# 广义相对论与黎曼几何系列之一 古老又现代的几何学

张天蓉†

2015－05－03收到

† email：tianrong1945@gmail.com

DOI：10.7693/wl20150509

1915年，爱因斯坦提出了他最引以为傲的理论——广义相对论，至今一百年过去了，这个学说仍然是天体物理及宇宙学的重要理论基础。而广义相对论又是建立在距离当时50年前黎曼几何的基础之上。因此，广义相对论的故事，要从几何讲起……

几何是一门古老的学科。恐怕没有哪一门学科，像欧几里德几何那样，在公元前就已经创立成形，历经了2000多年，至今仍然活跃在课堂上和数学竞赛中。在上世纪的60—80年代，中国学生平面几何的水平肯定是算世界上比较高的。笔者还清楚地记得，解决平面几何难题，是本人中学时代的最爱。我们高中的数学老师兼班主任，是一个刚从师范学校毕业的年轻人，对数学教学充满热情。印象颇深的是他在黑板上画圆的绝活，他手握粉笔一挥一就，一笔下来，立刻在黑板上出现了一个规整的圆圈。在他的影响下，我们班一半人都变成了数学迷，几何迷。也许就总体而言，中国式的教育方法忽略了发展学生改革创新的能力，但我深信，那个时代我们思考过和解决了的无数道几何难题，对训练空间想象及逻辑推理的能力，起了非常重要的作用。

纵观科学史，牛顿、爱因斯坦都是伟人，还有欧拉、高斯等等，伟大的数学家可以列出不少，但恐怕很难找出像欧几里德这样的科学家。从2000多年前一直到现代，人们还经常提到以他的名字命名的“欧几里德空间”、“欧几里德几何”等等名词，真可谓名垂千古。除了欧几里德之外，阿基米德也算一个名垂千古的学者。牛顿时代距离现在不过400来年，欧几里德和阿基米德却都是公元前古希腊时代的人物。

欧几里德留给世人的是他的巨著——《几何原本》[1]，这本书被译成多种文字，在1607年，有了徐光启的中译本[2]。《几何原本》不仅仅被誉为有史以来最成功的教科书，而且在几何学发展的历史中具有重要意义。其所阐述的欧式几何是建立在5个公理之上的一套自洽而完整的逻辑理论，简单而容易理解。它标志着早在2000多年前，几何学就已经成为了一个有严密理论系统和科学方法的学科！

继欧几里德之后，16世纪法国哲学家、数学家笛卡儿(1596—1650年)，将坐标的概念引入几何，建立了解析几何。平面几何中引入坐标的概念，就是使用$x$，$y$来表示点、线、圆等几何图形在平面上的相对位置，因而便可以方便地应用解析的方法来处理几何问题。如此一来，几何问题变成了代数问题，解起来简单容易多了。但说起来有点可笑，这种简单容易的方法反而使原来痴迷于求解平面几何难题的中学生们在刚学了解析几何之后，颇有一种失落感。因为解析几何使几何问题有了规范的解法，好像几何不再具有了原来的魅力，一个个原本非常有趣的几何题，被“解析”之后，突然间显得黯然失色、索然无味。

当然，谁也无法否认解析几何的诞生象征着几何发展的一个重要里程碑。解析几何不但能处理欧氏几何中的平面问题，还能解决三维空间中的难题，以至于推广到更高维空间。即使对于二维和三维空间而言，解析几何可研究的图形范围也比欧氏几何大多了。对平面曲线来说，欧氏几何中一般只能处理直线和圆。而解析几何引入了坐标及函数的概念之后，直线可以用一次函数表示；圆可以用二次函数表示。二次函数不仅能够表示圆，还能表示椭圆、抛物线、双曲线等其他情形。除此之外，解析几何中还可以用一个任意的方程式$f(x, y)=0$来表示所有的平面曲线，这些都使欧氏几何望尘莫及。如果论及三维空间的话，在解析化之后，还能用三维坐标$(x, y, z)$和它们的代数方程式，表示各种各样的空间曲线和奇形怪状的曲面。谈到更高维的空间，欧几里德几何就更无能为力了。

再后来，数学的各个方面都有了巨大的发展，特别是牛顿和莱布尼茨发明了微积分，这是科学上的一件大事，使得那个时代的整个数学和物理学都改变了面貌。那么，微积分对几何学的发展又有何种影响呢？数学家们自然地将微积分这个强有力的工具用来研究几何学。实际上，微积分从诞生之日就和几

何学联系紧密：几何研究催生了微积分，微积分又反过来帮助几何学发展，两者互相影响，相辅相成。因此，微积分诞生之后不久，便有了“微分几何”这门新学科的萌芽。

法国数学家亚历克西斯·克莱洛(Alexis Clairaut ，1713—1763年)是微分几何的先行者之一[3]。克莱洛是个名副其实的神童，他是母亲生下的20个子女中唯一一个长大成人的。在身为数学教授的父亲的严格管教和高标准要求下，克莱洛9岁开始读《几何原本》，13岁时就在法国科学院宣读他的数学论文。之后几年，克莱洛迷上了空间曲线，他用曲线在两个垂直平面上的投影来研究空间曲线，第一次研究了空间曲线的曲率和挠率(当时被他称之为双重曲率)。1729年，16岁的克莱洛将这个结果提交给法国科学院，并以此申请法国科学院院士的资格，但当时未得到国王的立即认可。不过，只在两年之后，克莱洛发表了《关于双重曲率曲线的研究》一文，文中公布了他对空间曲线的研究成果。克莱洛除了提出双重曲率之外，还指出在一个垂直于曲线切线的平面上，可以有无数多条法线，他同时给出了空间曲线的弧长公式，以及曲面的几个基本概念：长度、切线和双重曲率。这一年，18岁的克莱洛成为法国科学院有史以来最年轻的院士。

曲率和挠率是什么？首先，我们从平面曲线来认识曲率。

现在我们需要先引进曲线的切线，或称之为“切矢量”的概念，切矢量即为当曲线上两点无限接近时它们连线的极限位置所决定的那个矢量。图1左图中3条平面曲线上所标示的箭头，便是曲线的切矢量在各个点的直观图像。然后，根据图中切矢量沿着曲线的变化规律，便可以得到曲率的直观概念：曲率表征曲线的弯曲程度。比如说，图1左图最上面一条是直线，直线不拐弯，其弯曲程度为0，即曲率等于0。因而，这个零曲率与切矢量的变化是有关系的。看看直线上的箭头就容易明白了：所有箭头方向都是同样的。也就是说，曲率就是切矢量方向的变化率，或切矢量的旋转速率。直线上的切矢量方向不变，不旋转，对应于曲率为0。再看看图1左图下面的两条曲线，当弧长增加时，随着曲线的弯曲，它的切矢量的方向也不断地旋转。曲线的弯曲程度越大，切矢量也旋转得越快。所以，曲率的几何意义就是曲线的切矢量对于弧长的旋转速度。

刚才在描述切矢量时，我们说它是“连线的极限位置所决定的那个矢量”，这儿我们很轻松地用上了“极限”的概念。但是，在克莱洛的年代，曲率的计算可不那么轻松，这个十几岁的神童，天才地把微分的思想用于研究曲线，首次得到了这个结果。不仅如此，刚才我们讨论的只是平面曲线，克莱洛也将微积分思想用于空间曲线，定义了挠率的概念，见图1右图。

对一条平面曲线来说，如果每一点的曲率都确定了，这条曲线的形状便确定了。比如说，很容易直观地看出，一个圆上每个点的曲率都相等，等于它的半径的倒数。圆的半径越小，倒数则越大，因而曲率也越大；圆的半径越大，曲率则越小。比如，考虑图2(a)中所示的平面螺旋线，如果从内看到外，平面螺旋线近似于一个一个从小到大的圆，所以，它的曲率是中心大边沿小。现在，我们将这个平面螺旋线想象成一个被压到一个平面上的锥形弹簧，当压力撤销之后，锥形弹簧将恢复它的形状。如此便得到了一条如图2(b)所示的三维曲线。

从图2(a)，(b)的直观图形可见，当平面螺旋线逐渐变成空间螺旋线时，曲率的变化似乎不大。那么，应该用什么几何量来表征这种从平面曲线到空间曲线的偏离呢？

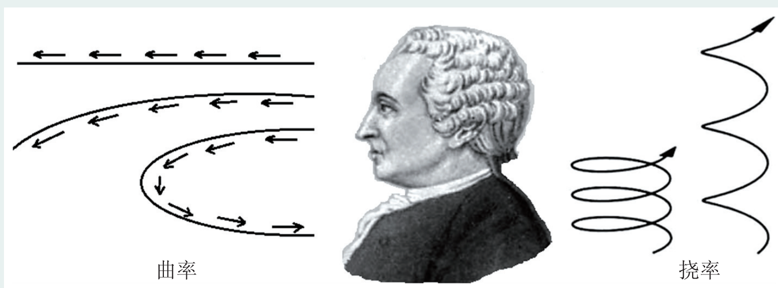

**图1** 克莱洛及双重曲率

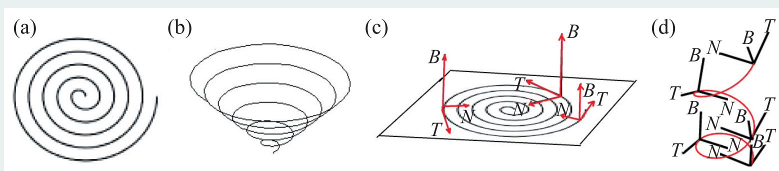

**图2** 空间曲线的挠率 (a)平面螺旋线挠率为0；(b)空间伸展后挠率不为0；(c)平面曲线次法线$B$方向垂直于平面；(d)空间曲线次法线$B$方向逐点变化

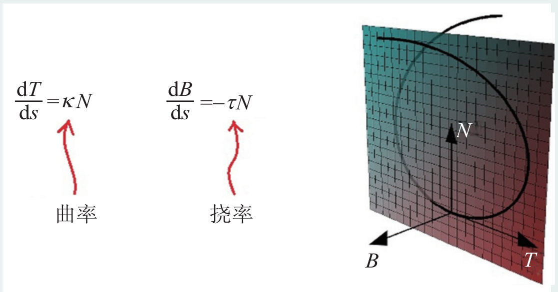


**图3** 曲率$\kappa$和挠率$\tau$的定义

首先，让我们将平面螺旋线放到三维空间中，如图2(c)所示。我们在平面曲线上的每一个点定义一个由3个矢量组成的三维标架。令曲线的切线方向为$T$，在曲线所在的平面上有一个与$T$垂直的方向$N$。对于圆周来说，$N$的方向沿着半径指向圆心。$N$被称之为曲线在该点的主法线。与切线$T$垂直的矢量不止一个，有无穷多个，都可以称为曲线在该点的法线，这些法线构成一个平面，叫做通过该点的法平面。在所有的法线中，有一个是比较特别的，对平面曲线来说就是在此平面上的那一条法线，被称为主法线。有了切线$T$和主法线$N$，使用右手定则便可以定义出三维空间中的另一个矢量$B$，$B$也是法线之一，称之为次法线。从图2(c)很容易看出，平面螺旋线上每个点的切矢量$T$和主法线$N$的方向都逐点变化，唯有次法线$B$的方向不变。对一般的平面曲线也是如此，次法线的方向永远是垂直于曲线所在平面的。

对一般的空间曲线，情况有所不同。想象一下让平面螺旋线中的每一圈逐渐从原来所在的平面慢慢被拉开，这时候，每一点次法线的方向便会从原来的垂直线逐渐发生偏离。也可以说，次法线的方向代表了与曲线“密切相贴”的那个平面。一般情形下，这个密切相贴的平面逐点不一样，被称为曲线在这个点的“密切平面”。如图2(d)所示，在曲线上不同的点，三个标架$T$，$N$，$B$的方向都有所不同。

克莱洛注意到空间曲线与平面曲线的不同，认为需要用另外一个曲率，后人称之为“挠率”的几何量来表征这种差别。换言之，挠率可以表示三维空间曲线偏离平面曲线的程度。类似于将曲率定义为切矢量对弧长的变化率，挠率被定义为次法线矢量$B$随弧长变化的速率，如图3所示。

克莱洛在18岁发表的“双重曲率”的论文，开始了真正意义上的曲线研究，为微分几何的发展迈出了第一步。

## 参考文献

[1] Heath T L. The Thirteen Books of Euclid's Elements (2nd ed). New York：Dover Publications，1956

[2] Chinese translations reprinted as part of Siku Quanshu (1607), or “Complete Library of the Four Treasuries.”

[3] O'Connor J J, Robertson E F. (October 1998). “Alexis Clairaut”. MacTutor History of Mathematics Archive. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. Retrieved 2009-03-12