

广义相对论与黎曼几何系列之二 牛顿引力

张天蓉[†]

2015-05-23 收到

[†] email: tianrong1945@gmail.com

DOI: 10.7693/wl20150608

当年, 18岁的克莱洛因为对空间曲线之曲率和挠率的研究而被选入了法国科学院, 在那儿, 他与皮埃尔·莫佩尔蒂成为了好朋友。莫佩尔蒂比克莱洛大15岁, 但在当时也算是一名相当年轻的科学院院士。莫佩尔蒂后来因为最小作用量原理而知名。在那个时代, 欧洲数学界和物理学界的少年天才颇多, 年轻学子意气风发、英雄辈出。比克莱洛大五岁的欧拉以及比克莱洛小五岁的达朗贝尔, 都是在十二三岁的幼小年纪就进了大学。后来, 这三个人在研究牛顿引力定律的过程中还演绎了一段值得回味的故事。

现代物理学告诉我们, 宇宙中存在四种基本力: 电磁力、引力、强力、弱力。强力和弱力的作用范围很短($<10^{-15}$ cm), 因而只存在于微观世界, 人类通过现代科学的帮助才认识了它们。电磁力是大家所熟知的, 已经成为人类不可或缺的动力来源, 也是我们文明社会少不了的信息通讯之基础。而引力应该是这四种力中最早被人类所感知的, 但却也是四种相互作用中最为神秘、难以驾驭的一种, 至今也还难以将它统一于包括其他三种力的“标准模型”之中。

人类很早就认识到地球对自身以及周围一切物体的吸引作用, 即“重力”。但是, 能够发现“任何”两个物体之间都具有万有引力, 就不是那么容易了。两个普通物体之间的引力一般来说非常微弱, 使得

我们根本不能感知其存在。比较起来, 电磁力就要大多了, 比如我们司空见惯的摩擦生电现象: 一个绝缘玻璃棒被稍微摩擦几下, 就能够吸引一些轻小的物品; 还有磁铁对铁质物质的吸引和排斥作用, 都是很容易观察到的现象。然而, 除了巨大质量的星体之间产生的引力能够被观测到之外, 一般物体的引力很难被探测到。电磁场有电磁波来传递信息, 常见的光也是一种电磁波, 人类可以产生、接收、控制电磁波, 它们已经是某种抓得住、看得见、用得上的东西。可是引力呢? 引力波至今仍未被探测到, 我们对引力的了解还差得太远。

牛顿的万有引力定律是人类理解引力的第一个里程碑。里程碑可不是那么容易就被冠以某人的名字的, 其中伴随着许多优先权之争, 特别是在科学草创、规范不健全的时代更是如此。牛顿和英国物理学家罗伯特·胡克(Robert Hooke, 1635—1703)为万有引力定律发明权的争执是科学史上著名的公案^[1]。在牛顿

之前, 不少科学家已经有了万有引力思想的萌芽。开普勒在研究行星运动的时候认识到, 有一种像磁石吸铁一样的力在维持着行星的椭圆运动。胡克研究引力20年, 发现太阳引力使得彗星的轨道发生弯曲。1679年, 胡克从向心力定律和开普勒第三定律, 推导出维持行星运动的力(即引力)符合平方反比律, 但他不知道如何由此从数学上证明行星的轨道是一个椭圆。牛顿创建了强大的数学工具微积分, 对开普勒定律进行计算验证, 最终用微积分理论解决了胡克等人不能解决的数学问题, 解释了行星的椭圆轨道。

牛顿能够和常人一样感觉苹果打到头上, 也和常人一样无法探测一般物体之间的引力。但他凭着超强的思维能力, 认识到地球对苹果的吸引力与月亮绕着地球转的向心力属于同一种力, 他将其命名为万有引力并提出了万有引力定律: 任意两个物体之间都存在这种相互吸引力, 力的大小与它们的质量乘积成正比, 与它们之间距离的平方成反比, 比例系数被称之为引力常数

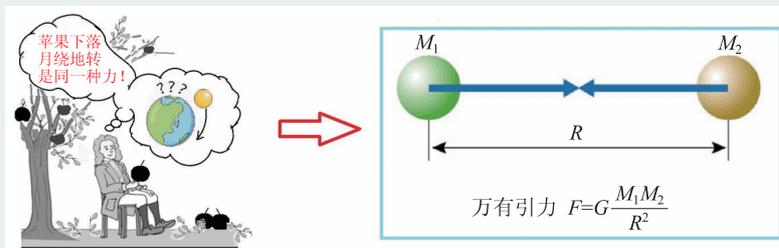


图1 牛顿万有引力定律

G 。牛顿认为这个常数应该是个很小的数值，但他自己当时也不知道到底是多大。一直到牛顿去世后70年左右，英国物理学家亨利·卡文迪什(1731—1810)用一个很巧妙的扭秤方法测量了引力常数。现在公认的万有引力常数大约为 $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 。从这个数值可以估计出两个质量为50 kg的成人距离1 m时，万有引力大小只有 10^{-7} N ，大约只相当于十万分之一克质量的物质所受到的重力。这就是为什么我们感觉不到互相之间具有万有引力的原因。

牛顿当时还研究了地球的形状，并从理论上推测地球不是一个规则的球形，而是一个赤道处略为隆起、两极略为扁平的椭球体。由于地球的自转，地球上的所有物质均以地轴为中心做圆周运动，因而都受到惯性离心力。如图2(a)所示，离心力可分解为两个分量，一是垂直于地球表面的分量，另一个

是平行于地表的水平分量。水平分量能使物质沿地表移动，垂直分量则无此效果。从图2(a)可见，地球上所有质点，无论是位于北半球还是南半球，所受的水平分量都指向赤道那一侧。因此地球上的物质便会有一种向赤道挤压的趋势，使地球变成了一个扁球体。对于这个结论，当时的学界有两派意见。莫佩尔蒂支持牛顿扁球体的结论；卡西尼等则根据其他一些理论，认为地球是个长椭球(图2(b))。为了解决对此问题的争论，莫佩尔蒂带领克莱洛等人以法国科学院测量队的名义进行了一年多的远征，对地球进行弧度测量，远征的测量结果证实地球确实为一个扁形椭球体，赤道半径要比极半径长出20多千米。

克莱洛从1745年开始研究太阳、地球、月亮的三体问题。将牛顿定律用于解决二体问题不难，但三体问题就变得异常复杂，庞加莱

后来的研究揭示这个问题实际上与复杂的混沌现象有关。克莱洛当时特别计算了月球的轨道、远地点和近地点等参数。有趣的是，他的计算得出的第一个结论是，认为牛顿重力理论的平方反比定律是错误的，而且还得到了不少同行的支持，其中包括当时已经将近40岁、右眼失明的数学界大师级人物欧拉。同时，比克莱洛小几岁、同为法国人的达朗贝尔也向法国科学院提交了一份文件，宣布与克莱洛的结果一致。于是，克莱洛信心倍增，振振有词地建议在万有引力的平方反比定律后面加上与半径4次方成反比的一项作为修正。

然而，到了1748年的春天，克莱洛意识到月球远地点的观察数据与理论计算之间的差异来自于自己计算时所做的某些不太恰当的近似。于是，克莱洛在1749年宣布，经他修正后的理论计算结果与平方反比定律完全符合。然而，克莱洛没有对此给出详细的解释，反而采取缄口不言的策略，欧拉和达朗贝尔为此问题纠结却又不知如何重复克莱洛的计算，克莱洛在一旁默默笑观。

欧拉最后想出一招，利用他在圣彼得堡学院的位置和威望，设立了一个征奖项目，要求在1752年之前精确计算出月球的远地点。克莱洛果然上钩，他提交的答案使欧拉完全理解了克莱洛的方法。尽管欧拉为自己没有解决这个问题略感沮丧，但他仍然高度赞赏了克莱洛的工作。两个年轻之辈(克莱洛和达朗贝尔)之间却从此结下梁子，后来关系逐渐恶化，继而互相攻击，情势愈演愈烈。两个人都是数学家，但达朗贝尔更重视理论方面，克莱洛

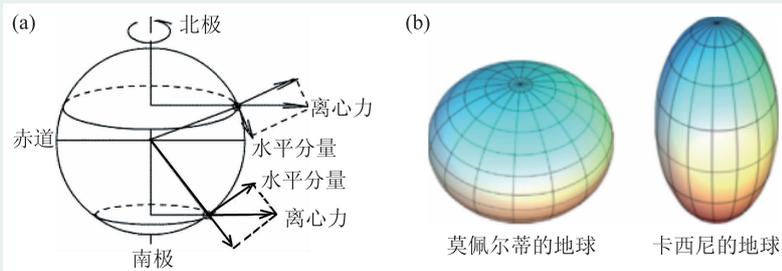


图2 (a)地球自转的惯性离心力；(b)地球形状

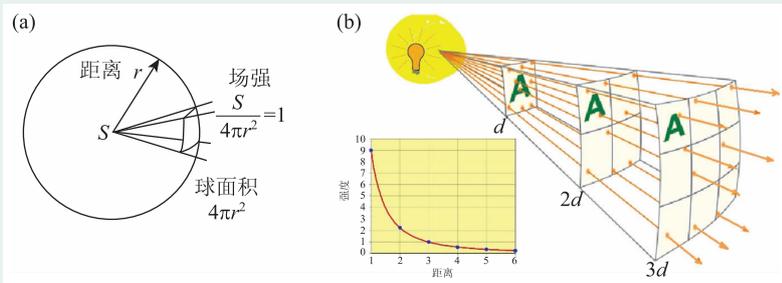


图3 (a)距离为 r 时，场强为1的点信号源；(b)距离线性变化时，场强服从平方反比定律

便以此攻击达朗贝尔等理论家忽视实验,采用不靠谱的假设和分析方法来避免实验和繁琐的计算。与之相对,达朗贝尔则嘲笑克莱洛对三体问题的结果都是基于别人的观察资料而非像他那样,是基于自己的理论而得到的。

我们如今很难用是非的标准来判定两人的争论。历史地看,重理论的达朗贝尔后来的名声更大一些,但在当年,克莱洛却是分外风光。克莱洛继续使用自己计算三体问题的技巧,用牛顿引力理论精确地预测了哈雷彗星的轨道。他在1758年11月14日宣布结果,预测哈雷彗星将于1759年4月15日返回地球。实际情况是,哈雷彗星于1759年3月13日返回了地球,与克莱洛的预测日期只相差一个月,这是由于当时还未被发现的天王星和海王星对哈雷彗星的摄动影响没有被考虑进去,使克莱洛的预言产生了小小的误差。这个预言再次证实了牛顿引力理论的正确,克莱洛也因此获得了公众的极大好评。

克莱洛后来在社会上声名大振,这反而阻碍了他的科学研究工作,他日夜奔波于社交场合,四处赴宴熬夜,身边常有女人陪伴。他因此失去了休息和健康,在52岁时就去世了。

如上所述,克莱洛、欧拉等人当初都怀疑过万有引力遵循的平方反比律,其实平方反比律有其存在的道理。静电力和引力相仿,也遵循平方反比律,还有其他一些现象,诸如辐射、声音的传播等,也由平方反比规律决定。为什么刚好是平方反比而非其他关系呢?大自

然似乎总是以一种高明而又简略的方式来设置自然规律,在这儿它又是如何呈现它的高明之处的呢?随着时间的积累以及科学家们的努力,人们逐渐认识到,平方反比律不是随便任意选定的,它和我们生活在其中的空间之维数为3有关。

在各向同性的三维空间中的任何一种点信号源,其传播都将服从平方反比定律。这是由空间的几何性质决定的。设想在我们生活的三维欧几里德空间中,有某种球对称的(或者是点)辐射源。如图3所示,其辐射可以用从点 S 发出的射线表示。一个点源在一定的时间间隔内所发射出的通量 S 是一定的。这份通量 S 向各个方向传播,不同时间到达不同大小的球面。当距离 r 呈线性增加时,球面面积 $4\pi r^2$ 却是以平方规律增长。因此,同样一份通量,所需要分配到的面积越来越大。比如说,如图3所示,假设距离为 r 时,场强为1,当距离变成 $2r$ 的时候,同样的通量需要覆盖原来4倍的面积,因而使强度变成了 $1/4$ 。这个结论也就是场强的平方反比定律。

从现代场论的观点,在 n 维欧氏空间中,场强的变化与 $r^{(n-1)}$ 成反比,当 $n=3$,便简化成为平方反比律。

参考文献

- [1] Inwood S. The Man Who Knew Too Much. Pan Books, 2002

美国Time 封面刊登 D-Wave量子计算机: 选用Bluefors & Cryomech低温制冷机

BlueFors

CRYOGENICS



BF-LD BF-SD BF-Horizontal
无液氮稀释制冷机

CRYOMECH

WORLD LEADERS IN CRYOREFRIGERATION FOR MORE THAN 50 YEARS



氮回收及液化系统、脉管制冷机、GM制冷机、氮再液化器、低温恒温槽、液氮系统

Cryomech和Bluefors中国 唯一销售及技术服务商

提供覆盖各主要温区(最低至几毫K)的低温设备及系统。敬请随时联系我们,我们可以提供各类定制化设计的低温解决方案。

赛浩(上海)仪器有限公司

www.scikro-instru.com

+86-21-69133626

info@scikro-instru.com

SCIKRO