

物理学咬文嚼字之六十三 纷乱的交换

曹则贤[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2014-06-16收到

† email: zxcao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20140710

投我以木桃，报之以琼瑶……

——《诗经·卫风·木瓜》

换我心，为你心，始知相忆深。

——[宋]顾夔《诉衷情》

摘要 Commute, permute, interchange, exchange 都是与交换有关的重要数学物理概念。实数的加法、乘法也强调交换律，interchanging 全同粒子变量得到的能量积分成了 exchange term，随处可见的交换作用机制，其背后皆有深意。

1 引子

Wiki 关于 Lie Algebra 的词条，让人忍俊不禁。其开头一句是这样写的：“In mathematics, Lie algebras (/ˈliː/, not /ˈlaɪ/) are algebraic structures…(在数学中，李代数是指这样的代数结构……)”，注意看括号里的音标多么奇怪，这是提醒读者别把北欧的 Lie(李)姓当成英文给读成“辣姨”了。且不说把所有看似英文字母写成的字都当成英文是否合适，就是英文本身，其不靠谱就由来有之，不可不察。初学英文者常常对 lie, light 的两个不搭边的意思感到迷惑不解。其实，lie 作为撒谎的意思来自德语的 lügen，作为躺着、放置的意思来自德语的 legen；

light 作为光的意思来自德语的 Licht，作为轻的、容易的意思来自德语的 leicht。因为看起来差不多，引进过程中就给弄混了。这种语言变迁路径，想来真让人无语¹⁾。英语这种不太精致的语言后来成了世界的主导性语言，当然是借着热力学带来的船坚炮利，凸显了粗暴才是硬道理的道理。英语如今是物理学的主要载体，理解、传播物理时，尤其是如果依据的是英语翻译成的汉语文本时，注意对一些字词仔细加以辨析，还是非常必要的。

古希腊人早就有了万物皆流(Πάντα ῥεῖ)的思想，这告诉我们这个宇宙的主题就是变化，因此自然科学的主题也必定是各种变化。变化的问题当然千变万化，而各种语言可能会为不同的变化准备了不同

的表达变化的词汇。汉译西语文献中各种表达变化的词汇该是怎样的挑战，当我对这个问题略加思考的时候就被吓了一跳。变化出现的语境以及伪装的形式太多了，而翻译的时候我们似乎未对相关问题给予足够的重视。比如，transformation，词干是拉丁语动词 formare，虽然也有地方将之翻译成变形(变型)，但是在数学物理中一般还是将之翻译成变换。我觉得，如果我们是从 trans+formare 来理解 transformation 所代表的数学变换的意思的话，我们可能早就会在潜意识里植入代数与几何统一的思想，而无需有人专门再告诉我们这一点。

Change 是个表示变化的日常英文词，由 change 衍生出的动词，如 interchange 和 exchange，都被译成

1) 这种移植时发生的不靠谱在将希腊语写成拉丁语时曾大量出现。一个可能的原因是希腊语自己演化的时候就因为那块土地上缺乏主导性的势力而显得无所适从。今日西欧语言里的一些不易解释的单词，如语法概念宾格是 accusative，都是这样以讹传讹造成的。类似地，中文也有鲁鱼亥豕的问题。——笔者注

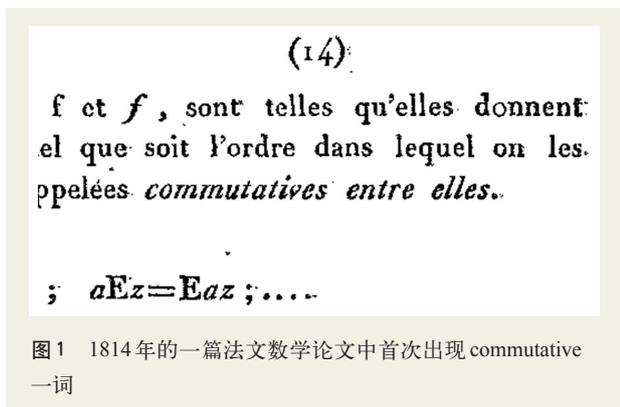


图1 1814年的一篇法文数学论文中首次出现 commutative 一词

交换。不过，被汉译成交换的还包括 commute, permute 等词。这几个词都联系着非常重要的数学物理概念。说汉语自然科学文献中不加剖分的“交换”概念四处乱飞也不为过。

2 交换律

第一个含交换的科学概念可能就是交换律。上小学的时候，算术书上说加法和乘法满足交换律，就是 $1+2=2+1$, $2 \times 3=3 \times 2$ 。俺是真不明白了，这数学定律也太简单了吧——不是说数学家是聪明人吗²⁾？等到上大学了，知道这交换律的英文是 commutative law。动词 commute，来自拉丁语 mutare，就是英文的 change，比如 Jacob Bernoulli 的名言 eadem mutata resurgo³⁾ 中的 mutata 就是这个词。所谓的 commutative，就是调换一下顺序，结果不变。规范一些的定义是这么说的：A binary operation is **commutative** if **changing** the order of the operands does not change the result (一个二元运算，如果改变运算对象的顺序但结果不

变，则称该运算是可交换的)。

Commutative 有案可查的首次使用是在 1814 年出现在 François Servois 的一篇法文文章中(图 1)。注意，引入 commutative 一词是在

谈论函数而非简单的数的性质。在原文中，作者的用词是 commutatives entre elles，即 commutative between them，似乎是强调这两个函数的本性而不是把它们联系在一起的那个操作的性质。尽管整数乘法可能始于远古时代，但谈论关于数的乘法要满足 commutative law，则要等到 1844 年。1843 年，伟大的哈密顿 (Rowan Hamilton) 引入了四元数 $Q=a+bi+cj+dk$ 来描述电磁学⁴⁾，其中的 (i, j, k) 是对 $z=a+bi$ 中的“ i ”的推广， $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ 。哈密顿把这项发现告诉了他的朋友 J.T. Graves，而 Graves 很快就构造出了八元数(octonion)，但是却无法引入 16 元数。好了，我们有一元数(普通的实数)，二元数(复数)，四元数，八元数，怎么不能进一步地引入十六元数呢？哈密顿仔细考虑了这个问题，由此注意到了加法和乘法的 commutative law 和 associative law (结合律)的问题。结合律是说 $(1+2)+3=1+(2+3)$, $(2 \times 3) \times 4=2 \times (3 \times 4)$ 。哈密顿发现一元数满足交换律和结合律，二元数还满足交换律与结合律，四元数满足结合律但是不满足

交换律，因为对于四元数 $Q=a+bi+cj+dk$ ，有 $ij=-ji$ 。而八元数结合律也必须放弃，即一般地不存在 $A \cdot BC=AB \cdot C=ABC$ 这样的关系⁵⁾。可见，数能满足什么样的性质是和其结构相关的，谈论数的时候会把交换律、结合律写入这些数所应(能)遵从的规则里面。注意，有趣的是，是在发展更复杂结构的数的过程中眼看着结合律和交换律逐步丧失，人们⁵⁾才认识到其存在的。仔细想一想，有多少事物是在失去的时候人们才注意到其存在的呢。

四元数中出现的非交换 (non-commutative) 性质不是普遍性的 $AB \neq BA$ ，而是特殊的 $ij=-ji$ 。这种 $AB=-BA$ 的非交换性被称为 anti-commutative(反交换的)。具有反交换性的操作或者操作对象有很多，前者有矢量的外积 (exterior product 或者 wedge product)，满足 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ ；后者有 Grassmann 数，满足 $\theta_1 \theta_2 = -\theta_2 \theta_1$ 。由反交换性显然有 $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$, $\theta \theta = 0$ ，因此象矢量外积或者 Grassmann 数乘积这样的积表示都必然是 alternating 的，即同一对象只出现一次。比如三矢量的外积⁶⁾

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} = (u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 - u_3 v_2 w_1) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

注意变量指标 1, 2, 3 在右侧系数的每一项中都只出现一次。Alternating 或者 alternative 汉译为交错、交替。Alternative algebra，汉译为交错代数，指满足一类弱结合律的代数。八元数运算就属于交错

2) Mathematics 当然不是数学，数的学问只是 mathematics 很小很小的一部分。Mathematician 是好学的人，多面高手叫 polymath。象 Thomas Young, Henri Poincaré, Ervin Schrödinger, John von Neumann, Roger Penrose 这号的物理学家都是 polymath，而象爱因斯坦这样的物理学家其学识算是比较单一的。材质不同，无关成就大小。——笔者注

3) 意思是“尽管不停变化，我还是挺立如常”。这句话本来是描述对数螺线的性质的，后来被刻在了 Jacob Bernoulli 的墓碑上。——笔者注

代数，乘法满足 $A(BB)=(AB)B$ ， $A(AB)=(AA)B$ 。下文我们会看到，alternative 也是理解 exchange interaction 的关键。

3 对易与交换

在物理文献中 commute 被译成对易，表述非对易性除了用 non-commutative 外还有 non-commuting。对易性和共轭(conjugation)有关，若存在对易关系 $pq=qp$ ，显然有 $p=qpq^{-1}$ ，这后者就是群论中提及的共轭关系。共轭和对易性在物理学中都占据着举足轻重的地位，弄懂这些概念会让学习物理学多一点从容。

可交换的(对易的)与不可交换的(非对易的)操作或对象在自然界中应该都是很普遍的。早晨要起床时先睁左眼然后睁右眼与先睁右眼然后睁左眼，效果都一样；评论人时说“长成这样还穿成那样”与“长成那样还穿成这样”，估计意思也差不多。这是可交换的事例。但是，起床后先穿袜子后穿鞋还是先穿鞋后穿袜子，或者救助饥饿者时先给稀饭后给馒头还是先给馒头后给稀饭，效果就大相径庭。这是非对易的事例。笔者开始修习量子力学时总觉得书本中有强调非对易性是多么不同寻常的印象，应该是知识准备不足造成的。当然，非对易性应该比可交换性包容更多的内涵，量子力学强调非对易算符(non-commuting operators)或者算符的非对易性属于应有之意。若两个

对象 A, B ，根据某种定义的乘法，是非对易的，即 $AB \neq BA$ ，那么这个代数，或者针对这个代数我们能编的物理故事，应该藏在 $AB - BA$ 中。 $AB - BA$ ，也写成 $[A, B]$ ，英文名为 commutator，汉译对易子或交换子。由算符的非对易性，量子力学敷衍出了很多故事，如从 $[x, p] = i\hbar$ 得出了不确定性原理，并进一步地被编排为“量子力学原理表明不可能同时精确地测量一个粒子的动能和位置”，好像经典力学里就能“同时、精确地测量一个粒子的动能和位置”似的。为什么算符乘积对波函数的作用就等价于对一个量子系统接连进行的两次测量？恐怕事情没有这么简单。物理世界的真实规则，哪里是物理学家随口一说就能给定了的？注意，对易子(commutator) $[A, B] = AB - BA$ 是为了衡量一对非对易算符偏离对易有多远，类似地可定义反对易子(anticommutator)， $\{A, B\} = AB + BA$ ，来衡量对反对易关系的偏离。Grassmann 数是对反对易算符的经典类比。

在前述三矢量的外积表示中，六个系数项里的下标都是 1, 2, 3 的某种置换(permutation，有时也写为 cyclic permutation)。Permutation, per + mute，意思是 to change thoroughly(全变一遍)。对于组合(1, 2, 3)，如果对所有位置上的数字都变一遍，结果为(2, 3, 1)，(3, 1, 2)，(1, 3, 2)，(2, 1, 3)和(3, 2, 1)，即三对象的 permutation 共有六种可能。显然，permutation 满足群

的所有定义，所以有 permutation group(置换群)的概念。置换(permute)与对易/交换(commute)同源，且两者常常出现在一起，比如角动量的对易关系， $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ ，其中的 Levi-Civita 符号 ϵ_{ijk} 就涉及 i, j, k 的 permutation。

4 交换作用

交换作用在物理学中是一个至关重要的概念，不过它涉及两个英文词：interchange 和 exchange。英语动词 change，来自法语的 changer，本来就有换、交换的意思，如 changer la place avec qqn(和某人换个座)。所谓的 interchange 和 exchange，前者的前缀为 inter(内)，后者的前缀为 ex(外，朝外)，两者的英文用法本来就有些含混，汉语干脆都给翻译成了交换。于是，在汉语物理文献中交换满天飞，至于怎么个交换法则不甚了了。

先说 interchange，其意思之一是换位。在 interchange station(换乘站)等日常词语中就是这个意思。前述的加法、乘法交换律涉及的就是运算对象的互换(interchange)。所谓的 permutation 可看成是多次 interchange 对象位置的结果。定义带方向的面积为 $A(u, w) = u \wedge w$ ，则有 $A(u, w) = -A(w, u)$ ，因为矢量 u 和 w 角色互换导致平行四边形的取向反转(since **interchanging** the roles of u and w reverses the orientation of the parallelogram)。

4) Josiah Willard Gibbs 引入矢量叉乘描述电磁学，其危害应该有人讨论了。一个明显的问题是，磁感应强度 B 同电场强度 E 不是同一类数学对象，而这个应该作为常识的内容许多物理学家却未必知晓。磁单极的概念就是建立在对磁感应强度 B 的错误理解上的。容另议。——笔者注

5) 其实就是哈密顿一人。就科学而言，个人倾向英雄史观。——笔者注

6) 这其实就是由三个矢量张成的平行六面体的体积，或者由这三个矢量之分量构成的矩阵的矩阵值(determinant)。——笔者注

Exchange, 我总觉得涉及一个以上的外在对象, 且外在对象或许才是主体。She **exchanged** a few sentences with the man, 就涉及一个女人一个男人和几句话。“投之以桃、报之以李”, 除了两个人之外, 还有桃李。“我那么卑微, 我愿意看到世界上头号美女(这等好事)去交换一睹您的芳姿(I am so low that I would **exchange** the greatest sight of beauty in the world for the sight of your figure……)”^[2], 这是文学里的exchange。“如同参与电磁相互作用的粒子交换光子, 参与强相互作用的粒子交换胶子。交换胶子导致夸克的色而不是味发生改变(Particles that interact through the strong force **exchange** gluons, much as particles involved in electromagnetic interactions **exchange** photons. Quark color, but not flavor, is **changed** by the exchange of gluons.)”, 这是科学文献里的exchange。

用中文修习物理者可能耳朵里装满了交换作用、交换能、交换积分等概念, 估计不会注意到“交换(interchange)两个粒子位置”与“交换积分(exchange integral)”里交换对应的是不同英文词。交换作用是一个从量子力学习题进而走入原子核物理和固体物理(尤其是磁学)的重要概念, 弄清这个思想过程中interchange和exchange的正确用法可能有助于把握背后的物理图像。

在量子力学中, 由单粒子的波函数 φ 和 ψ 构造两体波函数时常采用 $\varphi \otimes \psi + \psi \otimes \varphi$ 与 $\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$ 这两种形式。为什么呢? 因为互换(interchange)两全同粒子⁷⁾坐标的操

作 P , 其本征值为+1和-1(也可从置换群 S_2 的表示的角度看待这个问题)。不可区分的粒子(对)的波函数应该是交换算符的本征态。

由单粒子波函数出发, 考虑到波函数的交换(interchange)对称性去构造两粒子的波函数, 然后去计算体系的能量, 其中有一项被称为交换积分(exchange integral) J_{ex} (细节略)。这个交换积分或者交换能的效应, Heisenberg^[3]和Dirac^[4]在1926年都注意到了。交换作用是量子力学效应, 费米子和玻色子都有交换作用。交换作用可用来解释铁磁性和物质的体积。在Heisenberg的铁磁模型中, 尽管那个交换项(exchange term)来自电子的轨道角动量, 但是被看做是两自旋之间的相互作用。这个作用项是个等价的概念, 它比自旋之间的磁相互作用大得多。

细心的读者会注意到, 分明是interchange波函数里的位置或自旋变量得来的积分项为什么会被称为**exchange term** (integral, interaction)呢? 笔者一直对这个问题感到困惑。仔细比较一些文献, 发现干脆糊涂应付的也大有人在。比如这一段: “When there are two electrons, the wave function for which the sum of the two spins equals 1 does not change its value when **the spin variables of the electrons are exchanged**. The wave function for which the sum becomes 0 changes sign when the spin variables **are interchanged**”^[5], 前一句说两电子的自旋变量exchanged, 后一句则用了interchanged。再看Wiki的exchange interaction词条, 它写到: “This

means that the overall wave function of a system must be antisymmetric when two electrons are **exchanged**, i.e. **interchanged** with respect to both spatial and spin coordinates(若两个电子的空间和自旋坐标被interchanged了, 即两个电子are exchanged了……)”。这既不科学也不英语啊!

如果光是看Heisenberg处理铁磁性问题的作品, 是不太好理解为什么interchange the spin variables得到的却是exchange term。在相关的问题中, 是否真有什么被exchange了呢? 让我们考察量子力学处理氢分子离子 H_2^+ 的情形。把 H_2^+ 当成两个固定的质子加一个电子的体系, 在考虑到交换(interchange)质子位置时电子波函数应该表现的性质而得到的能量表示中, 多出了一个交换(exchange)能量项 J_{ex} 。在这个问题中可设想如下物理图像: H_2^+ 可以被看成是两个质子在不断交换(exchange)电子(shuttling of the electron): 在两个质子的位置上交替地(alternatively)出现中性的氢原子构型。与此同时, 两端粒子的统计也在费米统计和玻色统计之间交替^[6]。某个性质的交替才是交换作用的本质(This alternation is the essence of the exchange force)。当然, 如果仅仅只是如同在 H_2^+ 中把那个本就知道其存在的电子当作两个质子取悦对方互赠的桃李, 也看不出exchange interaction有什么特殊价值来。

大家的水平总是超出常人的想象力。1932年6月, Heisenberg向*Zeitschrift für Physik*杂志提交了他的原子核理论。此篇文章包含了原子核由质子和中子组成的思想, 且

7) 既然是全同的, 交换从哪里说起呢? 总要先分别开来然后再交换。可见这构造物理是在“虚拟现实”中进行的! ——笔者注

提出中子—质子之间的作用力是 exchange force 的概念；为了描述这个交换力，需要引入同位旋(isospin)的概念。注意到原子核的结合能与原子核质量数 A 近似成正比，Heisenberg 由此推论核力必须是一种 exchange force，因为如果是两体势的话，结合能应该与 A^2 近似成正比。那么，中子—质子之间交换什么了呢？交换一个电子？不可能！质子和中子都是费米子，交换电子会造成两端统计的 alternation。Heisenberg 提议中子—质子之间交换的是玻色子，后来又用电子—中微子对代替。进一步研究发现，如果核子之间交换的是电子—中微子对，又不足以解释交换力之强，这个建议也被否决了。1934年，汤川秀树假设质子—中子交换的是约100倍电子质量的介子。1936年，第一个介子， μ -介子，被发现。强相互作用作为一种 exchange interaction 以及中介强相互作用之介子(meson)(图2)的确立，将物理学推向一个更微妙的世界。Exchange interaction 被推广到描述质子、中子内部夸克之间的相互作用，作为中介的胶子干脆就被称为 exchange particle(用来交换的粒子)。这个 exchange interaction 概念的确立又反过来改进我们对电磁相互作用的认识。

Exchange interaction 后来被用到各种语境中。固体物理中一个著名的交换作用机制是所谓的 RKKY (Ruderman—Kittel—Kasuya—Yosida 的缩写)作用，最早在上世纪五

十年代被引入用来描述核磁矩⁸⁾借助与传导电子之间的相互作用所达成的一种耦合机制，后来被用于描述局域 d- 或者 f 壳层的电子自旋之间通过传导电子发生的耦合。这里的 exchange 不是说核自旋或者内层电子(localized)之间交换了那个传导电子，而是说涉及的中间过程都是 Heisenberg 意义下的交换作用(exchange interaction，由 interchange 粒子变量而来的量子力学效应)。RKKY 理论是二阶微扰，要计算的是两核自旋或者两内层电子之间的关联能(correlation energy)。RKKY 理论一个最重要的结果是巨磁阻现象，它预言在由非磁性夹层分隔开的磁性材料薄层会随夹层的厚度表现出铁磁性—反铁磁性之间的振荡。

5 结语

啰嗦这么多，到底为何 interchange variables 得到的能量积分要被称为 exchange term 也还是没说清楚。在 Heisenberg 1926 年的论文中³⁾，只有 tauschen (change) 和 Vertauschung (interchange) 的字样。Exchange energy, exchange term 这个概念是在哪里第一次出现的，还有待考证。

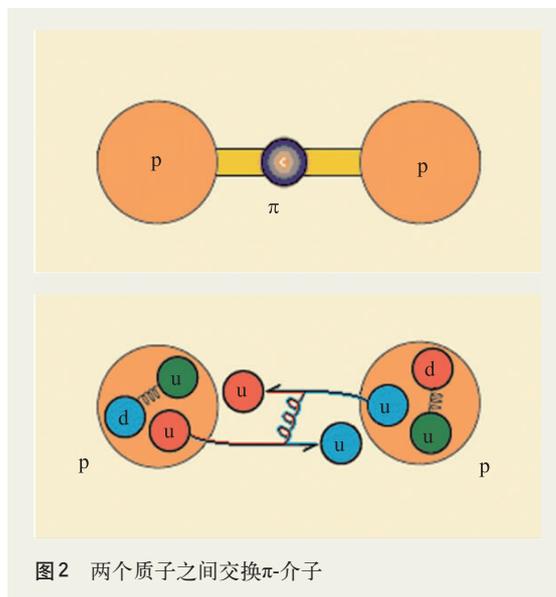


图2 两个质子之间交换 π -介子

文章结尾，比较一下中英德法关于交换的词汇或许是有益的。中文就是交换而已。英文的 interchange 和 exchange 虽然可以硬加以区别，但有时也可能混用，如在 to interchange ideas 和 to exchange some sentences 中就看不出两者有什么区别。有趣的是，如果查字典的话，英文的 interchange 和 exchange 在法语里都是 échanger。法语的量子力学课本里会说“L'interaction d'échange est le résultat de la symétrie d'échange(交换作用是全同粒子之间存在交换对称性的结果)”，跟中文一样含混。我手头的法语字典里就没有 interchanger 这个动词，虽然有名词 interchangeabilité(可互换性)。德语文献大概不太会混淆：交换作用(Die Austauschwechselwirkung⁹⁾)或者交换能(Austauschenergie)是因为全同粒子交换位置(ihre Plätze zu vertauschen)而多出的能量项。交

8) 我实在不明白，为什么 moment of momentum, moment of inertia, magnetic moment, electric dipole moment 等词被翻译成了动量矩、惯量矩、磁矩、电偶极矩，用的是矩(直尺)而不是距，这些本来就是用距离定义的物理量呀？再说，moment, momentum, 本来就是 movement(运动)。容另文专议。——笔者注

9) 这是一个要命的德语概念。Austauschwechselwirkung, Austausch-wechsel-wirkung, 前面两个词对应的动词为 austauschen 和 wechseln, 都是交换的意思，当然之间也有细微区别。——笔者注

换能涉及的动词是 austauschen, 而交换位置用的是动词 vertauschen, 德国人习惯这种构词法所带来的细微差别。我觉得, 这种文字表述上的差别应该会在相关国家造成物理文化的差别。为了明确交换作

用相关的物理图像, 愚以为中文若是表述为“交换能是由全同粒子互换对称性所带来的量子效应”, 也许能够对读者多一点提醒。当然了, 纠缠于这些文字细节未见得就有助于对问题的深入理解。

南岳怀让禅师所谓的“说似一物即不中”, 实在地道出了物理学, 尤其是量子物理, 所遭遇的文字困境, 也指明了“了悟”的境界该是什么样的。学物理者, 弄清物理图像才是正经。

参考文献

- [1] Conway J H, Smith D A. On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry. Massachusetts: A. K. Peters, 2003
- [2] Rand A. Atlas Shrugged. Random House, 1957. p.194
- [3] Heisenberg W. Zeitschrift für Physik, 1926, 38(6-7):411
- [4] Dirac P A M. On the Theory of Quantum Mechanics. Proceedings of the Royal Society of London, A, 1926, 112: 661
- [5] Tomonaga Sin-itiro. The Story of Spin. The University of Chicago Press, 1997

2014第13届华东(青岛)国际光电展览会

时间: 2014年8月14-16日 地点: 青岛国际会展中心

【主办单位】

中国电子学会元件分会 山东照明学会 中国国际贸易促进联合会 广东省电子商会
青岛德尔展览有限公司 山东省电子学会制造技术专业委员会 山东省照明电器行业协会理事单位
青岛市照明电器行业协会副会长单位 扬州市工商联(总商会)路灯产业商会

【承办单位】青岛德尔展览有限公司

【海外组展单位】香港东港国际展览有限公司

【协办单位】广州汇连展览有限公司 惠州大行会展有限公司

展区分为: 光通信展区 激光红外及应用展区 精密光学展 LED展



德尔展览

青岛德尔展览招商部:

地址: 青岛市山东路52号华嘉大厦201室

电话: +86-0532-85017066 传真: +86-0532-85833615

联系人: 赵莉 15820035503 工作QQ: 166820119