发展历史的概略图像，纵轴是CPU集成的晶体管的数目，横轴代表年代。这个图表征了CPU运算速度的增长。目前流行的22 nm技术不久以后就会被14 nm技术所替代。当集成电路的线宽达到更小的尺度时，量子效应(如电子隧穿)就不能再被忽略，经典比特就会失效，这也是导致摩尔定律走向终结的另一个原因。估计再有十年的时间，现有的计算机构架体系就会因此而终结。因此，突破芯片尺度极限是当代计算机信息科学发展所面临的一个急需解决的重大问题。

为了突破这种计算机的芯片尺度极限，人们提出了量子计算的概念，导致了量子信息学(quantum information)的诞生^[10]。量子信息是量子

物理与信息科学、计算机科学综合所形成的交叉学科。它主要包括量子计算、量子通信和量子密码学。它充分利用量子相干性及其衍生的独特的量子特性(量子纠缠、量子并行和量子不可克隆等)进行信息存储、处理、计算和传送，以完成经典信息系统难以胜任的高速计算、大容量信息传输通信和完全安全保密的信息处理任务。更重要的是，量子信息的研究(特别是量子计算的研究)会为突破传统计算机芯片的尺度极限提供新的启示和革命性的解决方案，从而导致未来计算机构架体系根本性的变革。需要指出的是，量子信息的研究不只是两个不同学科的简单交叉，它还涉及到怎样从物理学的角度，在物质科学层面上深入理解什么是信息，什么是物质，什么是能量等根本性问题。这些问题的解决，反过来也有助于揭开量子物理的不解之谜，甚至引发新一轮的量子革命。例如，量子理论自建立之日起，虽然在应用层面上取得了前所未有的成功，但其基本观念上却是构建在一个有争议的基础之上(如玻尔和爱因斯坦等人关于量子力学理论完备性的争论)。近年来，由于量子信息的深入研究，在新的实验技术的平台上，许多争论有望得到检验和进一步澄清。

8 结束语

以上关于麦克斯韦妖和计算过程的物理极限

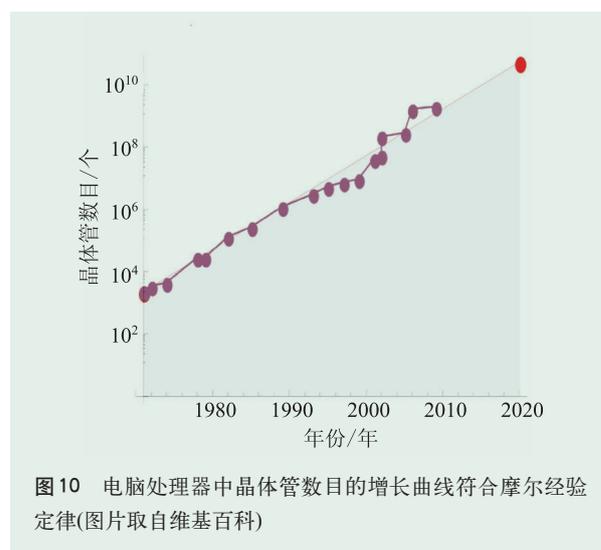


图10 电脑处理器中晶体管数目的增长曲线符合摩尔经验定律(图片取自维基百科)

的讨论, 强调了信息擦除过程必然导致一个不低于某个临界值的能量耗散。这个结论导致的后果包括: (1)即使存在麦克斯韦妖这种智慧精灵, 热力学第二定律也不会被违反; (2)在现有的计算技术框架下, 信息处理的过程必然会散热, 散热量下限由兰道尔原理给出; (3)可以设计一种自动化的机器, 它通过消费信息, 可以从单一热源吸热对外做功, 或者实现制冷但是不消耗机械功。

麦克斯韦妖虽然是个简单的假想模型, 但是在过去的一百多年, 它却吸引了众多一流物理学家的兴趣和关注。人们对它的研究持续一百多

年, 直到今天, 它仍然吸引着很多物理学家的注意力。在本文中, 我们尽全力勾画出一个简单的轮廓, 让读者对这个方面的发展历程和最新进展有个大体的了解, 我们选择的内容受到自己知识和兴趣偏好的影响, 不可能是完全客观的和没有遗漏的。另外, 人们对“信息的物理学”^[43]的了解到目前为止也只是了解了冰山一角, 更多的未知领域有待我们去探索。我们相信在未来的研究中, 随着我们认识的进一步深入, 信息科学和物理学特别是热力学的联姻还会继续带给我们更多的新的惊喜。

参考文献

- [1] Huang K. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, 1987
- [2] 冯端, 冯少彤. 溯源探幽: 熵的世界. 北京: 科学出版社, 2005
- [3] Leff H S, Rex A F (eds.). *Maxwell's Demon 2: Entropy, Classical and Quantum Information, Computing*. Bristol: Institute of Physics, 2003
- [4] Landauer R. *IBM J. Res. Dev.*, 1961, 5: 183
- [5] Bennett C H. *Int. J. Theor. Phys.*, 1982, 21: 905
- [6] Bennett C H. *Sci. Am.*, 1987, 257: 108
- [7] Bennett C H, Landauer R. *Sci. Am.*, 1985, 253: 48
- [8] Bennett C H. *IBM J. Res. Dev.*, 1988, 32(1): 16
- [9] Feynman R P. *Feynman Lectures on Computation*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1996
- [10] Nelson M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- [11] Leff H S, Rex A F. In: *Quantum limits to the second law: first international Conference*. Sheehan D P (Ed). Melville, New York, 2002
- [12] Smoluchowski M V. *Phys. Zeits*, 1912, 13: 1069
- [13] Smoluchowski M V. *Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes der Wärmttheorie. Vorträge über die Kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität*. Toubner, Loipzig, 1914. pp. 89
- [14] Ehrenberg W. *Sci. Am.*, 1967, 217: 103
- [15] Skordos P A, Zurek W H. *Am. J. Phys.*, 1992, 60: 876
- [16] Feynman R P. *Feynman Lectures on Physics*. 1963
- [17] Tu Z. *J. Phys. A*, 2008, 41: 312003
- [18] Jarzynski C, Mazonka O. *Phys. Rev. E*, 1999, 59: 6448
- [19] Szilard L. *Z. Fur Physik*, 1929, 53: 840
- [20] Plenio M B, Vitelli V. *Contemp. Phys.*, 2001, 42: 25
- [21] Gabor D. *Progress in Optics*, 1964, 1: 111
- [22] Brillouin M. *J. Appl. Phys.*, 1951, 22: 334
- [23] von Neumann J. *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, 1966
- [24] Penrose O. *Foundations of Statistical Mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1970
- [25] Berut A *et al.* *Nature*, 2012, 483: 187
- [26] Shannon C E. *Bell System Technical Journal*, 1948, 27: 379
- [27] Tribus M, McIrvine E C. *Sci. Am.*, 1971, 224: 179
- [28] Earman J. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 1998, 29: 435
- [29] Hemmo M, Shenker O. *Journal of Philosophy*, 2010, 107: 389
- [30] Norton J D. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 2011, 42: 184
- [31] Mandal D, Jarzynski C. *PNAS*, 2012, 109: 11641
- [32] Mandal D, Quan H T, Jarzynski C. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, 111: 030602
- [33] Zurek W H. *arXiv: quant-ph/0301076*
- [34] Lloyd S. *Phys. Rev. A*, 1997, 56: 3374
- [35] Quan H T, Wang Y D, Liu Y X *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 97: 180402
- [36] Quan H T, Liu Y X, Sun C P *et al.* *Phys. Rev. E*, 2007, 76: 031105
- [37] Scully M O, Zubairy M S, Agarwal G S *et al.* *Science*, 2003, 299: 862
- [38] Quan H T, Zhang P, Sun C P. *Phys. Rev. E*, 2006, 73: 036122
- [39] Bennett C H. *IBM J. Res. Dev.*, 1973, 17(6): 525
- [40] Frank M P. *Computing in Science and Engineering*, 16, May/June, 2002
- [41] Pop E. *Nano Research*, 2010, 3: 147
- [42] Moore G. *Proceedings of IEEE*, 1998, 86: 82
- [43] Bais F A, Farmer J D. *arXiv: 0708.2837v2*