广义相对论与黎曼几何系列之三 曲面的微分几何

张天蓉[†]

2015-06-26收到
† email:tianrong1945@gmail.com
DOI: 10.7693/wl20150708

用微积分的方法对曲线及曲面进行研究，除了欧拉、克莱洛等人的贡献之外，蒙日(Gaspard Monge，1746—1818)的工作也举足轻重。蒙日是画法几何学的创始人，他对曲线和曲面在三维空间中的相关性质作过详细研究，并于1805年出版了第一本系统的微分几何教材《分析法在几何中的应用》。这部教材被数学界采用长达40年之久。蒙日自己培养了一批优秀的数学人才，其中包括刘维尔、傅里叶、柯西等人，形成所谓“蒙日微分几何学派”。其特点是将微分几何与微分方程的研究紧密结合起来。因此，相关的曲线和曲面几何的研究也大大促进了微分方程，特别是偏微分方程理论的进展。

本系列文章的第一篇叙述了三维空间曲线。一条空间曲线的曲率和挠率，是空间位置的函数。这两个函数完全决定了这条曲线在三维空间中的形态。那么，三维空间的曲面又有哪些我们感兴趣的基本性质呢？

我们生活的世界就是一个三维空间，人们对三维以下空间中的几何对象(如线、面等)比较熟悉。即使没有受过很多数学专门训练的人，也不难理解三维空间中曲线和曲面的概念。比如说，我们如何得到一条曲线？很简单，用笔尖在纸上一画就有了，那是平面曲线。要得到空间曲线也不难，用笔尖在空间中“一画”，就能得到一条任意的空间曲线。再比如说，我们想象一只小蚂蚁在泥土中钻来钻去，它走的路线就是一条空间曲线。换言之，空间曲线能够从一个点在空间移动的“轨迹”而得到。那么，我们再想象一下，如果在空间移动的不是一个点，而是一条曲线的话，从曲线的移动轨迹，就应该得到一个嵌在三维空间中的曲面了。

如果不考虑任意曲线的移

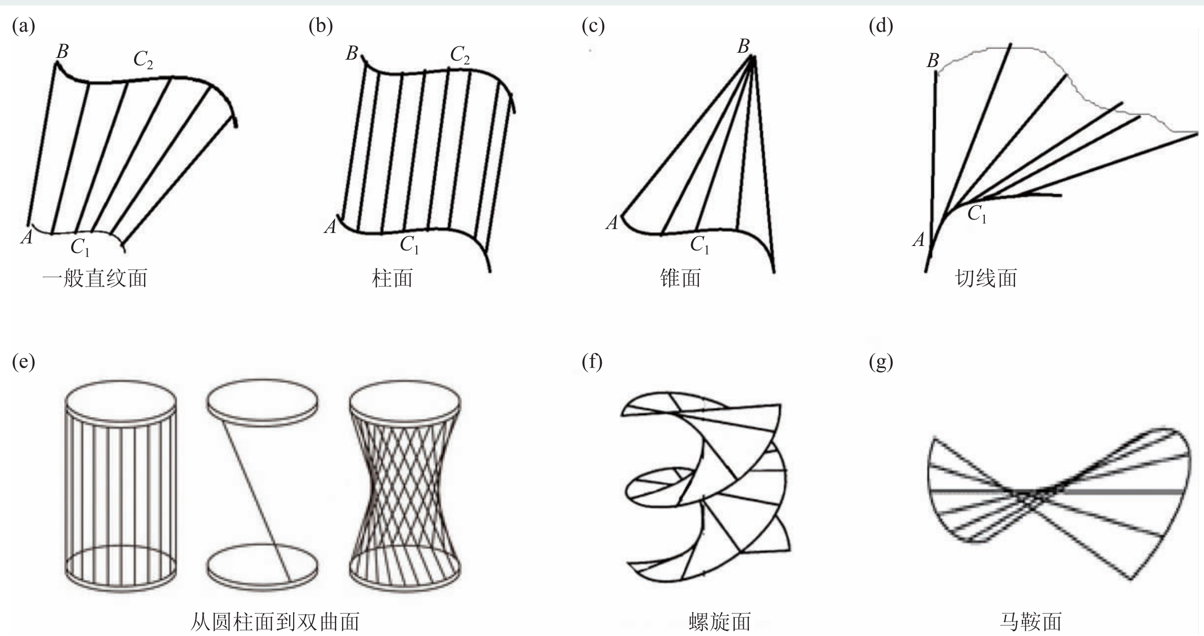

图1 各种直纹面

动，而只是将我们的想象限制在比较简单的情况：我们用一把“尺”(直线的一段)，将它在空间中移动，这样也能得到空间中的一个曲面。数学家们将这种由于“尺子”的移动，或者说，由于“一条直线”的平滑移动，所产生的曲面，叫做“直纹面”。法国数学家蒙日对直纹面进行了许多研究。

一把尺子在空间移动的方式可以多种多样，这样就形成了各种不同的直纹面。如图1(a)，(b)，(c)，(d)所示的，就是当一根尺子的两端A和B分别沿着曲线C_1和C_2移动时形成的几种直纹面。最简单的情形是这把尺子在空中平行地移动，即尺子两端A和B按照同样的规律移动，比如说，当尺子移动的轨迹C_1和C_2是方向相同的直线时，将形成一个平面。稍微复杂一点，如果C_1和C_2是互相平行的任意曲线，尺子两端移动的轨迹将形成一个如图1(b)所示的柱面。又如图1(c)显示的情形：尺子下端A移动，但上端B固定不动，这时则会形成一个锥面。在图1(d)中，尺子的A端沿着曲线C_1移动，并且尺子的方向总是保持与C_1相切，如此而成的曲面叫做切线面。此外，还有很多别的形状的直纹面，如图1中所画出的双曲面、螺旋面、马鞍面等等。

柱面、锥面和切线面这三种直纹面具有一个共同的特性：它们可以被展开成平面。将一个圆柱形的纸筒沿轴向剪开，或者将一个锥形剪开到顶点，都可以将剪开后得到的图形平摊在桌面上而没有任何皱褶，这样的曲面叫做“可展曲面”。切线面也是一种可展曲面。数学上可以证明，可展曲面只有刚才提到的三种直纹面。也就是说，可展曲面都是直纹面，但直纹面却不一定可展，比如图1中的双曲面、螺旋面、马鞍面等就是不可展曲面的例子。球面不是直纹面，球面也是不可展的。一顶做成近似半个球面的帽子，无论如何剪裁它，都无法将它摊成一个平面，这是我们日常生活中熟知的常识。

一个曲面到底是可展还是不可展？这点对物理学家来说很重要，比一个曲面是否是直纹面要重要得多。那么，我们需要知道的是，什么几何量决定了曲面的可展性？

之前描述过的空间曲线，与空间曲面的情况有所不同。空间曲线的曲率和挠率这两个几何量，决定了曲线在三维空间中某一点的形态。但是，曲线的曲率和挠率所描述的是曲线嵌入三维空间中的“外在”形态。曲线没有“内在”几何，所有的曲线都是可展的。一根绳子，无论弯曲成什么形状，都可以把它展开伸长成一条直线。不过，我们仍然可以将曲线研究中定义的曲率概念使用到曲面的微分几何研究中。比如说，按照如下方式，可以定义三维空间中二维曲面的两个“主曲率”，如图2所示。

首先，通过曲面上的一个给定点G，可以在该曲面上画出无限多条曲面上的曲线，因而可以作无限多条切线。可以证明，这些切线都在同一个平面上，这个平面被称为曲面在这点的切平面，通过该点与切平面垂直的直线叫做曲面在这点的法线。

现在，我们通过法线可以作出无限多个平面，这每一个平面都与曲面相交于一条平面曲线C，并且可以定义平面曲线C在G点的曲率，如图2(a)所示，曲线C_1，C_2……在G点的曲率分别为Q_1，Q_2……。在所有的这些曲率(Q_1，Q_2……)中，找出最大值和最小值，把它们叫做曲面在G点的主曲率。对应于两个主曲率的切线方向(或两个法平面方向)总是互相垂直的。这是大数学家欧拉在1760

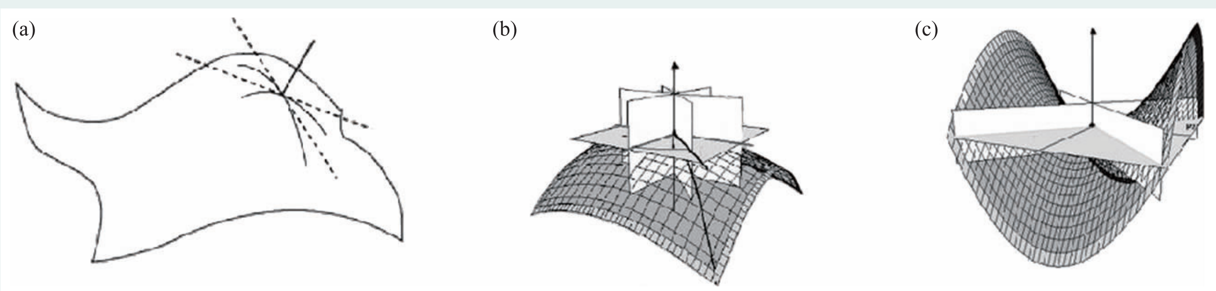

图2　曲面的两个主曲率

年得到的一个结论。此两切线方向被称之为曲面的两个主方向。从图2(b)和图2(c)可以看到，两个主曲率可正可负。当曲线转向与平面给定法向量相同方向时，曲率取正值，否则取负值。

让我们再重复并加深点对可展性的理解。首先，对曲线而言，任意一条空间曲线都是可展的，都可以伸展为一条直线。不同的空间曲线只是由它们“嵌入三维空间中时”的弯曲和扭曲程度而区分，如果只从曲线本身看，所有的曲线都是一样的，都与直线具有同样的几何性质。换言之，如果有一种极小的蚂蚁生活在一条空间曲线上，它在曲线上不能知道周围空间的任何信息，那么，它感觉不出它的曲线世界与其他的曲线(或直线)有任何的不同。

曲面则有可展(成平面)与不可展之分。一个球面是不可展的，因为你不可能将它铺成一个平面；而柱面是可展的，它具有与平面完全相同的内在几何性质。如果有一种生活在柱面上的生物的话，它会觉得与生活在平面上是一模一样的，但球面生物就能感觉到几何上的差异。比如说，柱面生物在它的柱面世界中画一个三角形，将三角形的三个角加起来，会等于180°，这个结论与平面生物得到的一致。而球面生物在它的世界中画一个三角形，它将会发现三角形的三个角加起来，要大于180°。

这种与曲面嵌入三维空间的弯曲方式无关，只研究所谓曲面本身上的几何，叫做内蕴几何。高斯是研究内蕴几何之第一人。他在1827年发表了《关于曲面的一般研究》一文，研究曲面情形之下能够发展的几何性质。他最初的目的是为了应用，因为当时的德国汉诺威政府要他主持一个测量工作。为了给这个测量工作一个理论基础，高斯写下了这篇当时在微分几何上最重要的论文，抓住了微分几何中最重要的概念，建立了曲面的内在几何，从而奠定了近代形式曲面论的基础，使微分几何自此成了一门独立的学科。

什么样的几何量才能够代表曲面的内蕴几何性质呢？留待下一篇介绍。