广义相对论与黎曼几何系列之四 内蕴几何

张天蓉†

2015-07-16收到
† email:tianrong1945@gmail.com
DOI:10.7693/wl20150808

高斯在1827年的著作《关于曲面的一般研究》中，发展了内蕴几何[1]。

所谓“内蕴”，是相对于“外嵌”而言，指的是曲面(或曲线)不依赖于其在三维空间中嵌入方式的某些性质。内蕴的概念也可以被解释得更为物理一些：一个观察者在自己生活的物理空间中所能够观察和测量到的几何性质就是这个空间的内蕴性质。也有人比喻说：外嵌是机械设计工程师看待曲面的方法，他们将曲面看成三维机械零件的表面；而内蕴几何则是地球上的测地员测量地球表面所得到的几何性质。举例来说，内蕴几何量的最简单例子就是弧长。一条直线可以在三维空间中看似转弯抹角地任意弯曲，即随意改变它的曲率和挠率，但生活在直线上的“点状蚂蚁”观察不到这些“转弯抹角”，只能测量到它爬过的弧长。因此，空间曲线的曲率和挠率，是三维空间的生物观察这条曲线时得到的重要几何性质，但却并不是内蕴几何量。对曲面来说也是如此，弧长并不因为平面卷成了柱面或锥面而改变。弧长与曲线(或曲面)嵌入空间中的弯曲情况无关，因而是个内蕴几何量。

曲线没有内蕴几何，因为所有空间曲线的内在性质都与直线相同。因此，内蕴几何主要用于研究曲面的性质。既然弧长是内蕴的，弧长所导出的其他几何量，诸如面积、夹角等便也是内蕴的。在一个坐标系中如何计算弧长？有了微积分之后这点并不困难，首先要有计算一小段弧长的公式，这个公式可从最古老的欧氏几何中的勾股定理得到，然后进行积分便能求得弧长。

弧长是一个任何曲面都有的、最基本最简单的内蕴几何量，由此可定义曲面的等距变换，即保持弧长不变的变换。曲面的内蕴几何量都是等距变换下的不变量。或者说，根据计算弧长的公式(数学上的专业术语称之为曲面第一基本公式)，可以建立起曲面的内蕴几何。

空间曲线的曲率和挠率不是内蕴的。对曲面来说，欧拉定义过曲面上的两个主曲率，将这两个主曲率相加除2，可定义“平均曲率”。然而人们发现，两个主曲率，以及平均曲率都不是内蕴几何量。直观地看，之前讨论过的柱面和锥面等可展曲面，应该与平面有相同的内蕴几何，而球面一类的不可展曲面，代表了另外种类的几何。虽然主曲率和平均曲率不是内蕴的，但高斯从他的几何直观感觉到，应该存在定义某种曲率的方法，得到描述曲面内蕴性质的几何量。于是，他开始探讨如何定义曲面的内蕴曲率。

首先，高斯研究曲面在一个给定点及其附近邻域的法线方向，定义了高斯映射。然后再通过高斯映射定义曲面的内蕴曲率，即高斯曲率。

如何定义高斯映射？如图1(a)所示，右上方为被研究的曲面，左下方为一个单位球面，高斯映射是从该曲面到单位球面的映射。给定曲面上的一个点P，考虑其邻域(总面积为A)上的法线矢量。将这些法线矢量的端点全部平移到原点，但保持原来矢量的方向。移动后，这些法线矢量将与单位球面相交于一块面积为B的图形。高斯认为，面积B与面积A的比值可以代表曲面在P点的内蕴弯曲程度。高斯将其定义为高斯曲率。

我们举例说明高斯曲率为什么代表了曲面的内在弯曲度。比如说，如果曲面是一个平面，如图1(b)所示，那么P点附近所有法线都指向同一个方向，高斯映射便将整个平面映射为单位球上的一个点，因此面积B为0，从而得到平面的高斯曲率为0。如果曲面是一个柱面，

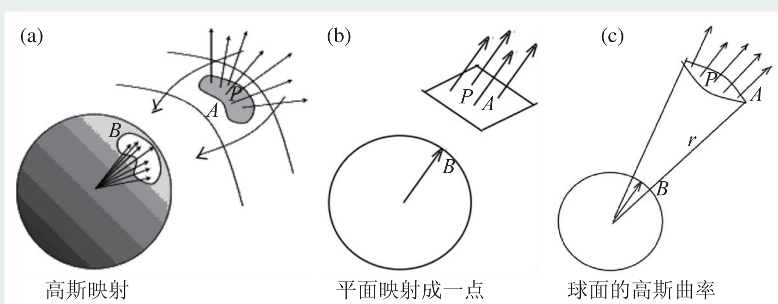

图1 高斯映射和高斯曲率

高斯映射是单位球面上的一个圆周，圆周的面积也是0，因而柱面的高斯曲率也为0。图1(c)所示的是半径为r的球面的情形，根据高斯曲率K的计算公式：$K=B/A=1/r^2$，可见r越大，高斯曲率越小，这点符合我们对球面内蕴曲率的直观理解。

如上所定义的高斯曲率与欧拉研究过的主曲率有一个简单的关系：高斯曲率等于两个主曲率的乘积。重温两个主曲率的意义：它们分别是过曲面上某一点截线曲率(绝对值)的最大值和最小值，对柱面、锥面及切线面三种可展曲面，最小值为0，因此两个主曲率相乘得到的高斯曲率也为0。

高斯在发现了高斯曲率是一个曲面的内在性质时，一定是无比兴奋和激动，他情不自禁地将这一结论命名为“绝妙定理”：三维空间中曲面在每一点的曲率不随曲面的等距变换而变化。意思就是说，高斯曲率是一个内蕴几何量。绝妙定理的绝妙之处就在于，它提出并在数学上证明了内蕴几何这个几何史上全新的概念，它说明曲面并不仅仅是嵌入三维欧氏空间中的一个子图形，曲面本身就是一个空间，这个空间有它自身内在的几何学，独立于其嵌入而存在。

内蕴几何是生存在各种类型曲面空间中的“爬虫生物”所观察到的几何。因为地球近似为一个球形，图2(a)中的测地员测量到的几何应该是球面几何，但是地球半径比当年测地员活动的范围大得多，球面几何的性质很难表现出来。图2(b)中所示的曲面空间有三种：平面、球面和双曲面。平面是一个二维的欧氏空间，而球面和双曲面则是非欧氏空间，这使我们联想到也是在那个年代发现的非欧几何，即罗巴切夫斯基几何，或双曲几何。尼古拉·罗巴切夫斯基(Nikolai Lobachevsky，1792—1856)是俄罗斯数学家，非欧几何的创始人[2]。

欧几里德几何是一个基于公理或共设的逻辑系统。公理犹如建造房屋时水平放在底部的大砖头，有了这些牢靠平放的大砖头作为基底，其他的砖块便能够一层一层地叠上去，万丈高楼也就平地而起。基底砖块破缺了，或者置放得不水平，楼房就可能会倒塌。在逻辑系统中的数条公理，应该是公认的、显而易见的、确认无法被证明的一些假设。作为欧氏平面几何大厦的基底有五条公理，其中第五条公理是论及平行线的，也称为平行公设：“若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交。”

人们对前面四条公理都没有什么疑问，唯独对这第五条公理没有好感，总觉得它说起来拗口，听起来不是那么显然和直接。数学家们并不怀疑它的正确性，而是觉得它不像一个不证自明的公理。大家的意思是说，欧氏平面几何的大厦用前面四块大砖头可能也就足以支撑了，这第五块砖头，恐怕本来就是放置在另外四块砖头之上的。因而，欧氏几何创立以来，许多几何学家都曾经尝试用其他四条公理来证明这条公理，但却都没有成功。这种努力一直延续到19世纪初。1815年左右，年轻的数学家罗巴切夫斯基也开始思考这个问题。在试图证明第五公设而屡次失败之后，罗巴切夫斯基采取了另外一种思路：如果这第五公设的确是条独立的公理的话，将它改变一下会产生什么样的结果呢？

第五公设也可以有另外一种表达方式：“通过一个不在直线上的点，有且仅有一条不与该直线相交的直线。”罗巴切夫斯基巧妙地将这一条公理的表述改变如下：“过平面上直线外一点，至少可引两条直线与已知直线不相交”。然后，他将这条新的“第五公设”与其他的公设一起，像欧氏几何那样类似地进行逻辑推理，推出新的几何命题来。罗巴切夫斯基发现，如此建立的一套新几何体系，与欧氏几何不同，但却是一个自洽的、没有任何逻辑矛盾的体系。因此，罗巴切夫斯基宣称：这个体系代表了一种新几何，只不过其中许多命题有点古怪，似乎与

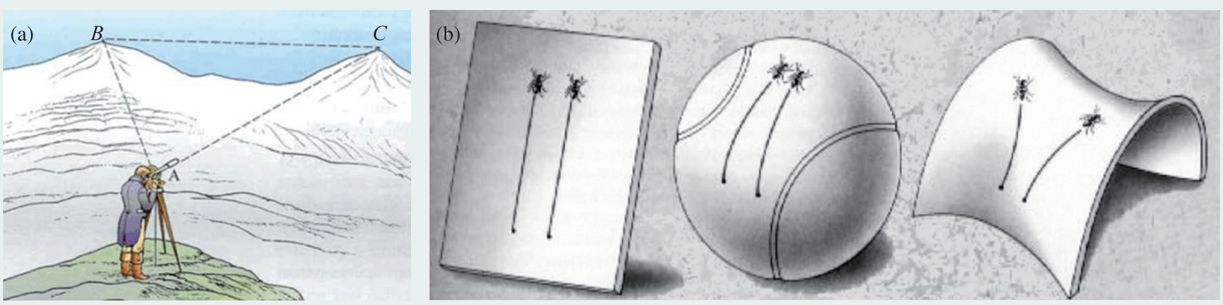

图2　内蕴几何是测地员或“爬虫”观察到的几何　(a)测地员观测到的几何；(b)平面、球面、双曲面上的几何

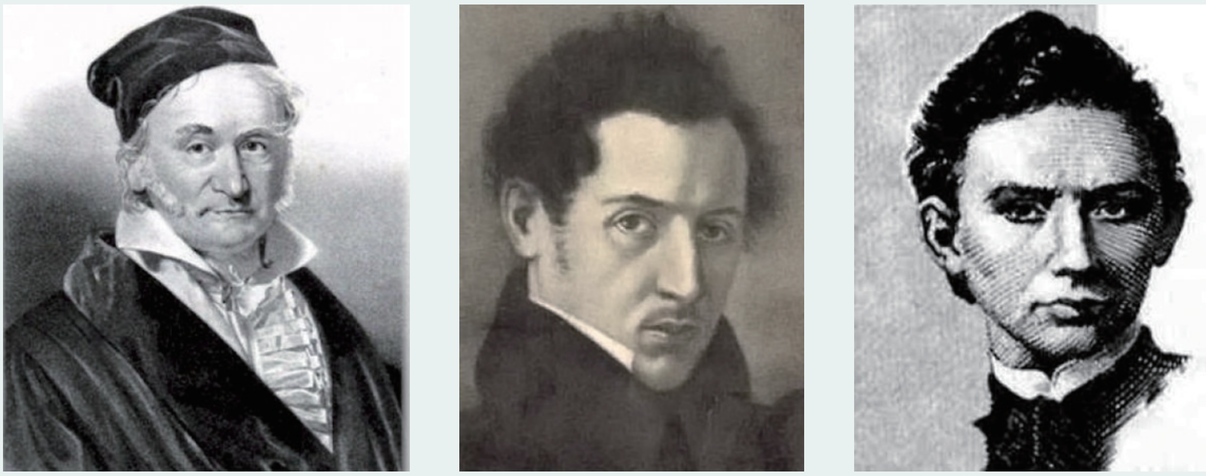

图3 非欧几何鼻祖(从左到右)：高斯、罗巴切夫斯基、鲍耶

常理不合，但它在逻辑上的完整和严密却完全可以与欧氏几何媲美！

在这里可以列举几条罗氏几何中的古怪而不合常理的命题：同一直线的垂线和斜线不一定相交；不存在矩形，因为四边形不可能四个角都是直角；不存在相似三角形；过不在同一直线上的三点，不一定能作一个圆；一个三角形的三个内角之和小于180°……等等。

从这种反证法能得到不同几何体系的事实，说明第五公设是一条不能被证明的公理。从此以后，数学家们不再纠结于第五公设的证明。然而，由于罗氏几何得出的许多结论和我们所习惯的欧式空间的直观图像相违背，罗巴切夫斯基生前并不得意，还遭遇了不少的攻击和嘲笑。

罗巴切夫斯基于1830年发表了他的非欧几何论文。无独有偶，匈牙利数学家亚诺什·鲍耶(János-Bolyai，1802—1860)在1832年也独立地得到非欧几何的结论[3]。那段时期也正是高斯发展他的内蕴几何观点之时，同是几何研究，这位号称“数学王子”的天才不可能不思考非欧几何的问题。他对罗巴切夫斯基等的工作又是如何看待的呢？

匈牙利数学家鲍耶的父亲，正好是高斯的大学同学。当老鲍耶将亚诺什·鲍耶的文章寄给高斯看后，高斯却在回信中提及自己在三十多年前就已经得到了相同的结果。这带给亚诺什 · 鲍耶很大的打击和疑惑，甚至怀疑高斯企图盗窃他的研究成果。但实际上，从高斯的文章、笔记、书信等可以证实，高斯的确早就进行了非欧几何的研究，并在罗巴切夫斯基与鲍耶之前已经得出了相同的结果，只是没有将它们公开发表而已。

早在1792年，15岁的高斯就开始了关于平行公理独立性的证明。他继而研究曲面(球面或双曲面)上的三角几何学，17岁时就深刻地认识到：“曲面三角形之外角和不等于360°，而是与曲面的面积成比例”，这可以说是高斯—博内定理的早期版本。1820年左右，高斯已经得出了非欧几何的很多结论，但不知何种原因，没有发表他的这些关于非欧几何的思想和结果，直到1855年他去世后，相关内容才出现在出版的信件和笔记中。有人认为是因为高斯对自己的工作精益求精、宁缺勿滥的严谨态度，有人认为是高斯害怕教会等保守势力的压力，还有人认为高斯已经巧妙地将这些思想包含在他1827年的著作中了。

意大利数学家贝尔特拉米在1868年证明，非欧几何可以在欧几里得空间的曲面上实现。比如罗巴切夫斯基和鲍耶的几何就是双曲面(也叫马鞍面)上的几何，而将第五公设改变成“通过特定的点没有平行线”的话，则能得到球面几何。因此，的确可以说，高斯已经将他的非欧几何思想蕴涵在他的内蕴几何中，也许这就是他在早期没有发表他的非欧几何结果的原因。

参考文献

[1] Gauss C F(Author)，Hiltebeitel A(Translator)，Morehead J(Translator). General Investigations of Curved Surfaces(Unabridged，Paperback).Wexford College Press，2007

[2] Geometrical Investigations on the Theory of Parallel lines. Halstead G N(tr.). 1891. Reprinted in Bonola：Non Euclidean Geometry，1912. Dover reprint，1955

[3] Gardner M. Non- Euclidean Geometry. Chapter 4 of the Colossal Book of Mathematics.W.W.Norton & Company，2001