

走近量子纠缠系列之五

贝尔不等式

张天蓉[†]

2015-01-06收到

[†] email: tianrong1945@gmail.com

DOI: 10.7693/wl20150107

1963—1964年，在长期供职于欧洲核子中心(CERN)后，约翰·贝尔有机会到美国斯坦福大学访问一年。北加州田园式的风光，四季宜人的气候，附近农庄的葡萄美酒，离得不远的黄金海滩，加之斯坦福大学既宁静深沉又宽松开放的学术气氛，孕育了贝尔的灵感，启发了他对EPR佯谬及隐变量理论的深刻思考。

贝尔开始认真考察量子力学能否用局域的隐变量理论来解释。贝尔认为，量子论表面上获得了成功，但其理论基础仍然可能是片面的，如同瞎子摸象，管中窥豹，没有看到更全面、更深层的东西。在量子论的深处，可能有一个隐身人在作怪：那就是隐变量。

根据爱因斯坦的想法，在EPR论文中提到的，从一个大粒子分裂成的两个粒子的自旋状态，虽然看

起来是随机的，但却可能是在两粒子分离的那一刻(或是之前)就决定好了的。打个比喻说，如同两个同卵双胞胎，他们的基因情况早就决定了，无论后来他(她)们相距多远，总在某些特定的情形下，会作出一些惊人相似的选择，使人误认为他们有第六感，能超距离地心灵相通。但是实际上，是有一串遗传指令隐藏在他们的基因中，暗地里指挥着他们的行动，一旦我们找出了这些指令，双胞胎的“心灵感应”就不再神秘，不再需要用所谓“非局域”的超距作用来解释了。

尽管粒子自旋是个很深奥的量子力学概念，并无经典对应物，但粗略地说，我们可以用三维空间的一段矢量来表示粒子的自旋。比如，对EPR中的纠缠粒子对A和B来说，它们的自旋矢量总是处于相反的方向，如图1中所示的红色矢量和蓝色矢量。这两个红蓝自旋矢量，在三维空间中可以随机地取各种方向，假设这种随机性来自于某个未知的隐变量 L 。为简单起见，我们假设 L 只有8个离散的数值， $L=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ，分别对应于三维空间直角坐标系的8个卦限。

由于A、B的纠缠，图中的红色矢量和蓝色矢量总是应该指向相反的方向，也就是说，红色矢量的方向确定了，蓝色矢量的方向也就

确定了。因此，我们只需要考虑A粒子的自旋矢量(简称红矢)的空间取向就够了。假设红矢出现在8个卦限中的概率分别为 n_1, n_2, \dots, n_8 。由于红矢的位置在8个卦限中必居其一，因此我们有： $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8=1$ 。

现在，我们来描述A、B的自旋矢量在三维空间可能出现的8种情况。表1左半部分列出了在这些可能情况下，自旋矢量在 x, y, z 方向的符号。

既然AB二粒子系统形成了互为关联的纠缠态，我们便定义几个关联函数，用数学语言来更准确地描述这种关联的程度。比如，我们可以如此来定义 $P_{xx}(L)$ ：观察 x 方向红矢的符号和 x 方向蓝矢的符号，如果两个符号相同，函数 $P_{xx}(L)$ 的值就为+1，否则，函数 $P_{xx}(L)$ 的值就为-1。我们从表1列出的红矢和蓝矢的符号不难看出， $P_{xx}(L)$ 的8个数值都是-1。然后，我们使用类似的原则，可以定义其他的关联函数。比如说， $P_{xz}(L)$ ，是 x 方向红矢符号与 z 方向蓝矢符号的关联，等等。在表1的右半部分，我们列出了 $P_{xx}(L), P_{xz}(L), P_{yz}(L)$ 和 $P_{xy}(L)$ 的数值。

现在，贝尔继续按照经典的思维方式想下去：一个大粒子分裂成两个粒子A和B，A、B的自旋看起来是随机的，但实际上是按照上面的列表互相关联着的。然后，它们

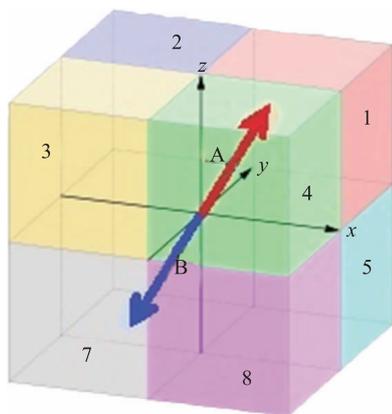


图1 8个卦限中纠缠态粒子A和B的自旋

表1 AB纠缠态自旋矢量的8种可能性以及4个相关函数的值

| L | A_x, A_y, A_z (红矢) | B_x, B_y, B_z (蓝矢) | P | $P_{xx}(L)$ | $P_{xz}(L)$ | $P_{zy}(L)$ | $P_{yy}(L)$ |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | + + + | - - - | n_1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | - + + | + - - | n_2 | -1 | +1 | -1 | +1 |
| 3 | - - + | + + - | n_3 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 4 | + - + | - + - | n_4 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 5 | + + - | - - + | n_5 | -1 | +1 | +1 | -1 |
| 6 | - + - | + - + | n_6 | -1 | -1 | +1 | +1 |
| 7 | - - - | + + + | n_7 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | + - - | - + + | n_8 | -1 | +1 | -1 | +1 |

朝相反方向飞去。经过一段时间之后，两个粒子A和B分别被两方的观测仪器俘获了。两方的观测者分别对A和B的自旋方向进行测量。因为 L 是不可知的隐变量，因此，只有关联函数的平均值才有意义。根据表1中的数值，我们不难预测这几个关联函数被测量到的平均值：

$$P_{xx} = -n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - n_6 - n_7 - n_8 = -1,$$

$$P_{xz} = -n_1 + n_2 + n_3 - n_4 + n_5 - n_6 - n_7 + n_8,$$

$$P_{zy} = -n_1 - n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 - n_7 - n_8,$$

$$P_{yy} = -n_1 + n_2 - n_3 + n_4 - n_5 + n_6 - n_7 + n_8.$$

让我们直观地理解一下，这几个关联函数是什么意思呢？可以这样来看： P_{xx} 代表的是A和B都从 x 方向观测时，它们的符号的平均相关性。因为纠缠的原因，A，B的符号总是相反的，所以都从 x 方向观察时，它们的平均相关性是-1，即反相关。类似地， P_{xz} 代表的是从 x 方向观测A且从 z 方向观测B时，它们符号的平均相关性。如果自旋在每个方向的概率都一样，即 $n_1 = n_2 = \dots = n_8 = 1/8$ 的话，我们会得到 P_{xz} 为0。对 P_{zy} 和 P_{yy} ，也得到相同的结论。换言之，当概率均等时，如在相同方向测量A，B的自旋，应该反相关；而如果在不同方向测量A和B的自旋，平均来说应该不

相关。

我们可以用一个通俗的比喻来加深对上文的理解：两个双胞胎A和B，出生后从未见过面，互相完全不知对方情况。一天，两人分别来到纽约和北京。假设双胞胎诚实不撒谎。当纽约和北京的警察问他们同样的问题：“你是哥哥吗？”，如果A回答“是”，B一定是回答“不是”，反之亦然。对这个问题，他们不需要互通消息，回答一定是反相关的，因为问题的答案是出生时就因出生的顺序而决定了(这相仿于 $P_{xx} = -1$ 的情况)。但是，如果纽约警察问A：“两人中你更高吗？”，而北京警察问B：“你跑得更快吗？”，按照我们的经典常识，两人出生后互不相识，从未比较过彼此的高度，也从未一起赛跑。所以，他们的回答就应该不会相关了(这相仿于 $P_{xz} = 0$ 的情况)。

现在再回到简单的数学：我们在 P_{xx} ， P_{zy} 和 P_{yy} 的表达式上做点小运算。首先，将 P_{xz} 和 P_{zy} 相减再取绝对值后，可以得到：

$$|P_{xz} - P_{zy}| = 2|n_2 - n_4 - n_6 + n_8|$$

$$= 2|(n_2 + n_8) - (n_4 + n_6)|. \quad (1)$$

然后，利用有关绝对值的不等式 $|x - y| \leq |x| + |y|$ ，我们有：

$$2|(n_2 + n_8) - (n_4 + n_6)| \leq 2(n_2 + n_4 + n_6 + n_8)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8) +$$

$$(-n_1 - n_2 - n_3 + n_4 - n_5 + n_6 - n_7 + n_8)$$

$$= 1 + P_{yy}. \quad (2)$$

这样，从(1)式和(2)式，我们得到一个不等式：

$$|P_{xz} - P_{zy}| \leq 1 + P_{yy}. \quad (3)$$

这就是著名的贝尔不等式。上述不等式是贝尔应用经典概率的思维方法得出的结论。因此，它可以说是在经典的框架下，这3个关联函数之间要满足的一种约束条件。也就是说，如果大粒子分裂成的两个小粒子A和B是经典粒子的话，它们便必须遵循经典统计的规律，必须满足由经典概率方法得到的贝尔不等式！

但是，如果我们考虑量子力学，将两个小粒子A和B当成是量子力学中的粒子，情况又将如何呢？它们的行为当然只有两种情形：遵循贝尔不等式，或者不遵循贝尔不等式。如果遵循贝尔不等式的话，那就好了，万事大吉！爱因斯坦的预言实现了。量子力学中的粒子也应该是满足“局域实在论”的，虽然在微观世界中的量子有时候表现得行为诡异，那只不过是因为有某些我们尚且不知道的隐变量而已，那不用着急，将来我们总能

挖掘出这些隐变量来。第二种情况，那就是量子现象不遵循贝尔不等式，也就是说，不能简单地用隐变量的理论来解释量子现象。贝尔用他的“贝尔定理”来表述这种情况：“任何局域隐变量理论都不可能

重现量子力学的全部统计性预言”。如果是这样的话，世界好像有点乱套！不过没关系，贝尔说，重要的是，这几个关联函数都是在实验室中可以测量到的物理量。这样，我的不等式就为判定EPR和量子力学

谁对谁错提供了一个实验验证的方法。那好，理论物理学家们说，我们就暂时停止毫无意义的、纯理论的辩论，让将来的实验结果来说话吧。

拓扑绝缘体中的自旋虹吸

传统的电子设备使用线路中运动电子的电荷来完成特定的任务。这里我们要讨论的问题与传统电子设备的情况不同，区别在于，在电子线路中，携带信息的载体不再是电子电荷，而是电子自旋。基于电子自旋流动的器件可以提供许多潜在的新功能，当然，为了真正实现上述目标，凝聚态物理学家和材料科学家仍将面临挑战。最近，来自美国康奈尔大学的Mellnik等在*Nature*上撰文，报道了他们自己在新颖材料——拓扑绝缘体中所产生的自旋流，这个自旋流对于贴近的磁性薄膜中的铁磁取向可产生相当大的影响。具体地说，自旋流对磁性薄膜中的磁矩施加力矩，就好像在拓扑绝缘体中产生的自旋积累，通过自旋虹吸作用进入到了铁磁薄膜区域。这一机制将大大改进未来信息存储和处理的能效。

传统微电子器件的尺寸越来越小，从而产生了微电子器件发展的瓶颈：(1)器件发热；(2)为保持逻辑

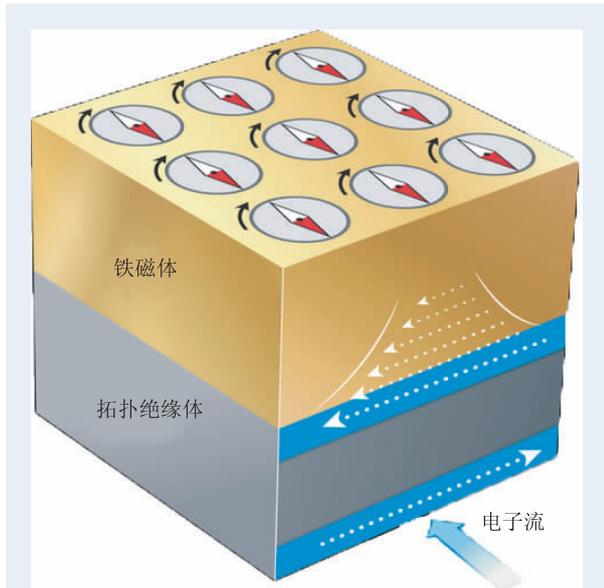


图1 Mellnik 等的实验原理图

物理新闻和动态

门的静止状态必须持续地供电，从而消耗能量。因为纯的自旋流不产生热，开发应用自旋流的器件可以解决器件发热问题。另外，为了避免上述瓶颈(2)，可以采用“不挥发”的磁性存储器与逻辑器件结合的方法，使断电时仍能保持原来的逻辑状态。

铁磁性金属是自旋电子学的基础材料，在铁磁材料中，电流自然是自旋极化的(例如，当自旋向上的电子多于自旋向下的电子时，则被称为自旋极化向上)。这一性质允许铁磁体的取向状态被自旋极化的电子电流转换。在Mellnik等的实验中，Ni-Fe铁磁薄膜与Bi₂Se₃拓扑绝缘体薄膜接触在一起，形成双层膜(见图1)。对这个双层膜通入交变电流，在拓扑绝缘体表面将产生极化自旋的积累，进而自旋积累从拓扑绝缘体扩散至铁磁体，驱动铁磁体中的磁共振，即当交变电流频率为某一适当值时，铁磁体中的磁矩进动大大增强。这意味着在拓扑绝缘体中通入交变电流后，的确可以产生自旋极化的积累，而后者对铁磁层中的磁矩可以施加可控的自旋转移转矩。

在图1中，带有红色箭头的小磁针代表铁磁层中的磁矩，蓝色部分代表拓扑绝缘体薄膜断面的上层表面和下层表面。事实上，在拓扑绝缘体中，输入的射频电流只沿着表面流动，因为这里的电阻小。白色的虚线箭头代表因输入交变电流而引起的特定取向的自旋积累。离拓扑绝缘体薄膜表面越远，自旋积累越少，呈指数衰减趋势，这是因为拓扑绝缘体薄膜中的极化自旋扩散至铁磁层。自旋扩散导致施加一个转矩于铁磁体中的磁矩，使后者绕其平衡取向进动。

多层膜巨磁电阻发展的历史告诉我们，从原理发现(使用分子束外延材料)到大规模应用(使用廉价的溅射膜)仅仅用了大约10年的时间。照此办理，拓扑绝缘体在自旋电子学中扮演角色(即拓扑绝缘体在室温被用于布居磁性材料的磁化方向)，或许也用不了很长时间。

(戴 闻 编译自*Nature*, 2014, 511: 418, 449)