

原子核的四面体对称性*

陈永寿[†]

(中国原子能科学研究院 北京 102413)

2014-09-29收到

[†] email: yschen@ciae.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20150503

Tetrahedral symmetry in atomic nuclei

CHEN Yong-Shou[†]

(China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China)

摘要 除了几个幻数核呈球形外, 原子核大都是变形的, 例如椭球形。现代核物理实验已发现, 原子核可以呈“梨形”形变, 即具有反射不对称性。理论研究预言, 原子核还可能具有“金字塔”形变, 即四面体对称性, 而实验上还未找到原子核的这种新对称性。文章从强相互作用量子多体体系的对称性及其破缺的基本规律出发, 阐明原子核四面体形变的形成机制, 并介绍其理论描述。同时讨论寻找四面体形变原子核的基本方法和最新实验研究进展。

关键词 原子核形变, 反射不对称性, 四面体对称性, 反射不对称壳模型, 在束伽马谱学

Abstract Atomic nuclei are usually deformed except for a few magic nuclei which are spherical in shape. Modern nuclear experiments have discovered that some nuclei may have a pear-like shape, with reflection asymmetry. According to theory, other nuclei may also have a pyramid-like shape with tetrahedral symmetry, but this new nuclear symmetry has not yet been discovered experimentally. This paper aims to explain the formation mechanism of the tetrahedral symmetry as well as give a theoretical description based on the symmetry and symmetry-breaking of a quantum strong interaction many-body system. The basic ways to search for tetrahedral nuclei and recent experimental developments are also discussed.

Keywords nuclear deformation, reflection asymmetry, tetrahedral symmetry, reflection asymmetric shell model, in-beam gamma-ray spectroscopy

1 原子核形变

对称性及对称性破缺是自然界的一个基本规律。四面体对称性是一个普遍物理现象, 它在分子、金属簇团和其他量子微观物理体系中都有存在。例如, 甲烷分子(CH_4)就是一个正四面体的结构, 一个碳原子在中心, 四个顶角上各有一个氢原子, 任何两个氢原子同碳原子之间连线的夹角

都是 109.5° , 如图1(a)所示。在核物理中, 四面体对称性是否成立, 四面体(像“金字塔”)形状的原子核是否存在, 这是一个很多人感兴趣的科学问题。甲烷分子是一个电磁相互作用的量子体系, 而原子核是强相互作用的量子体系, 四面体原子核的实验发现无疑将是四面体对称性的普遍性的一个重要扩展。到目前为止, 四面体对称性在原子核中是否真的存在, 仍然是一个未解之谜。本文从强相互作用量子多体体系的对称性及其破缺的基本规律出发, 阐明原子核四面体形变

* 国家自然科学基金(批准号: 11275068, 11175258)、国家创新研究群体科学基金(批准号: 11321064)资助项目

的形成机制，并介绍其理论描述，同时讨论寻找四面体形变原子核的基本方法和最新实验研究进展。

原子核的形状可以用球谐函数的展开来描述，核半径可表示为 $R(\theta, \phi) = R_0[1 + \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)]$ 。其中， R_0 为球形核半径，展开系数 $\alpha_{\lambda\mu}$ 为形变参数， (θ, ϕ) 是欧拉角。实验发现，许多原子核具有 Y_{20} 形变，它是一个旋转椭球形，称为轴对称的四极形变。 $\lambda=2$ 的形变叫四极形变，因 $2^2=4$ 而得名， $\mu \neq 0$ 时是非轴对称的，例如， Y_{22} 形变就是非轴对称的四极形变，通常叫做三轴形变，已被实验证实。实验还发现，不少原子核具有 Y_{30} 形变，它像“梨”形，称为轴对称八极形变，它对于空间反射是不对称的，但还存在一个旋转对称轴。非轴对称八极形变，即四面体形变， Y_{32} ，它对于空间反射是不对称的，同时也不存在任何一个旋转对称轴，即旋转对称性完全破坏，如图 1(b) 所示。

现代核物理实验发现，球形核很少，绝大多数的原子核都是变形的，并且球形核在高激发态下可以变成形变核。球形核和变形核的性质完全不同，前者的特征是单粒子运动，后者的特征是集体运动。然而，球形核和变形核形成的根本原因是一样的，那就是壳层结构效应，简称壳效应。所以，研究原子核的四面体形变，同研究其他形变一样，最根本的方法是研究壳结构，从理论和实验上研究相应的集体运动，以及集体运动同单粒子运动的关系。

2 反射不对称壳模型

原子核是由中子和质子组成的微观量子多体体系，服从量子力学的规律，它的内部运动能量是分立的能级，原子核的基态和若干激发态的能级又组成能谱。壳模型(shell model, SM)是用来计算原子核的能谱和波函数的最基本的微观理论，其方法就是在选取的基失空间里求解壳模型哈密顿量的本征值问题。反射不对称壳模型(reflection asymmetric shell model, RASM)，完全基

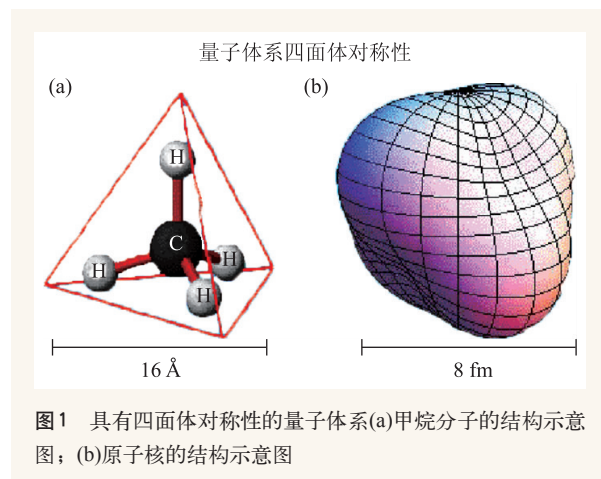


图1 具有四面体对称性的量子体系(a)甲烷分子的结构示意图；(b)原子核的结构示意图

于壳模型的基本思想，仅有的不同之处是采用了变形基失，而传统壳模型的基失是球形。传统壳模型在用于质量数 $A > 60$ 或者有形变的原子核时，遇到了致命的维度暴涨困难，即使用超级计算机也无法进行计算。RASM 通过采用变形基失，从而克服维度暴涨的困难，可以用来描述重核和变形核，特别是八极形变核，因此适合用来研究原子核的四面体对称性。关于 RASM 理论，可参考文献[1]，下面就其基本理论框架做一简要说明。在 RASM 中，波函数表示为投影基失的展开，

$$|\Psi_M^{lp}\rangle = \sum_{K\kappa} f_{K\kappa}^{lp} \hat{P}_{MK}^{lp} |\Phi_\kappa\rangle. \quad (1)$$

这里的 $|\Phi_\kappa\rangle$ 是变形的多准粒子态 (κ 标记其组态)，它没有宇称和角动量的好量子数，因此不能直接作为基失来对角化壳模型的哈密顿量。通过宇称和角动量投影得到的 $\{\hat{P}_{MK}^{lp} |\Phi_\kappa\rangle\}$ ，是一套具有宇称和角动量好量子数 (p, l) 的多准粒子态基失，可以用来对角化壳模型的哈密顿量。 \hat{P}_{MK}^{lp} 是宇称和角动量投影算符，

$$\hat{P}_{MK}^{lp} \equiv \frac{2l+1}{16\pi^2} (1 + p\hat{P}) \int d\Omega D'_{MK}(\Omega) \hat{R}(\Omega), \quad (2)$$

其中 \hat{P} 是宇称算符， $\hat{R}(\Omega)$ 是转动算符， Ω 是欧拉角，D-函数矩阵元 $D'_{MK}(\Omega) = \langle IM | \hat{R}(\Omega) | IK \rangle^*$ 。引入变形基使得壳模型空间大大缩小，克服了传统壳模型的维度暴涨困难，而代价是带来宇称和角动量投影的麻烦，不过这是可以解决的数学问题。RASM 本征值方程为

$$\sum_{K\kappa} \left\{ \langle \Phi_\kappa | (\hat{H} - E^{lp}) \hat{P}_{K\kappa}^{lp} | \Phi_\kappa \rangle \right\} f_{K\kappa}^{lp} = 0. \quad (3)$$

通过求解方程，可以得到作为角动量和宇称的函数的能量(能谱)，同时得到相应的波函数，从而可以计算原子核的其他可观测量。反射不对称壳模型的哈密顿量，包含许多核子在一个球形 Nilsson 势场里运动以及核子之间的相互作用，包括多极力 $Q \cdot Q$ 、单极对力 $P_0 \cdot P_0$ 和四极对力 $P_2 \cdot P_2$ ，

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=2}^4 \sum_{\tau\tau'} \chi_{\lambda\tau\tau'} \hat{Q}_{\lambda\tau} \cdot \hat{Q}_{\lambda\tau'} - \sum_{\tau} G_{M,\tau} \hat{P}_{0,\tau} \cdot \hat{P}_{0,\tau} - \sum_{\tau} G_{Q,\tau} \hat{P}_{2,\tau} \cdot \hat{P}_{2,\tau}. \quad (4)$$

这里 \hat{H}_0 是球形 Nilsson 哈密顿量， τ 和 τ' 标记中子或质子，第二项包括四极力($\lambda=2$)、八极力($\lambda=3$)和十六极力($\lambda=4$)。 $\chi_{\lambda\tau\tau'}$ 是多极相互作用强度，其值可由它同形变的自洽关系来确定，不是自由参数。 G_M 和 G_Q 分别是单极和四极对力强度，设两者成正比关系，通常取 $G_Q=0.12G_M$ 。

3 原子核的八极转动带

八极形变原子核能谱的基本特征是八极转动带，它包含正宇称基态带 $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$ 和负宇称激发带 $I^\pi = 1^-, 3^-, 5^-, \dots$ ，两带之间有增强的电偶极跃迁。图 2(a) 是氯化氢(HCl)分子的转动能谱同 ^{224}Ra 核转动能谱的比较。这两个不同的量子体系，却具有相似的能级结构，只是由于体系的尺度不同，两种能谱处在不同的能区，分子在毫电子伏，核在兆电子伏。两者能级结构的相似性，是由对称性决定的，即因为它们都具有同样的空间反射不对称性，如图 2(a) 顶部的子示意图所示。反射不对称壳模型的建立，是为了能够在壳模型层次上描述包括八极形变的变形原子核。轴对称八极形变核，“梨”形，的实验证据相当充分，主要分布在 Ra 核区和 Ba 核区。八极形变核一直是极端条件下核结构的一个重要研究方向。一项利用新一代加速器的实验研究最近在欧洲 CERN 实验室完成，这是首次用再加速的放射性核束去轰击重靶核的库仑激发实验。实验测量了八极形变核 ^{224}Ra 和 ^{220}Rn 的低能核谱，结果发表在 2013 年的 *Nature* 杂志上^[2]。八极形变核的研究不仅在核物理中有重要科学意义，而且关系到标准模型的检验。通过对电偶极矩(EDM)的测量，我们可以研究基本相互作用的时间 T-对称性破坏，以及电荷宇称 CP-对称性破坏，从而也检验 CPT-对称性。原子核的“梨”形形变可能引起 EDM 的放大，从而有利于它的观测，因此，准确地理解八极形变核就成为一个关键问题^[3]。我们用 RASM 计算了 ^{224}Ra 的能谱，计算结果同实验数据的比较见图 2(b)，理论与实验很好地符合。图中实验数据的低自旋部分($I \leq 14$)是放射性核库仑激发数据^[2]，而更高自旋部分是重离子融合蒸发反应数据^[4]。在实际计算中，单粒子态空间取 3 个主壳，即中子 5, 6, 7 壳和质子 4, 5, 6 壳。计算所用的 Nilsson 势参数为标准值^[5]，Nilsson 形变参数为：四极形变 $\epsilon_2 = 0.084$ ，八极形变 $\epsilon_3 = 0.07$ 和十六极形变 $\epsilon_4 = -0.12$ 。这些形变值合理，并与宏观—微观模型计算值是一致的。中子和质子的单极

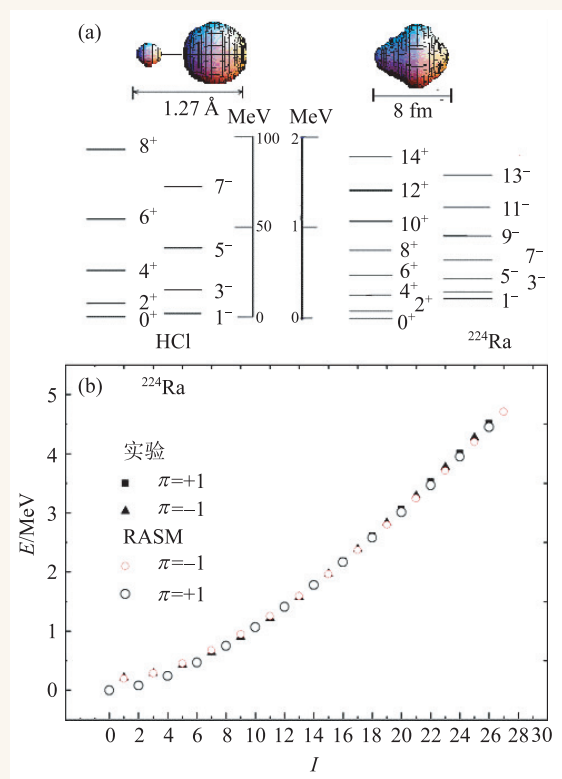


图 2 (a) ^{224}Ra 核的八极转动带同氯化氢分子能谱的比较；(b) ^{224}Ra 核八极转动带的实验数据同理论计算结果比较(实验数据取自文献[2, 4])

对力强度分别取 $15.2/A$ MeV 和 $19.2/A$ MeV, 其中 A 为原子核质量数。已有更多的事例说明, RASM 理论能够很好地再现八极转动带的基本特征, 包括正、负宇称交替的转动带, 低自旋处的宇称劈裂, 以及宇称劈裂随着自旋的增加而减小等, 见图 2(b)。

4 核四面体对称性的理论和实验研究

Dudek 等通过宏观—微观模型的计算, 预言稀土核 ^{156}Gd 具有四面体形变, 并提出实验已观测到的低能负宇称带是四面体转动带^[6]。该负宇称带的 $I^\pi = 1^-, 3^-, 5^-, \dots$, 如果它是四面体转动带, 那么这些态的电四极矩应接近为零。测量这些态的电四极矩是高难度的实验, 需要伽马射线的超高灵敏测量设备和技术, 这也是过去没有实验数据的原因。最近, Jentschel 等完成了这个具有判决性的实验, 他们测出了 5^- 态的电四极矩不接近于零, 而且很大, $Q_0 = 7.1^{+0.7}_{-1.6} \text{b}$, 否定了该稀土核的四面体性质^[7]。我们必须寻找新的四面体候选核。

RASM 理论研究表明, 四面体对称性在超铀核结构中有重要作用, 并且预言四面体对称性可能在超重核中存在。超重核是核物理的一个前沿研究领域, 已有不少合成超重核的核反应实验研究, 但由于受到实验技术的限制, 其核谱学实验数据几乎为零。超铀核可以视为最轻的超重核或者处于超重核区的大门口, 超铀核的结构信息对于超重核结构的研究无疑将具有重要意义。Sulignano 等观测到超铀核 ^{252}No ($Z=102$) 的核谱, 其最高自旋达到了 18。Greenlees 等观测到 $Z=104$ 元素核 ^{256}Rf 的基态转动带, 其最高自旋达到了 20^[8]。 ^{252}No 的实验核谱, 除了基态带 $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$, 还观测到一条负宇称激发带 $I^\pi = 2^-, 3^-, 4^-, \dots$, 其激发能相当低, 带头 2^- 态的能量小于 1 MeV^[9]。这种低激发能的负宇称带在超铀核中已发现 4 列, 其中包括 $Z=100$ 元素核 ^{250}Fm 的核谱^[10]。在发现这些 2^- 带的实验研究文献中, 它们被初步解释为 2 中子准粒子带^[10], 即属于通常在偶-偶核

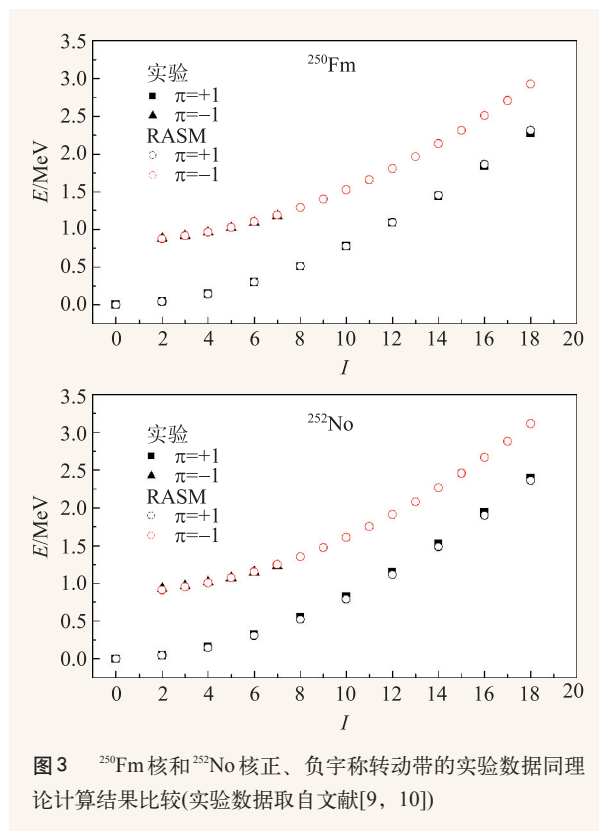


图3 ^{250}Fm 核和 ^{252}No 核正、负宇称转动带的实验数据同理论计算结果比较(实验数据取自文献[9, 10])

中观测到的单粒子激发带。然而, 这种解释只是一种推测, 尚无理论计算支持。在 RASM 理论框架内, 我们给出了全新的解释^[11]: 超铀核中发现的低激发能负宇称 2^- 带, 是非轴对称八极形变带, 因此是集体激发带, 而不是单粒子激发带。在假定四极形变和非轴对称八极形变($Y_{20}+Y_{32}$)的前提下, RASM 理论计算结果非常好地符合了所有相关实验数据^[11], 即 ^{246}Cm , ^{248}Cf , ^{250}Fm 和 ^{252}No 等 4 个超铀核的基态带和 2^- 带的实验数据。图 3 是 ^{250}Fm 和 ^{252}No 的计算能谱同实验能谱的比较, 理论同实验符合得非常好。在实际计算中, 单粒子态空间考虑了 3 个主壳, 即中子 5, 6, 7 壳和质子 4, 5, 6 壳。计算所用的 Nilsson 势参数为标准值^[5], 两个核的四极形变都取为 $\epsilon_2 = 0.235$, ^{250}Fm 的八极形变 $\epsilon_{32} = 0.107$, ^{252}No 的八极形变 $\epsilon_{32} = 0.110$ 。这些形变值都在合理的范围内, 并与宏观—微观模型计算值一致。RASM 计算结果表明, 非轴对称八极形变, 即四面体对称性, 在超铀核的核结构中起着重要作用, 四面体自由度在其核结构理论中是必须考虑的。RASM 计算同时表明, 虽然超

锕核中出现的低激发负宇称带的本质与四面体自由度密切相关, 但还不是纯粹的四面体对称性, 其四面体形变受到了四极形变的较大干扰, 即再

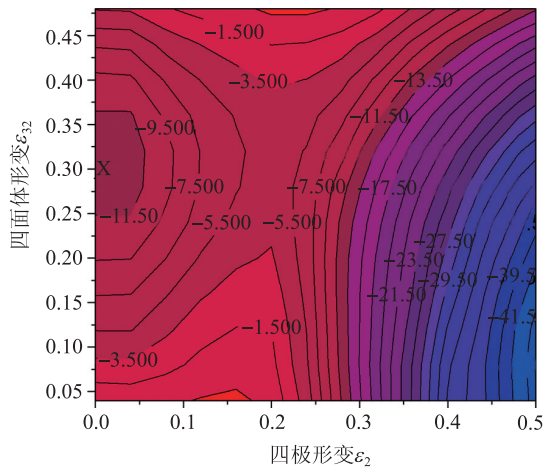


图4 超重核(A=310, Z=126)基态的投影位能面和能量等高线图。球形能量归一化为零, 等高线的间距是1 MeV。“X”标识极小点, 对应四面体形状, 鞍点在(ε₃₂ ≈ 0.3, ε₂ ≈ 0.2)处

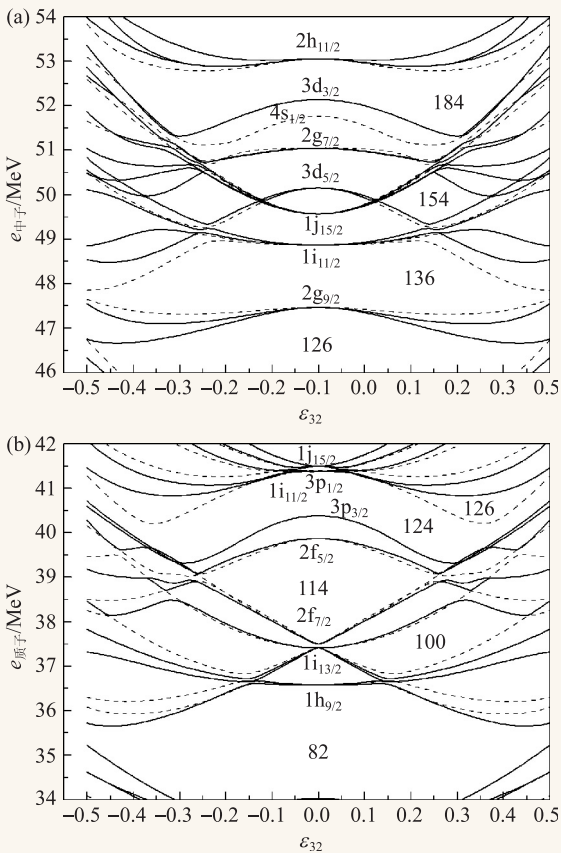


图5 超重核的单粒子能谱(实线表示四度退化能级, 虚线表示二度退化能级) (a)中子单粒子能谱中的四面体能隙: N=154和184; (b)质子单粒子能谱中的四面体能隙: Z=100和124—126

现实验数据所需要的四极形变值比较大, ε₂ ≈ 0.23。严格的原子核四面体对称性应表现为只有Y₃₂形变, 而其他形变为零的情况。考虑到原子核是强相互作用的有限多体体系, 极端纯粹的Y₃₂形变难以存在, 四面体对称性可能体现为其他形变的干扰可以忽略不计的情况。

RASM理论用于超重核的研究表明, 四面体对称性可能出现在最重的一些原子核中, 例如(A=310, Z=126)核中。利用RASM波函数, 可以计算角动量和宇称投影能量, 其定义如下

$$E^{I^p} = \frac{\langle \Psi^{I^p} | \hat{H} | \Psi^{I^p} \rangle}{\langle \Psi^{I^p} | \Psi^{I^p} \rangle} \quad (5)$$

在形变(ε₂, ε₃₂)二维空间里计算(5)式, 我们可以得到对应于角动量和宇称量子数(I, p)的位能面, 称为投影位能面。位能面的局部极小点给出了处于(I, p)状态的原子核的平衡形变(ε₂⁰, ε₃₂⁰)。对超锕核的投影位能面计算表明, 能量极小点处在(ε₂⁰ ≈ 0.23, ε₃₂⁰ ≈ 0.1), 这同上述超锕核的核谱计算中所用的形变值完全一致, 体现了位能面计算与核谱计算的自洽性。投影能量, (5)式, 并不是原子核的总能量, 但它包含了所有量子效应的贡献, 包括壳效应以及角动量和宇称恢复效应。超重核的存在主要是壳效应的作用, 否则强大的库仑力将导致它立即裂变, 因此, 投影能量对于超重核结构的研究特别重要。超重核(A=310, Z=126)基态, I^π = 0⁺, 的投影位能面的计算结果见图4, 位能面的局部极小点(由“X”标识)对应的平衡形变正是四面体形变, 即四极Y₂₀形变值ε₂⁰ ≈ 0, 而八极Y₃₂形变值ε₃₂⁰ ≈ 0.3。计算中用的Nilsson势参数是标准的^[5], 单粒子态空间考虑了4个主壳, 中子5, 6, 7, 8壳和质子4, 5, 6, 7壳。计算的单粒子能谱, 即能量作为四面体形变ε₃₂的函数见图5, 它可以帮助我们理解四面体超重核的形成机制。质子单粒子能谱中存在四面体能隙Z=100和Z=124—126, 中子单粒子能谱中存在四面体能隙N=154和N=184。在ε₃₂ > 0处, 单粒子能谱中出现的这些四面体能隙, 暗示了超重核四面体形变存在的可能性。由于相对应的壳效应的增强, 质子数和中子数都填充在四面体能隙

处或能隙附近的原子核，将有最大的几率在基态中呈现四面体形状。单粒子能谱中的四面体能隙结构，正是投影位能面中的四面体极小点形成的根本原因。还要指出的是，四面体形变势的单粒子能级有四度退化和二度退化两种，前者的一条能级上最多可填充4个同种粒子，而后者最多可填充2个同种粒子。单粒子能级的高退化度意味着能隙处的壳效应的额外增强，也就意味着四面体形变的附加稳定性。核物理中最多出现的形变是四级形变，四级形变平均场的单粒子能级只有二度退化一种。单粒子能级的高退化度是四面体对称性的特性，从群论的角度讲，四面体对称性系指核平均场哈密顿量在双点群 T_d^D 变换下的不变性，正是这种不变性导致单粒子能级的四度退化。

标准宏观—微观模型的计算结果与本文投影能量计算的结果一致，也预言四面体超重核的存在^[12]。然而，多维度宏观—微观模型的计算结果并不支持这个结论^[13]。文献[12]和文献[13]是完全相同的理论，只是液滴模型参数化有差别，不过，两者都没有考虑到角动量和宇称的恢复，如果将这一量子效应加进去，那么它们之间计算的分歧将会消除，都支持四面体超重核的存在。

最近，从轻核的集团结构出发的四面体对称性研究有重要进展。原初格点计算发现， ^{16}O 基态为4个 α 粒子组成的四面体结构^[14]。代数模型计算说明， ^{16}O 的低能核谱具有4 α 粒子的四面体的转动谱特征^[15]。巨偶极共振实验谱的分析表明， ^{16}O 具有4 α 粒子的四面体组态^[16]。4 α 粒子的四面体组态是个特例，最终证明原子核作为费米子多体体

系的四面体对称性的存在，我们还需要更多和更深入的实验和理论研究工作。

5 结束语和展望

四面体对称性是核物理中的一个新对称性，理论研究刚刚开始，实验证据尚未发现。宏观—微观模型理论预言的稀土四面体候选核已被高精度的检验实验否决。基于反射不对称壳模型的理论研究表明，超铀核中可能存在四面体对称性，但它被较大的四极形变所遮掩。基于反射不对称壳模型的投影位能面计算表明，四面体对称性可能存在于超重核中，例如，($Z=126, N=184$)核的基态具有四面体形状。超重核区的四面体对称性的进一步研究具有重要意义，无论对于寻找核物理中的新对称性，还是对于超重核核结构本身，都是创造性的研究。但超重核结构的实验研究困难巨大，已合成的超重元素核的质子数，特别是中子数，距离预言的四面体形变核还相差太远。对超铀核结构的进一步实验研究是必要的，例如，低激发负宇称带态到基态带态的E3跃迁的实验测量，因为增强的E3跃迁矩阵元将成为四面体对称性在该核区有重要作用的牢固实验证据。寻找新的四面体对称性候选核是下一步理论和实验研究的重要方向之一。从轴对称四极形变(长椭球、扁椭球)原子核的实验发现，到非轴对称四极形变(三轴形变)的实验证明，大约经过了30年。从轴对称八极形变核(八极转动带)的实验发现到非轴对称八极形变核(四面体)的实验证明，难度会更大，也许要经过更多的几十年，但值得期待。

参考文献

[1] Chen Y S, Gao Z C. *Phys. Rev. C*, 2000, 63:014314
[2] Gaffney L P *et al.* *Nature*, 2013, 497: 199
[3] Lister C J. *Nature*, 2013, 497: 190
[4] Cocks J F C *et al.* *Nucl. Phys. A*, 1999, 645: 61
[5] Bengtsson T, Ragnarsson I. *Nucl. Phys.*, 1985, 436: 14
[6] Dudek J *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 97: 072501
[7] Jentschel M *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104: 222502
[8] Greenlees P T *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 109: 012501

[9] Sulignano B *et al.* *EPJA*, 2007, 33: 327
[10] Greenlees P T *et al.* *Phys. Rev. C*, 2008, 78: 021303(R)
[11] Chen Y S, Sun Y, Gao Z C. *Phys. Rev. C*, 2008, 77: 061305(R)
[12] Mazurek K *et al.* *Acta Physica Pol. B*, 2009, 40: 731
[13] Jachimowicz P *et al.* *Int. J. Mod. Phys. E*, 2011, 20: 514
[14] Epelbaum E, Krebs H *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2014, 112: 102501
[15] Bijker R, Iachello F. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, 112: 152501
[16] He W B, Ma Y G, Cao X G *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2014, 113: 032506