

麦克斯韦方程和规范理论的观念起源*

杨振宁^{1,2} 著 汪忠^{1,2} 译

(1 清华大学高等研究院 北京 100084)

(2 香港中文大学物理系 香港沙田)

2014-11-12收到

✉ email:wangzhongemail@gmail.com

DOI: 10.7693/wl20141201

早在法拉第的“电紧张态(electrotonic state)”和麦克斯韦的矢量势(vector potential)概念中,规范自由度(gauge freedom)的存在就已经不可避免。它如何演化成为一个支撑粒子物理标准模型的对称原理?这里有一段值得叙说的故事。

人们常说,继库仑(Charles Augustin de Coulomb)、高斯(Carl Friedrich Gauss)、安培(André Marie Ampère)、法拉第(Michael Faraday)发现了电学和磁学的四条实验定律之后,麦克斯韦(James Clerk Maxwell)引入了位移电流,在他的麦克斯韦方程组中实现了电磁学的伟大综合。这种说法不能说是错的,但它并没有道出微妙的几何和物理直觉之间的关联,而正是这种关联促使场论在19世纪取代了超距作用的概念,也正是它带来了20世纪粒子物理中非常成功的标准模型。

1 19世纪的历史

1820年奥斯特(Hans Christian Oersted, 1777—1851)发现电流能使其附近的小磁针偏转。这一发现使整个欧洲科学界大为振奋,带来的结果之一是安培(1775—1836)关于“超距作用(action at a

distance)”的成功理论。在英格兰,法拉第(1791—1867)也因为奥斯特的发现而激动不已,但他缺乏足够的数学训练,所以无法理解安培的工作。在1822年9月3日写给安培的一封信中,法拉第叹息道:“很不幸,我不具备足够的数学知识,也不具备自如地进行抽象推理的能力。我只能从那些相互密切关联着的事实中摸索出自己的道路。”^[1]

法拉第所说的“事实”指的是他那些已发表和未发表的实验。从1831年到1854年的23年间,他把这些实验结果汇编成三卷本,取名《电学的实验研究》,这里我们简称为ER(见图1)。不同寻常的是,这三卷本不朽巨著里竟然没有一个公式。从这里我们可以看到,法拉第确实是以几何直觉而非代数公式的方式摸索他的道路。

图2展示了法拉第1831年10月17日的日记里的一幅图,这一天,他发现把一根磁棒放入或移出一个螺线管,就会在其中产生电流。他就这样发现了电磁感应现象。这个发现使得制造大大小小的发电机成为可能,由此改变了人类的技术发展史。

在ER三卷本里,法拉第记录了他的电磁感应实验的各种变种:他改变缠绕螺线管的金属品种,把螺线管放在各种介质中;在两个线圈之间产生电磁感应;诸如此类。他对以下两种现象印象深刻:第一,只有运动的磁体才能产生电磁感应;第二,电磁感应产生的效果似乎与动因(cause)垂直。

在理解电磁感应的摸索中,他引进了两个几何概念:磁力线(magnetic lines of force)和电紧张态(electrotonic state)。前者很容易图像化,只要



图1 法拉第的《电学的实验研究》三卷本,分别发表于1839年,1844年和1855年。右侧是第一卷的扉页

* 原文已发表于 *Physics Today*, 2014年11月刊,第45—51页

在磁体和螺线管附近撒上一些铁屑就行了。我们今天用磁场强度 H 来表示这些力线。后一个概念，也就是电紧张态，在 ER 全书中一直模糊不清，难以捉摸。它在第一卷中很早就出现了，见于第60节，但是没有明确定义。在后续部分它以不同的名字出现过：奇特态(peculiar state)、张力态(state of tension)、奇异状态(peculiar condition)，还有其他一些名称。例如，在第66节他写道“所有金属都可以呈现奇异态”；在第68节，他又写道“这一状态好像是瞬间呈现的。”此外，我们在第1114节还读到：

如果我们努力把电和磁理解为同一个物理作用者(agent)的两面，或者说是物质的一种奇异状态(peculiar condition)，表现在相互垂直的两个方向上，那么根据我的理解，我们必须认为这两种形态或者说两种力之间或多或少可以互相转化。

1854年时法拉第已经63岁，此后他不再编写 ER ，但是直到那时，他的几何直觉——所谓电紧张态，还缺乏明确定义，显得难以捉摸。

2 麦克斯韦登场

恰好也在1854年，麦克斯韦(1831—1879)从剑桥大学三一学院毕业。此时他23岁，朝气蓬勃，热情洋溢。他在2月20日给汤姆孙(William Thomson)写了一封信：

假如一个人对通常的电学展示实验有些了解，但不太喜欢墨菲(Murphy)的《电学》，他应该如何阅读和工作，才能在这个方向上收获一些对进一步阅读有益处的见解呢？

如果他想读安培、法拉第的那些著作，他应该怎么安排呢？在什么阶段他能够阅读您发表在剑桥杂志(Cambridge Journal)上的那些文章呢？以什么次序研读呢？^[2]

汤姆孙(1824—1907，后来被称为开尔文勋爵)是一个神童。当时他担任格拉斯哥大学教授已经八年了。麦克斯韦找对了人：1851年汤姆孙引进了今天我们称之为矢量势的 A ，从而将磁场表

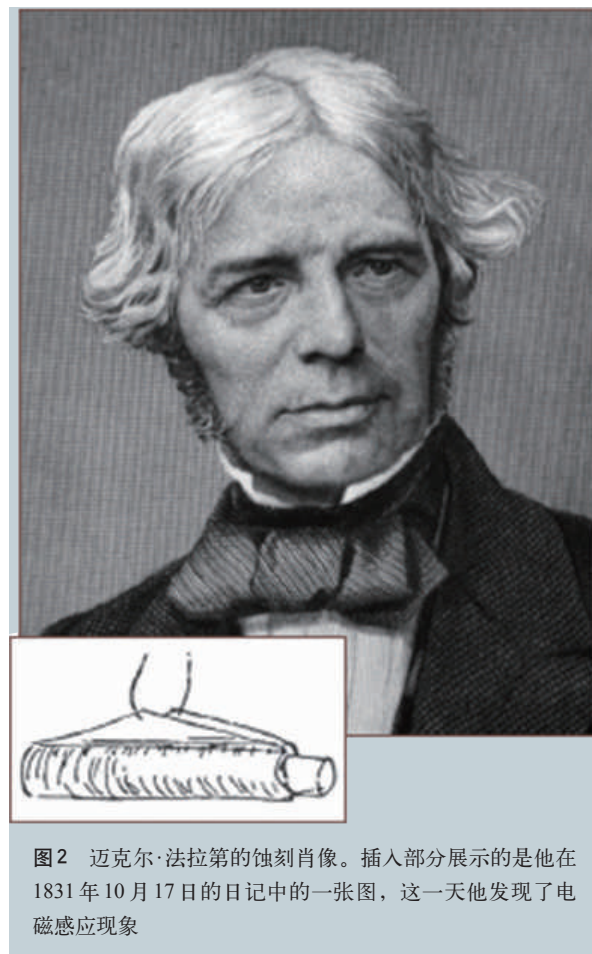


图2 迈克尔·法拉第的蚀刻肖像。插入部分展示的是他在1831年10月17日的日记中的一张图，这一天他发现了电磁感应现象

示为

$$H = \nabla \times A, \quad (1)$$

我们接下来会看到，这个方程对麦克斯韦来说具有重大意义。

我们不知道汤姆孙是如何答复麦克斯韦的。我们只知道，仅仅一年多后，麦克斯韦在他的文章里就利用方程(1)阐明了法拉第的电紧张态的含义。这篇文章是他那永远改变物理学和人类历史的三篇伟大论文中的第一篇。它们和麦克斯韦的其他一些作品可见于尼文(William Davidson Niven)在1890年编辑的两卷本文集《麦克斯韦科学论文集》(Scientific Papers by James Clerk Maxwell, 以下简称 JM)。

这篇发表于1856年的文章充满了数学公式，所以比法拉第的 ER 易读。它的主要结论包含在文章的第二部分，题为“法拉第的电紧张态”。在这部分(JM 的第204页)我们注意到一个方程，

用今天的矢量形式写出来是

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \quad (2)$$

这里的 \mathbf{A} 就是法拉第的电紧张强度(electrotonic intensity)。

在3页后,也就是 *JM* 的207页,这一结果由文字重新表达如下:

定律六:导体中任何部位的电动力(electromotive force)的大小和方向均由此处的电紧张强度的瞬时变化率决定。

将法拉第不可捉摸的电紧张态概念(或者称为电紧张强度、电紧张函数)等同于方程(1)中汤姆孙的矢量势 \mathbf{A} ,这件事在我看来是麦克斯韦科学研究中的第一个重大观念突破。对方程(2)左右两边都取旋度,我们得到

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{H}}, \quad (3)$$

这正是法拉第定律的现代形式。它的另一种现代形式是

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint \dot{\mathbf{H}} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (4)$$

这里 $d\mathbf{l}$ 是线元, $d\boldsymbol{\sigma}$ 是面积元。麦克斯韦没有以方程(3)和(4)的形式写下法拉第定律,因为他的主要目的是给予法拉第的不可捉摸的电紧张态一个精确定义。矢量势 \mathbf{A} 这一概念确实在麦克斯韦一生的思想中处于一个核心位置。

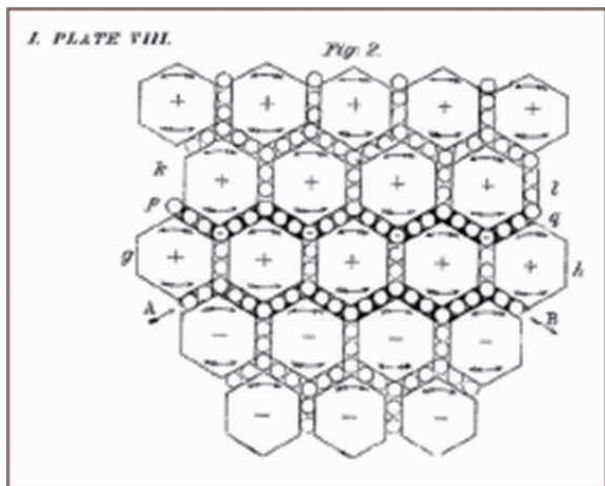


图3 涡旋图,选自1890年的文集《麦克斯韦科学论文集》中的插图页(第488页的对面)。倒数第二行里有两个六边形涡旋的箭头方向标错了,这可能是麦克斯韦的制图员的疏忽

用今天的术语来说,麦克斯韦知道方程(1—3)里含有规范自由度(gauge freedom),也就是说,给 \mathbf{A} 加上任意一个标量函数的梯度并不会改变最后结果。在 *JM* 第198页的定理5中,他明确讨论了规范自由度。那么在方程(1—3)中他采用了什么规范呢?他没有讨论这个问题,而是完全保留着 \mathbf{A} 的不确定性。我的结论是:麦克斯韦默认存在 \mathbf{A} 的某个规范使得方程(1—3)成立。

麦克斯韦也完全意识到将法拉第的电紧张态等同于汤姆孙的矢量势 \mathbf{A} 这件事的重要性。他担心由此可能会引起和汤姆孙之间的优先权问题。所以,他以如下评论结束第一篇文章的第二部分:

关于目前这一理论的历史,我可以这样说,据我所知,认识到某些数学函数恰好表示法拉第的“电紧张态”,以及利用它们来确定电势(electrodynamic potentials)和电动力(electromotive forces),这些是本文的原创;然而,清晰地构想数学表达的可能性,来自于我对汤姆孙教授论文的研读。(*JM*, 209页)

3 麦克斯韦的涡旋

在完成第一篇文章5年之后,麦克斯韦开始发表他的第二篇文章,它分成4个部分在1861年到1862年间陆续发表。和他之前的文章不同,这篇文章非常难懂。从 *JM* 第489页我们可以看到,这篇文章的主要想法是以如下方式来理解电磁现象:“按照这一假说,磁场里充满了无数旋转着的物质的涡旋,它们的转轴在每一点的方向都和磁场方向一致”。

麦克斯韦为这类复杂的涡旋群提供了一个明确的例子,见图3。对此,他在 *JM* 的第477页详细写道:

以 AB (插图页 VIII, 488 页, 图 2) 表示从 A 到 B 的电流。以 AB 上方和下方的较大空白区域表示涡旋,并以分隔这些涡旋的小圆圈表示它们之间的粒子层,在我们的假说里这些粒子代表电现象。

现在让一个电流从左向右通过 AB 。这将带动 AB 上方 gh 行的涡旋开始逆时针运动。(我们记作“+”方向,相反方向记作“-”方向。)我们可以设想 kl 行的涡旋还处在静止状态,这时,两行之间的粒子层的下方在 gh 行涡旋的带动下开始运动,而上方向尚处于静止。如果它们可以自由移动,它们将会朝负方向旋转,同时从右向左运动,或者说朝着 AB 电流的相反方向运动,它们形成了感生电流。

麦克斯韦模型的这一详细解释出现在他的第二篇文章的第二部分,最初发表在《哲学杂志》第21卷(1861年4—5月)。麦克斯韦对待他那复杂的涡旋网络模型的态度明显很认真,他在第二部分随后的11页里细致地研究了这一模型。

接下来,在1862年1—2月,麦克斯韦发表了第二篇文章的第三部分,标题是“分子涡旋理论应用于静电学”。通过7页分析,他得到命题14:“由于媒质的弹性而产生的电流方程的修正”(JM, 496页)。这个修正是指在安培定律中加入“位移电流(displacement current)” \dot{E} ,修改后的安培定律用现代符号可以写成 $\nabla \times H = 4\pi j + \dot{E}$ 。

为了搞清楚麦克斯韦是怎样得到他的修正项的,我曾经几次试图去读麦克斯韦论文第二部分的后11页和第三部分的开头7页。我尤其想了解他所说的“由于媒质的弹性”具体指的是什么。我的所有尝试都失败了。值得一提的是,在第二部分的后11页,“位移”这个词只是在第479页出现了一次,而且是在一个不太重要的句子里,可是在第三部分的开头7页,这个词成了麦克斯韦的重点。所以,在发表这两部分之间的8个月里,麦克斯韦大概探索了涡旋网络模型的新特征,并得出了位移电流。

在命题14之后,麦克斯韦很快得出电磁波应该存在这一结论。他计算了它们的速度,并和当时已知的光速作比较,得到了一个极其重大的结论,“我们几乎无法回避这样的结论:光是某种媒质的横向波动,这种媒质正是产生电磁现象的同一种媒质。”(JM, 500页,黑体是麦克斯韦自

己所加)。

麦克斯韦是个虔诚的教徒。我想知道,在做出如此巨大的发现后,麦克斯韦是否曾在祷告的时候因为揭示造物主的最大秘密之一而请求宽恕。

4 场论的诞生

麦克斯韦的第三篇文章发表于1865年,其中提出了今天我们所熟知的麦克斯韦方程组。如果用矢量形式写下来,它们是四个方程。麦克斯韦最初的方程有20个:他是用分量形式来写的;另外,麦克斯韦还加入了电介质和电流的方程。

正是这篇文章在历史上第一次清晰地阐明了场论的概念基础——能量储存在场中:

当我提及“场的能量”时,这个词指的就是它的字面含义。所有形式的能量都和力学能量一样,不论它以动能的形式、弹性能的形式、还是以其他形式存在。电磁现象中的能量也是一种力学能量。唯一的问题是:它储存在何处?在过去的理论里它存在于带电体、导电回路和磁体中,其形式是“势能”,或者说是一种产生超距作用(effects at a distance)的能力,而其本性则是未知的。在我们的理论中,能量不仅存在于带电体和磁体中,也存在于它们周围空间里的电磁场中。其存在方式有两种,不需要引入任何假说,它们可以被描述为电极化和磁极化;如果进一步引入一种非常可信的假说,它们可以被描述为同一种媒质的运动和应变(strain)。(JM, 564页)

但是,遵从当时流行的思想,麦克斯韦又写道:

根据光现象和热现象,我们有理由相信存在以太这样的媒质,它充满空间和物体,它能够被驱动,也能够把这种运动从一部分传导至另一部分,它还能够把这种运动传达至普通物质,从而加热它们或者以各种各样的方式影响它们。(JM, 528页)

麦克斯韦意识到,他的位移电流的发现以及光是电磁波的结论都具有深远意义。在第三篇文

章中，他收录了前两篇文章中的公式，把它们整理在一起。这时候他一定回顾了把他引向这些公式的推理过程。经过这番回顾，他会如何看待三年前促使他引入位移电流概念的那些复杂的涡旋网络呢？麦克斯韦并没有回答我们。但我们注意到，“涡旋”这个词在第三篇文章的整整71页里从未出现。因此，我们可以设想麦克斯韦在1865年时已经认为他在第二篇文章中采用的涡旋网络是不必要的。但他还是认为有必要引入“充满空间和物体的以太媒质”。

1886年，赫兹(Heinrich Hertz, 1857—1894)从实验上证实了麦克斯韦方程组的一个重要结论——电磁波可以被一个电流回路激发，并被另一个电流回路检测到。

从1880年代中期开始，亥维赛德(Oliver Heaviside, 1850—1925)和赫兹独立发现麦克斯韦方程组中的矢量势 A 可以消去。简化后的方程组展示出另一种魅力：电和磁之间的高度对称性。今天我们知道，在量子力学里，矢量势无法消去，它可以在阿哈罗诺夫—玻姆(Aharonov—Bohm)效应中被观察到。

5 步入20世纪

20世纪初期，场论发生了一次观念革命，它源于爱因斯坦在1905年提出的狭义相对论。狭义相对论断言自然界根本没有传导电磁场的所谓媒质：电磁场自身就是媒质。所谓“真空”，指的是场在某一时空区域的特定状态，它既没有电磁辐射也没有物质粒子。这就解决了1887年的迈克尔孙—莫雷(Michelson—Morley)实验所导致的疑难：这个实验试图寻找假想中的媒质“以太”，但是没有成功。今天，大多数物理学家倾向于认为爱因斯坦建立狭义相对论的原始动机并不是解释迈克尔孙—莫雷实验，而是要理解“同时性”这个概念的物理意义。

在1930到1932年间，由于正电子的发现，人们对真空的观念需要再次发生重大改变。根据保罗·狄拉克(Paul Dirac)的理论，真空是一个充满

“负能量电子”的无限海洋。这是场论中的又一次观念革命，其高潮是量子电动力学(QED)的建立。1930年代里，QED在低阶计算中很成功，然而，在高阶计算中，“无穷大”的问题总是纠缠不休。

1947—1950年间，由于一系列光辉夺目的实验和理论突破，QED取得了定量上的成功。在理论方面这有赖于一种计算高阶修正的方法——重整化(renormalization)。这类计算给出的最新的电子反常磁矩数值($a=(g-2)/2$)和实验的符合程度十分惊人^[1]：误差仅在十亿分之一量级(参见Gerald Gabrielse, *Physics Today*, 2013年12月刊, 第64页)。

一方面，由于重整化程序在QED中的极大成功；另一方面，由于实验上更多新粒子被发现，人们试图推广场论，以便用于描述所有这些新粒子间的相互作用。标量介子场的矢量形式的相互作用，赝标量介子场的赝标量形式的相互作用，诸如此类的模型，以及其他奇特而难懂的理论在文献书籍中频繁出现。然而，这些努力并没有为理解自然界的相互作用带来根本的进展。另外一些人热心于寻找场论的替代品，但同样没有取得真正的突破。

6 重返场论

1970年代，物理学家重返场论。这次他们采用的是非阿贝尔规范理论(non-abelian gauge theory)，它是麦克斯韦理论的一个优美推广。这里的形容词“非阿贝尔”有着精确含义：相继的两次操作(例如转动)得到的最终结果依赖于操作次序(我在《爱因斯坦对理论物理的影响》中曾介绍过规范理论，见*Physics Today*, 1980年6月刊, 第42页。更技术性的介绍可见于*Physics Today*, 1982年3月刊, 第41页，作者为辛格(Isidore Singer))。今天，在深入理解自然界中的各种相互作用的结构这个问题上，规范理论是一个基础性的概念。它起源于数学家赫尔曼·魏尔(Hermann Weyl)发表于1918—1919年间的三篇文章。这些文章曾受影响于爱因斯坦的电磁学几何化的想法^[4]。

魏尔意识到“平行移动”这个概念的重要性。他论证道：“为了与自然界相符，黎曼几何必须建立在矢量的无穷小平行移动这一观念上”。魏尔进一步说，既然在平行移动中，矢量场的方向不断改变，那为什么不允许它的长度也改变呢？由此出发，魏尔提出了所谓“nonintegrable Streckenfaktor(不可积伸缩因子)”的概念，或者叫“Proportionalitätsfaktor”，它通过如下公式和电磁场发生联系：

$$\exp\left(-\int eA_\mu dx^\mu/\gamma\right), \quad (5)$$

在这里 A_μ 是四维矢量势，系数 γ 是实数。魏尔给在时空中运动的每个带电物体都附加一个伸缩因子。在魏尔的第二篇文章后爱因斯坦添加了一个附注，其中爱因斯坦批评了平行移动改变长度的想法，魏尔未能有力地反驳爱因斯坦的毁灭性评论。

在量子力学建立后的1925—1926年，福克(Vladimir Fock)和伦敦(Fritz London)独立指出，在量子力学里， $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ 应该由如下公式取代：

$$-i\hbar\left(\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar}A_\mu\right), \quad (6)$$

这个公式又意味着在方程(5)中， $eA_\mu dx^\mu/\gamma$ 应该由 $ieA_\mu dx^\mu/\hbar$ 替代，也即 γ 由 $-i\hbar$ 替代。

魏尔显然接受了 γ 必须为虚数的想法，所以他在1929年的一篇重要文章中定义了QED中的规范变换这一概念，并证明了麦克斯韦理论在量子力学的框架下具有规范不变性。

在任一规范变换下，魏尔的长度伸缩因子应由如下因子替代

$$\exp\left(-i\frac{e}{\hbar}\int A_\mu dx^\mu\right), \quad (7)$$

它显然应该称为“相位变化因子”。通过这一替换，爱因斯坦最初的批评不再成立了。

麦克斯韦方程组具有高度的对称性，这个事实在1905—1907年间已经由爱因斯坦和闵可夫斯基(Hermann Minkowski)分别认识到，他们发现了麦克斯韦方程组的洛伦兹不变性。魏尔在1929年发现了规范对称性，从而揭示了麦克斯韦方程组的又一对称性。今天我们已知，这些对称

性使得麦克斯韦方程组成为理解物理宇宙的结构的基础支柱。

魏尔的规范变换涉及到时空中的逐点 $U(1)$ 转动，或者说复平面上的转动。这一点和麦克斯韦的转动涡旋有着显著相似。当然，这种相似是个巧合。

从数学上看，公式(7)中的相位因子形成一个李群 $U(1)$ ，而魏尔最喜爱的研究领域之一正是李群。对背景知识较多的读者，我可以提出一个猜测：假如纤维丛理论在1929年前就建立了，魏尔显然会认识到电磁学就是一个 $U(1)$ 纤维丛理论，并且很有可能在那时就把它推广为非阿贝尔规范理论，因为这正是他1929年的理论的自然延伸。

历史上，这一延伸发生于1954年，并且来自不同的动机。新的动机并不是基于纯数学上的考虑。当时粒子物理实验中涌现出越来越多的“奇异”粒子，因此迫切需要一个原理来描述它们之间的相互作用。这一物理动机简洁地体现在以下这个发表于1954年的摘要里：

电荷是电磁场的源；这里有一个名为规范不变性的重要观念，它与以下几件事物有紧密联系：(1)电磁场的运动方程；(2)流密度的存在性；(3)带电体和电磁场之间的可能的相互作用。我们尝试推广这一概念，将它用于同位旋守恒。^[5]

这一推广带来了非常美妙的非阿贝尔规范场论(non-abelian field theory)。然而，这一理论似乎要求存在无质量的带电粒子，这些粒子在自然界中并没有见到，所以在很长一段时间里，这一理论在物理学界并没有得到认可。

为了给这些无质量粒子以质量，人们在1960年代引进了对称性自发破缺的概念。这一概念带来了一系列重大进展，并最终带来一个基于 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ 群的规范理论，我们今天称之为标准模型(standard model)，它描述了电弱相互作用和强相互作用。从1960年左右算起，大约50年里，粒子物理领域的众多实验和理论物理学家们努力验证并发展了此标准模型，这里既有人努力，也有集体协作。这些不懈努力获得了炫目的成功，最近的一个高潮是2012年希格斯玻色

子在欧洲核子研究中心(CERN)被两个大型实验组发现(见 *Physics Today*, 2012年9月刊, 第12页)。

尽管如此成功, 标准模型不可能是终极理论。首先, 标准模型包含几十个参数。更重要的是, 作为标准模型的一个核心部分, “对称性自发破缺” 机制是一个纯粹唯象的构造, 它在很多方面与费米的“四费米子相互作用(four- ψ interaction)” 相似^[6]。在1934年被提出后, 费米理论保持了近40年的成功, 但它最终被更深刻的 $U(1) \times SU(2)$ 电弱统一理论(electroweak theory)取代。

1850年代汤姆孙和麦克斯韦已经明确知晓规范自由度。在难以捉摸的“电紧张态”中, 法拉第可能也曾模糊地感觉到了它。1929年, 魏尔在量子力学的框架内把规范自由度转述为麦克斯韦方程组的一个对称性(或称“不变性”)。今天我们称这一对称性为“规范对称性”, 它已经成为标准模型的结构性支柱。

麦克斯韦方程组是线性的。在非阿贝尔规范理论中, 方程组是非线性的。从观念上来说, 这一非线性的起源类似于广义相对论方程的非线性。关于后者, 爱因斯坦曾写道:

我们在这里只讨论纯引力场的方程。

这些方程的奇特性一方面在于它们的复杂构造, 特别是方程对于场变量和它们的微商的非线性特征; 另一方面在于这些复杂的场定律在很大程度上几乎完全被变换群所确定。(见参考文献[7], 第75页)

真实的自然定律不可能是线性的, 也不可能从线性方程中导出。(见参考文献[7], 第89页)

在完全独立于物理学发展的道路上, 20世纪

前半叶诞生了一个名为纤维丛(fiber bundle)的数学理论。这一理论有众多源头, 包括微分形式(主要归功于嘉当(Élie Cartan))、统计学(Harold Hotelling)、拓扑学(Hassler Whitney)、整体微分几何(陈省身)以及联络理论(Charles Ehresmann)。概念起源的多样性表明了纤维丛是个核心的数学构造。

在1970年代, 人们发现规范理论的数学形式和纤维丛完全一致, 这对物理学家和数学家都是一个震撼^[8]。但这也是一个大家乐于感受的震撼, 因为它提供了一个沟通数学和物理的桥梁, 而这种沟通曾在20世纪中期以后因为数学进展的高度抽象性而中断过。

在1975年, 我从我的数学同事西蒙斯(James Simons)那里学到了纤维丛理论的一些基础知识, 随后我给他看了狄拉克在1931年发表的一篇关于磁单极子的文章。他惊呼: “狄拉克领先于数学家发现了平凡和非平凡的纤维丛。”

在即将结束我们这个关于规范理论观念起源的简略概述时, 也许我们可以引用1867年麦克斯韦在法拉第去世的时候的悼词:

法拉第通过他的力线概念来统一地理解各种电磁感应现象, 他运用这种想法的方式显示出他是一位高超的数学家——未来的数学家将能从他那里获得丰富而有价值的方法……

从欧几里得的直线到法拉第的力线, 这正是推动科学进步的思想的特征。通过自由运用动力学和几何学的思想, 我们也期望未来能有新的进展……

以我们正在积累的素材为基础, 也许下一个像法拉第一样的哲人能够发展出全新的科学, 而我们今天很可能连它的名称都还不知道。

参考文献

- [1] James F A J L(ed.). The Correspondence of Michael Faraday, Vol. 1. Institution of Electrical Engineers, 1991, p. 287
- [2] Larmor J. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1936, 32:695. p.697
- [3] Kinoshita T. in Proceedings of the Conference in Honour of the 90th Birthday of Freeman Dyson. Phua K K et al(eds.). World Scientific, 2014. p.148
- [4] 关于这件事及其后续历史, 参见杨振宁发表于此书的文章: Hermann Weyl, 1885—1985: Centenary Lectures. Chandrasekharan K(ed.). Springer, 1986. p.7; 以及文章: Wu A C T, Yang C N. Int. J. Mod. Phys. A, 2006, 21:3235
- [5] Yang C N, Mills R. Phys. Rev., 1954, 95:631
- [6] 费米原始论文的英文翻译见于: Wilson F L. Am. J. Phys., 1968, 36:1150
- [7] Schilpp P A(ed.). Albert Einstein: Philosopher-Scientist. Open Court, 1949. 这两段话摘自爱因斯坦在1946年(当时他67岁)的自述
- [8] Wu T T, Yang C N. Phys. Rev. D, 1975, 12:3845