广义相对论与黎曼几何系列之七 黎曼几何

张天蓉[†]

2015-10-24收到
† email:tianrong1945@gmail.com
DOI: 10.7693/wl20151112

在广义相对论与黎曼几何系列之四中，介绍“内蕴几何”时说过，高斯以他的“绝妙定理”建立了曲面内在的微分几何。之后，是高斯的得意门生黎曼将曲面的概念扩展到流形，将内蕴几何扩展到n维的一般情形，建立了黎曼几何。

黎曼(1826—1866)出生在一个贫困的普通家庭，比高斯刚好小50岁。有趣的是，按时间算起来，高斯那时候正好在这个地区进行土地测量。时间的巧合，给人一种神话式的联想：上帝是否就在那时候将非欧几何——黎曼几何的思想种子，植根到了那片被高斯丈量的土地上。

遗憾的是，黎曼只活了39岁，不过，在短暂的一生中，他对数学做出了杰出的贡献。黎曼小时候家境贫困，但其父是教堂的牧师，很重视儿子的教育，也注意到黎曼在数学上的过人之处。因此，黎曼的父亲没有为了尽早改善家庭的经济状况而阻止黎曼往数学方向发展，这才有了现代数学上著名的黎曼面、黎曼几何、黎曼猜想……等等。

黎曼19岁进入哥廷根大学读书时，高斯将近70岁，已经是世界鼎鼎有名的数学大师，正是在听了高斯的几次数学讲座之后，黎曼才下决心改修数学。

1847年，黎曼转入柏林大学学习，也许是冥冥中某种力量的召唤，两年后他又回到哥廷根大学攻读博士学位，成为高斯晚年的学生。按照德国的学术制度，博士毕业后如想在学术界发展当教授，必须首先作2—3年的独立研究和教学工作，结束时交出一篇总结性文章(Habilitationsschrift)经受考评而获得教职(privatdozent)。当时的黎曼便是为了申请哥廷根大学的教职，被要求要作一个难度颇高的就职演说。为了确定论文的选题，他向高斯提交了3个题目，以便让高斯在其中选定一个。没想到高斯选中了黎曼当时并没有多少准备的几何基础题目。更没想到的是，正是这篇黎曼花了不到两个月时间准备出来的演讲论文《论作为几何基础的假设》(原文见文献[1]，英文翻译版见文献[2])，提出了一大堆陌生概念，开创了一种崭新的几何体系，令哥廷根的数学同行们大吃一惊。

某些传言可能并不过分，据说当时在黎曼就职演讲的听众中，唯有高斯听懂了黎曼在说些什么。

从前面提到的“内蕴几何”一节中，我们已经知道，根据曲面的第一基本形式，也就是曲面上计算弧长的公式，可以建立起曲面的内蕴几何。三维空间中两个参数u和v所描述的曲面的第一形式可用下式表达：

$$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2, \quad (1)$$

式中的E，F，G是曲面第一基本形式的系数。黎曼在他的就职演说中，将二维曲面的概念扩展为“n维流形”，将E，F，G等系数扩展为定义在n维黎曼流形上每一点p的“黎曼度规”$g_{ij}(p)$：

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j .$$

有了度规，就有了度量空间长度的某种方法，也就才能够测量和计算距离、角度、面积等等几何量，从而建立流形上的几何学。首先，我们可以从图1所示的平面和球面上的弧长微分计算公式，对黎曼度规g_{ij}得到一点直观印象。对图中的二维平面和二维球面，下指标i和j的取值从1到2，这时，可以将度规g_{ij}写成2×2的矩阵形式：

平面直角坐标时， $g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$；

平面极坐标时， $g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{bmatrix}$；

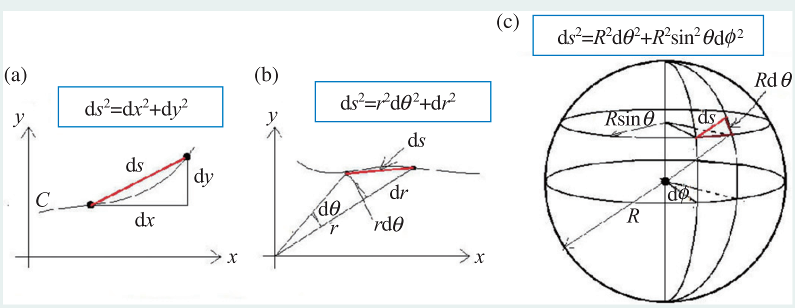

图1 弧长微分表达式 (a)平面直角坐标；(b)平面极坐标；(c)球面坐标

球面经纬线坐标时，$g=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \sin^2\theta\end{bmatrix}$.

总结一下上面三种情况下度规的性质：(a)平面直角坐标的度规是个简单的δ函数(单位对角矩阵)，而且对整个平面所有的点都是一样的；(b)平面极坐标的度规对整个平面不是常数，随所在点矢径r的不同而不同；(c)球面坐标上的度规也不是常数。由上面(a)和(b)的结论可知：同样是描述平面，但如果所选择的坐标系不同，度规也将不同。平面上的极坐标和直角坐标是可以互相转换的，因此，第二种情况(b)的平面极坐标度规可以经过坐标变换而变成(a)那种δ函数形式的度规。那么，现在就有了一个问题：第3种情况的球面度规是否也可以经过坐标变换而变成如(a)所示的那种δ形式的度规呢？对此数学家们已经有了证明，答案是否定的。也就是说，在ds保持不变的情形下，无论你做何种坐标变换，都不可能将球面的度规变成(a)所示的δ形式。由此表明，球面的内在弯曲性质无法通过坐标变换而消除，黎曼度规可以区分平面和球面或其他空间的内在弯曲状况。

一般来说，黎曼流形上每一点p的“黎曼度规”$g_{ij}(p)$随p点的不同而不同，这种以空间中的点为变量的物理量叫做“场”。

像黎曼度规$g_{ij}(p)$这种具有两个指标(i和j)，并且在坐标变换下按一定规律变化的几何量叫做二阶张量。因此，$g_{ij}(p)$是黎曼流形上的2阶张量场。不难看出，对n维流形上的点p，$g_{ij}(p)$在给定的坐标系中有n^2个分量，因而可以表示成一个$n\times n$的矩阵。除了2阶张量场之外，黎曼流形上也能定义0阶张量(标量)场、1阶张量(矢量)场、3阶、4阶以及更高阶的张量场。

张量在物理及工程上有广泛的应用，尤其是大家所熟知的“矢量”的概念，在日常生活中也比比皆是，例如速度、加速度、力、电流、水流、电场等等，这些既有方向，又有大小的物理量，都可以用矢量来表示。n维空间的矢量有n个分量，而标量只用一个数值表示，比如温度、湿度、密度、能量等属于标量。

物理量表达的是某种物理实在，应该与人为选择的坐标系无关。因此，标量、矢量、张量等都是独立于坐标系而存在的。只不过，为了测量和计算方便，人们总是要选取一定的坐标系，这样一来，这些量在不同的坐标系之下，便有了不同的分量值。然而，无论坐标系如何选取，因为总是对应于同一个东西，总有些量是不会改变的。因此，在坐标系变换时，张量的坐标分量便必须遵循某种规则，才能保证这一点。

有时候，坐标系的选取可以简化计算，或者更清楚地表征空间的某种性质。前面所说的度规张量就是如此。如果一个黎曼流形上每一点的度规张量都可以写成δ函数形式的话，黎曼将其称之为“平”流形。流形“平”或“不平”，定义在它上面的几何规律将完全不同。

图2　黎曼用α的不同数值，描述三种不同的曲面几何

黎曼将二维曲面的球面几何、双曲几何(即罗巴切夫斯基几何)和欧氏几何统一在下述黎曼度规表达式中：

$$\mathrm{d}s=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha\sum x^2}\sqrt{\sum \mathrm{d}x^2}\ ,$$

这个弧长微分ds表达式中的α，是2维曲面的高斯曲率。当α=+1时，度规所描述的是三角形内角和E大于180°的球面几何；当 α=−1时，所描述的是内角和E小于180°的双曲几何；当$\alpha=0$，则对应于通常的欧几里德几何(图2)。黎曼引入度规的概念，将三种几何统一在一起，使得非欧几何焕发出蓬勃的生机。

如同我们看到的嵌入三维空间中的大多数二维曲面都不是可展的一样，大多数流形都不是“平”的。高斯定义了高斯曲率来描述平面和“不可展”曲面的差异，黎曼将曲率的概念扩展为“黎曼曲率张量”。那是n维流形每个点上的一个四阶张量，张量的分量个数随n的增大变得很大，并且表达式非常复杂。不过，由于对称性的原因，可以将独立的分量数目大大减少。

也可以用黎曼定义的“截面曲率”来描述流形的内在弯曲程度。为此需引进过流形上一点p的切空间的概念。在这儿需要强调的是，黎曼研究的是一般情况下的n维流形，通常$n\geqslant3$，但我们人类的大脑想象不出，计算机也画不出来这些高维而又“不平坦”的流形是个什么样子，所以只好用嵌入3维空间的2维曲面的图像来表示这种“弯曲”流形，如图3所示。

一个n维流形过点p的切空间是一个n维的欧氏空间。设P_p是这个欧氏切空间中的一个平面，截面曲率$K(P_p)$定义为以P_p作为切平面的n维流形过p点的那个2维截面的高斯曲率。在特殊情况下，如果n=2的话，即对2维流形而言，只有一个截面曲率，正好就是原来的高斯曲率。

上面的表述对n大于2的情况不好直观想象，对n等于2又稍微显得平凡。尽管如此，从图3中，我们仍然可以将2维曲面图像添加一些想象而延伸到一般的流形及其切空间，从而得到某种直观印像。

黎曼是把流形概念推广到高维的第一人。流形的名字来自他原来的德语术语Mannigfaltigkeit，英语翻译成manifold，是多层的意思。一般的流形，不但“不平”，而且其“不平”度还可以逐点不一样，流形的整体也可能有你意想不到的任何古怪形状。不过，黎曼流形仅仅指其中定义了黎曼度规的可微分流形。

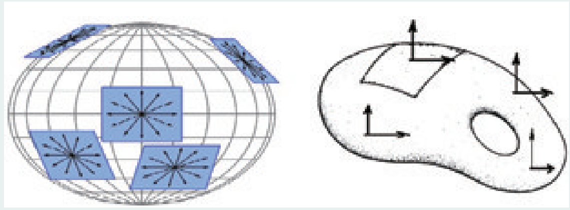

图3　流形和过每一点的切空间

从形式上来看，黎曼是将高斯的2维曲面几何推广到了n维，但实际上黎曼所做工作的意义远不止于此。首先，高维流形中的曲率的概念要比2维曲率丰富得多。此外，因为黎曼度规是基于弧长微分ds的计算公式，所以黎曼几何完全不同于之前的欧几里德几何，或笛卡尔坐标几何那种对整个空间都适用的几何学，而是一种局部化的几何。这是黎曼在几何上迈出的革命性的一步。研究黎曼几何时，我们不需要整个空间，只需要其中局部的一小块就够了。在黎曼流形上的每一点，都可以定义一个切空间，从而再进一步建立起黎曼流形上的微分运算等，这些将在本系列文章的下一篇中介绍。

参考文献

[1] Riemann B. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grundeliegen. 1854. http://www. emis. de/classics/Riemann/Geom.pdf

[2] Riemann B. On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry(translated by William Kingdon Clifford. Nature, Vol. VIII. Nos. 183, 184, pp. 14—17, 36, 37). http://www.emis.de/classics/Riemann/WKCGeom.pdf