# 物理学咬文嚼字之七十四
# 保守与守恒

曹则贤†
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2015－06－30收到
† email:zxcao@iphy.ac.cn
DOI:10.7693/wl20150709

It is not the job of philosophers or anyone else to dictate meanings of words different from the meanings in general use[1].

——Steven Weinberg

**摘　要**　Preserve和conserve都是强调保持某个事物不变，在物理学中它们是和symmetry，invariance相关联的，从属于一个一脉相承的概念体系。不同广延量的守恒律掩盖的是不同的物理。

## 1　引子

常见英文词汇中有几个词干为serve的词，如observe，reserve，preserve，conserve，deserve，subserve，等等。不过，serve来自两个不同的拉丁语词干。在deserve, subserve中，serve的拉丁语词干为servire (to serve)，subserve有促进、服务于(目标)的意思，deserve (to serve diligently)是应得(奖励，惩罚)的意思。而observe，reserve，preserve，conserve的拉丁语词干则是servare (to keep or hold)。以observe为例，observe=ob (to，toward，before，in front of)+servare，所以observe有观察、注意到和遵从(某种习俗)的意思。物理学研究的一个重要任务和手段是to observe the reality (关注、把握实在)，故各种观察手段的研发和各种观测活动的进行构成了实验物理研究的主体。洋文的observe (on，upon)还有做结论、评论的意思，一般从中文学英文者可能不太会注意这一点。

本篇关注conserve和preserve这两个物理和数学经常会遭遇的关键概念，它们随时会以(动)名词形式或分词形式出现在你正阅读的文献中。Conserve和preserve的意思由词干servare决定，在意大利文中它们就是写成preservare，conservare形式的。Preserve，to protect，to observe beforehand，即事先顾及，比如作线性变换，事先就要求变换后矢量的夹角不变，这就是angle-preserving transformation (保角变换)了。Conserve=con(with)+servare，to keep from being damaged，lost，or wasted；save；to make (fruit) into preserves，即保存、储藏、节省的意思。Preserve和conserve的用法似乎不容易区分，试比较to conserve national heritage (保护国家遗产)，to preserve natural resource(保护自然资源)，environmental conservancy(环境保护)，food preservation (食物保存、腌制)。当然了，reserve的意思也非常接近，如a reserve of food(食物储备)，wildlife reserve(野生动物保护区)。

物理学关注preservation，conservation，这和在变化中寻找不变，其思想是一脉相承的。因此，谈论preservation，conservation就总要提及transformation (变换)，mapping (映射)，symmetry(对称性)，invariance (不变性)等概念。

## 2　Preservation

学复变函数时接触到了保角变换，不过一个模糊的名词而已。后来知道那是angle-preserving transformation，即保持矢量夹角不变的映射。如果线性变换对任一非零矢量的效果仅仅是转过某个角度或者作实数倍λ的拉伸，则变换后矢量间的夹角未被触动。这可能是最简单的保角变换了。共形映射(conformal map)，即局部保角变换，保持夹角

1) 哲学家，或者别的什么人物，没资格硬要赋予词语以有别于其日常用法的意义(Steven Weinberg，Can science explain everything? Anything? The best American science writing，2002)。——笔者注

和无穷小图形的形状不变。一个变换是否是保角变换可由变换的Jacobian行列式判断，如果各点上的Jacobian行列式都是一个标量乘上转动矩阵，则变换是共形的。共形变换一般是定义在$C^n$上的。一般教科书论及共形变换时都是关于复平面的：如果一个复变函数是全纯的且导数处处不为零，则是共形的。之所以只关注平面情形是因为高维情形下共形变换群会受到更严格的限制。

共形映射对物理学极为有用。任何一个由势(函数)定义的函数(如电磁场，引力场等)，经由共形映射变换后函数仍是由势(函数)所决定的。一个定义在平面上的调和函数，即满足拉普拉斯方程$\nabla^2 f=0$的函数，通过一个共形映射变到了另一个平面域内，变换后还是调和的。复变函数教科书里的常见例子是关于在边为等势线的尖角内的电荷所引起之电势场的保角变换解法。共形场论是共形映射下不变的量子场论，象凝聚态系统在临界点就常常是共形映射下不变的，这些复杂的学问值得物理学修习者为其付出努力。

关于变换可preserve的特征，花样很多。关于空间的变换，简单的转动和平移会保持矢量长度，或者两点间距离，不变，这样的变换是length-preserving transformation。作为狭义相对论核心的洛伦兹变换，不过是关于($x$，$y$，$z$；i$ct$)空间中矢量的转动，它保持距离平方$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2$不变。既然是转动，转动角度自然要满足关系$\mathrm{tg}(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\mathrm{tg}\theta_1+\mathrm{tg}\,\theta_2}{1-\mathrm{tg}\,\theta_1\mathrm{tg}\theta_2}$，相对论中的速度求和公式即由此而来。广义相对论谈论弯曲时空。保持弯曲时空某特征的变换，有保测地线(geodesic-preserving)的(涉及仿射对称性，affine symmetry)，保度规张量(metric-preserving)的(涉及Killing symmetry)，保曲率(curvature-preserving)的，保能量-动量张量(energy-momentum tensor preserving)的，等等。保时空特征的变化涉及时空的对称性；反过来，预设拟保护的特征又可以用来定义对称性。

对于物理的空间来说，有距离是必须的。一个有度规的空间(metric space)，是可在其中定义距离的空间。给定空间X中一个metric，即定义距离的函数$d$，若经变换$f$后的函数$f\circ d$依然是空间X的一个metric，则变换是metric-preserving function。Isometry(等距映射)是distance-preserving的、单射的映射。两个度规空间X，Y，其度规分别为$d_X$，$d_Y$，函数$f$：X→Y如果满足如下条件：对任意属于X的两点有$d_Y(f(a), f(b))=d_X(a, b)$，则其是等距映射。常见的反射、平移和转动都是欧几里得空间上的全局等距映射。物理时空的metric-preserving transformation也意味着其它的对称性，比如针对爱因斯坦场方程的一个解，若一个矢量场是保度规的，则它一定也保持相应的能量-动量张量不变[1]。

字面上同metric-preserving transformation很接近的是measure-preserving transformation(保测度变换)。测度是集合论和遍历理论中的重要概念，对于一个由集合X和其上$\sigma$-代数构成的测度空间，有概率测度$\mu(\mathrm{X})=1$，$\mu(\varnothing)=0$。对X所作的变换如果使得测度不变，就是保测度变换。最简单的情形是，若测度为单位圆上归一化的角测度$\mathrm{d}\theta/2\pi$，那么转动就是measure-preserving transformation。

**图1** William Rowan Hamilton (1805—1865)

于各种保持某种特征的(feature-preserving)变换中，愚以为经典力学中的正则变换最为高明，它保的是方程$\dot{q}=\partial H/\partial p$，$\dot{p}=-\partial H/\partial p$的形式，因此是form-preserving transformation。正则方程是经典力学通向统计物理、量子力学和量子统计的桥梁，它提供了如何构筑物理学的典范。正则方程和相应的正则变换的非凡之处，一般教科书中多未充分阐明，而对William Rowan Hamilton (图1)个人的推崇也严重不足。就关于物理学、数学的思想境界而言，Hamilton同牛顿与爱因斯坦相比只高不低。

## 3 Conservation

在物理学中，守恒量(conserved quantity)和守恒律(conservation law)扮演着重要的角色。就一个广延量而言，总可以谈论其是否是守恒的(conserved)。关于那些守恒量，如能量，或者在质能关系出现之前的物质，守恒的另一种表述是该量“既不会被产生，也不会被消灭”。守恒律常表现为连续性方

程的形式， 如(无源空间中)流体的守恒律就是由方程 $\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho u)=0$ 所表述的。局域的守恒律表现为连续性方程，而非守恒方程是更一般的平衡方程(balance equation)，涉及广延量的产生(creation)与消灭(destruction)。用守恒律表达定律的优点，一方面是表述容易，另一方面是适用性广。

一些守恒律谈论的是某些物理量有条件的守恒，如不受外力(距)作用的体系，其(角)动量守恒。 这两者之间，动量守恒很容易被察觉到，但角动量守恒就不那么容易理解了。Kelper第二定律表述的是有心力作用下的角动量守恒，但人们认识到这一点要晚很多。 过分强调某个非守恒量在特殊条件下的守恒， 会掩盖其物理本质。一个量是否守恒，是那个物理量本身的性质，而非系统的性质[2]。某种意义上不夸张地说，物理学表述患上了守恒律依赖症。

在普通物理中，有保守力(conservative force)的概念：若力所做的功是不依赖于路径的，或者力的环路积分为零，则它是保守的。所谓“保守的”指的是一个不变的性质，即换一条积分路径得到的积分值并不变。对保守力 $\vec{F}$，可以定义一个标量的势 $\Phi$， $\vec{F}=-\nabla\Phi$。显然，势函数的相加比力矢量的相加方便多了。$\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$，$\vec{F}=-\nabla\Phi$，$\nabla\times d\vec{F}=0$，这三种表达是等价的。若使用外微分表达的形式，势函数 $\Phi$ 满足 $d\wedge d\Phi=0$。

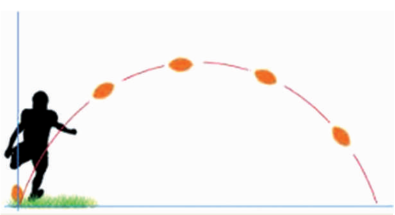

图2　抛体运动的拐点让动能和重力势能的转化看起来很直观

环路积分为零在热力学发展中起到过重要的作用。对于可逆循环2)，选择合适的温标，即绝对温标，积分 $\oint dQ/T=0$ (这表明热力学第二定律本身也是一种守恒律；或者至少它同守恒律有关)。这即是说 $\oint_A^B dQ/T=S(B)-S(A)$，与从状态A到状态B的路径无关，当然也与路径是否可逆无关。由此引入的热力学势函数，或者状态特征函数，$S$，就是熵。有了熵的概念，于是(热力学语境下的)能量守恒3)，对于最简单的体积变化做功的情形，就有了微分形式的主方程(cardinal equation)，$dU=TdS-pdV$。将主方程推广到多个做功项的情形，并采用外微分表达，则有主方程 $dU=T\wedge dS+Y_A\wedge dX_A$，平衡态热力学涉及的数学就都在这里了。热力学第二定律的Carathéodory表述的一个诠释是，不管做功项 $Y_A\wedge dX_A$ 有几项，$T\wedge dS+Y_A\wedge dX_A$ 总可以被表示成全微分。

关于运动的守恒定律，最先可能是自落体运动导出来的，由下落高度同物体获得速度之平方之间的关系，$\Delta(v^2)\propto\Delta h$，可以导出 $\frac{1}{2}mv^2+mgh=\text{const}.$ 的结论， 这可能是最初的机械能守恒定律。这个定律很容易推广到抛体运动，为抛体运动的解带来了很大的方便。无摩擦条件下抛体运动的机械能守恒定律，可诠释为动能和重力势能之间相互转化但保持其和不变。这个所谓的转化，由于抛体上升速度为零那个拐点的存在，是非常直观的因此也是容易为人们所认可的(图2)。与此相对，所谓热力学中的能量定律，$dU=TdS-pdV$，虽然我们也会说热转化成功，功转化成热，但显然不是动能和重力势能之间的那种“仿佛无碍”的转换。热—功之间的转换是非可逆的，有个与温度有关的等价量在暗中起作用[3]。这个等价量就是熵，其引入是同热力学第二定律的表述同步的。由此也就理解了，为什么热力学第一定律和第二定律是纠缠的，甚至时间上第一定律的出现还要晚一些。熵的引入是自关于可逆过程的关系 $\oint dQ/T=0$ 得来的，看似也该是个守恒量。但是关于孤立系统和非静态过程又有熵增加原理，故此有熵是半守恒量的说法[2]，即“熵可以被产生，却不可以被消灭”。

机械能守恒定律和热力学的能量守恒定律不是一回子事，电荷守恒更显不同。仿照能量守恒的说法“能量既不会被产生，也不会被消灭”，则电荷守恒意味着“电荷既不会被产生，也不会被消灭”。可是，在 $e^{+}+e^{-}\to 2\gamma$ 这样的过程中，虽然电荷量守恒，但是电荷还是被消灭了的——一个有正负电荷对的世界和无电荷的世界还是不一样的。

守恒量与守恒律的研究，引导着物理学不断走向深入。从最小作用量原理出发建立的经典力学，其Euler—Lagrange方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$

2) 由可逆过程构成的循环是可逆循环。可逆过程经过的都是由系统状态方程所给出的平衡态，但不存在完全由平衡态连接的过程。因此，可逆过程是不存在的过程，或曰“理想”过程，因而是热力学构造过程中重点关照的过程。 弄清楚了这个弯弯绕， 热力学还是蛮好理解的。——笔者注

3) 热力学语境中的能量同力学语境下的能量，还是有些区别的。——笔者注

提供了初步的寻找运动常数的方法：若拉格朗日量中不显含某个广义坐标，则相应的共轭动量是运动常数。哈密顿发展了正则变换对广义坐标进行变换，从而可以找出更多的拉格朗日量隐含的哑变量，得到更多守恒的正则动量。寻找守恒量另一个有效的方法是利用Hamilton—Jacobi方程 $\partial S/\partial t+H=0$ [4]。德国女数学家诺德显然吃透了这部分内容(当然她的数学知识也跟得上)，她1918年的工作建立起了守恒律是同运动的微分对称性之间的深层次关联。考查一个力学体系，其在时空变换 $t\mapsto t'=t+\delta t$；$q\mapsto q'=q+\delta q$ 下作用量是不变的。假设有 $N$ 个这样的变换，把一般性的扰动写成线性组合 $\delta t=\sum\varepsilon_r T_r$；$\delta q=\sum\varepsilon_r Q_r$，即无穷小量与生成元构成的线性组合，则有如下一般形式的守恒量 $\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{q}-L\right)T_r-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot Q_r$。若对称性是简单的空间(时间)平移对称性，$Q_r=1$ ($T_r=1$) 守恒量就是动量(哈密顿量)；若对称性为转动对称性，$r\mapsto r'=r+\delta\theta\, n\times r$，即 $Q_r=n\times r$，则守恒量为 $\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{q}-L\right)T_r-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot Q_r=-p_r\cdot(n\times r)=-n\cdot(r\times p_r)$，即绕 $n$-轴的角动量。

诺德的工作既为守恒律找到了一个解释，也提供了一个由对称性构造守恒量(或者由要求的守恒量去构造作用量或者拉格朗日量)的工具。相应的守恒量也被称为诺德荷(Noether charge)。这里谈论的对称性是指运动定律是对称的而非运动物体是对称的。由对称性不仅能导出守恒律，还可使很多问题得到简化。有必要指出，对称性不是用来简化问题的，它是物理本身。

## 4 Preserve and conserve

我们谈论保某个特征的变换，谈论保守力，谈论守恒量和守恒律，似乎是在言说几个不太关联的不同概念。但是，在英文中的preserver和conserve，或者在意大利文中的preservare和conservare，却明显是同源词，它们甚至可以混用。而在德语中，preserve和conserve让一个词erhalten给包办了。Erhaltung der Kultur (文化保护)对应英文的culture preservation或者culture conservancy，Winkel erhalten bleiben (角保持不变)对应英文的angle is preserved，而在句子“Die Sätze über Erhaltung bzw. Nichterhaltung extensiver Größen ist ein Spiegel der historischen Entwicklung der Physik”[2]中，Erhaltung对应英文的conservation[5]。保角变换，angle-preserving transformation德语会说成是winkeltreue Abbildung，这Winkel (角度)+treu (忠实于)的说法很俏皮。

保特征的变换，守恒量和守恒律，都和体系的对称性有关，都追求在变换中找寻不变，其思想是一脉相承的。对称性意味着守恒律；对称性本身就是不变性的存在；拉格朗日力学语境中对称性与守恒量的对应只是一个案例而已。Symmetry和invariance似乎也是可混用的。Time invariance (时间不变性) 对应能量守恒；translation symmetry (平移对称性) 对应动量守恒，Lorentz invariance (洛伦兹不变性)对应的特殊守恒律为CPT (结合了电荷、宇称和时间的反演)，gauge invariance (规范不变性) 对应电荷守恒。相比于守恒律，不变性似乎更具有普遍意义。诺德1918年文章的题目就是Invariante Variationsprobleme (不变变分问题)[4]。有趣的是，一些没给出名字的守恒量干脆还叫invariance，比如invariance under charge conjugation和invariance under time reversal——将它们译成电荷共轭不变量和时间反演不变量也许能避免一些误解。

## 参考文献


[1] Stephani H, Kramer D, MacCallum D *et al*. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press, 2003

[2] Herrmann F, Job G. Altlasten der Physik. AULIS Verlag, 2002

[3] Clausius R. Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorien. Annalen der Physik und Chemie, 1854, 93 (12): 481

[4] Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Mathphys. Klasse, 1918, 235


4) 薛定谔方程即由此方程构造而来。——笔者注

5) 直译成英文就是The laws over the conservation or non-conservation of extensive variables is a mirror of the historical development of physics，即“关于广延量之守恒或者不守恒的定律是物理学发展史的一面镜子”。——笔者注