

浅谈 $5/2$ 量子霍尔态：偶数分母与拓扑量子计算*

林熙[†]

(北京大学物理学院 量子材料科学中心 北京 100871)

2015-05-15收到

[†] email: xilin@pku.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20151202

Introduction to the $5/2$ fractional quantum Hall state: even denominator and topological quantum computation

LIN Xi[†]

(International Center for Quantum Materials, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

摘要 已发现的绝大部分分数量子霍尔态以奇数为分母， $5/2$ 态是一个例外。在 $5/2$ 态可能的波函数中，有一些携带非阿贝尔统计，可以用于拓扑量子计算。文章将简单介绍分数量子霍尔效应、 $5/2$ 态、非阿贝尔统计以及相关最新的科研进展。

关键词 量子霍尔效应， $5/2$ 分数态，低温物理，非阿贝尔统计

Abstract The $5/2$ state is distinct from most of the observed fractional quantum Hall states by being an even denominator state. Some of the proposed wave functions in this state possess non-Abelian statistics, which has potential applications in topological quantum computation. This article briefly introduces the basic concepts of the fractional quantum Hall effect, $5/2$ state, non-Abelian statistics, and recent progress in this field.

Keywords quantum Hall effect, $5/2$ state, low temperature physics, non-Abelian statistics

1 引言

1981年10月7日，崔琦先生看着数据开玩笑说“夸克”时，他的直觉敏锐地发现了这份新数据中最本质的物理(图1)。这一天，分数量子霍尔效应被发现了。1998年，崔先生和他的合作者 Horst L. Stormer 因分数量子霍尔效应的实验发现获得了诺贝尔物理学奖，一同获奖的还有对分数量子霍尔效应作出重要理论贡献的 Robert B. Laughlin。

夸克模型于1964年被提出。夸克是组成强子

的更基本的粒子，它们携带分数电荷。然而，在高能物理实验中，夸克的分数电荷没有被直接观测到过。在凝聚态物理领域，上世纪70年代时，一维聚合物的畴边界上也预言过分数电荷，但没有实验观测。1982年发现的分数量子霍尔效应，因为电子间的相互作用而提供了一个分数电荷的新舞台。除了分数电荷，相互作用还为分数量子霍尔效应引入了许多新奇的物理现象，例如偶数分母的分数量子霍尔态(引自文献[1—16])。

2 整数量子霍尔效应

半导体中的二维电子气体在低温和强磁场条

* 国家自然科学基金(批准号: 11274020, 11322435)、国家重点基础研究发展计划(批准号: 2015CB921101, 2012CB921301)资助项目

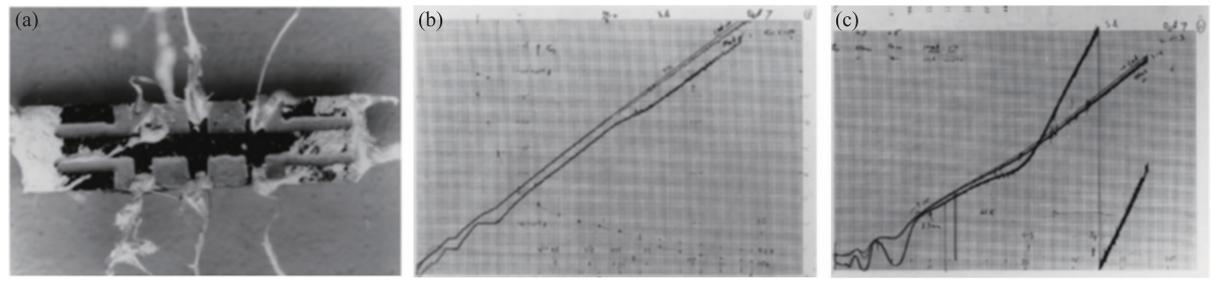


图1 1981年,观测到分数量子霍尔效应的第一个样品(a)与第一份实验数据(b)和(c),其中(b)为4.2 K和1.5 K时的霍尔电阻; (c)为4.2 K和1.5 K时的纵向电阻(引自文献[1])

件下能产生整数量子霍尔效应。整数量子霍尔效应由 Klitzing 发现,它有量子化的霍尔电阻。尽管有 1975 年 Ando 的相关理论讨论与 1976 年 Kawaji 的实验前兆,1980 年 Klitzing 观测到的完全量子化依然是未曾预料到的。

当整数量子霍尔效应发生时,纵向电阻为零,霍尔电阻出现不随磁场变化的平台,其值为常数 h/e^2 的 n 分之一, n 为整数(图 2),平台的精确程度可以高达 $1/10^{10}$ 的量级。整数量子霍尔效应的出现只需要二维条件、单个电子的量子化、以及杂质所引起的无序。考虑二维条件下单个电子量子化时,将出现朗道能级。实际情况需要考虑自旋引起的能级劈裂,二维电子气体的密度将决定电子可以填充多少个能级,被填充的能级数,即是霍尔电阻表达式中的整数 n ,也称为填充因子。当能级被杂质展开为局域态和扩展态时,如果费米面位于局域态内,磁场改变(相当于电子数改变)不改变输运结果,因此霍尔电阻为一个常数。尽管费米面是在能隙中,二维电子体系本身绝缘,然而在边界上受边界势影响,可以有边界电流,并且不同流向的边界电流位于不同的边界上,相互之间无法发生背散射,因此纵向电阻为零。

二维条件下的自由电子气体常被称为二维电子气。最早开展量子霍尔效应测量的二维电子气来自场效应管,最适合研究量子霍尔效应的二维电子气来自 GaAs—AlGaAs 异质结,其迁移率可以高达 $3 \times 10^7 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ 。因为朗道能级源自自由电子运动的哈密顿量,如果做一个估算,假设平

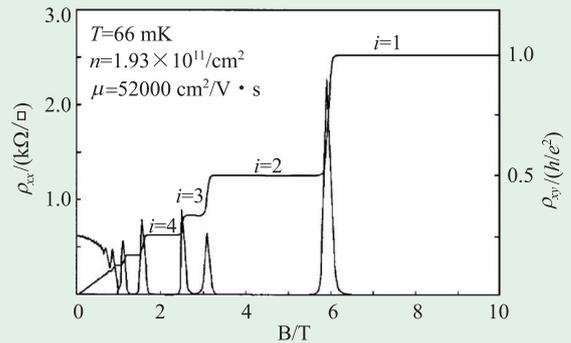


图2 整数量子霍尔效应,横轴为磁场,左纵轴为纵向电阻,右纵轴为霍尔电阻(引自文献[2])

均自由程足够长,长到可以跟电子回转一圈的距离相比拟,这时才能产生量子霍尔效应,而回转一圈的距离与磁场有关,平均自由程与迁移率有关,那么,1T 磁场下想观测到量子霍尔效应,迁移率需要 $10^4 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ 量级。此外,在石墨烯、MgZnO/ZnO 异质结、Si/SiGe 异质结、黑磷等体系中,也都发现了量子霍尔效应。

3 分数量子霍尔效应与分数电荷

在分数量子霍尔效应中,霍尔电阻为常数 h/e^2 的 $1/f$,填充因子 f 为一个分数。崔琦先生看着数据开玩笑说“夸克”之前,他估测了最后一个量子霍尔平台到零磁场的距离,又估测了数据中异常现象到零磁场的距离,前者约为后者的三分之一。所谓最后一个量子霍尔平台,指的是二维电子气正好完全充满了第一个能级,此时的霍尔电阻正好为 h/e^2 。因为每个能级可以容纳的状态数正比于磁场,如果磁场增大为第一个能级处的三

倍，则第一个能级只有三分之一被填满。第一个观测到的分数量子霍尔态为 $1/3$ 态，其准粒子的电荷数为 $e/3$ ，与夸克一样携带分数电荷。

对 $1/3$ 态和分数电荷的理解，需要考虑电子间的相互作用，Laughlin 于 1983 年提出了一个描述二维电子相互作用的波函数，可以解释 $1/m$ (m 为奇数) 态的出现，这个波函数是多体物理中的一个巨大成就。虽然分数量子霍尔效应与整数量子霍尔效应物理起源不同，然而它们的实验表现极为类似，都有量子化平台。量子化的平台需要能

隙的存在，整数量子霍尔效应的能隙来自朗道能级以及自旋劈裂，而 Laughlin 波函数也能为分数量子霍尔效应提供能隙。然而，分数态的能隙小于整数态，因此需要温度更低的实验条件。在 Stormer 因获得诺贝尔物理学奖而写的综述中，还特意提供了他们的稀释制冷机第一次成功运转时的照片(图 3)。

分数量子霍尔效应是演生现象，大量电子聚集在一起时，产生的准粒子所携带的电荷不足单位电荷。在 Laughlin 的理论工作中，分数量子霍尔效应中能隙的出现足以证明携带分数电荷的元激发的存在。在这里我们从一个不严格的角理解分数电荷的出现：当电子填满最低能级时，每个电子对应一个量子磁通，而 $1/3$ 态相当于每个电子对应 3 个量子磁通，实验证明了二维电子气中以量子磁通为磁场变化单位，因此，系统每改变一个量子磁通时，相当于改变 $e/3$ 的电荷。

分数量子霍尔效应的分数电荷已经被多类实验观测到。在噪声实验中，电流因为电荷分立性，在通过势垒时会产生一个涨落，这个噪声与电流有关，也与电荷量子化的单位有关，可以用于探测分数电荷。在干涉仪内，输运信号的周期振荡来自区域内粒子或者准粒子数目的变化，因为整数量子霍尔效应的单位电荷是 e ，对比分数态与整数态振荡周期的不同，可以测量分数电荷。边界电流之间的隧穿也与电荷分立性有关，也可以用于分数电荷测量。



图 3 左下为 Stormer，他拿着的标记为 85 mK，280 kGs，1984 年 2 月 16 日；右下为崔琦先生(引自文献[1])

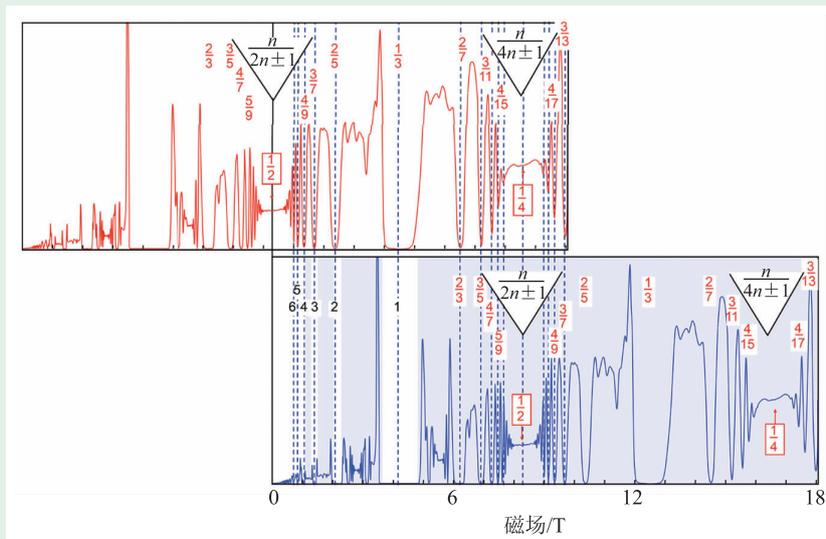


图 4 纵向电阻随磁场的依赖关系，每一个量子霍尔态对应一个电阻极小值(图中的数字和公式表示填充因子)。上下两图为同一份数据，平移后的一部分分数量子霍尔态与原先的整数量子霍尔态有对应关系，例如，上图的 $f=1/3$ 态出现在下图 $n=1$ 态所在位置，而 $f=2/5$ 态出现在 $n=2$ 态所在位置。此图说明了两者之间的相似性如复合费米子理论所预测(引自文献[3])

4 5/2 量子霍尔态

$1/3$ 态仅仅是第一个被观测到的分数态。现在大约有 100 个分数态被发现了，Laughlin 的波函数仅适用于其中最简单的情况。Jain 提出的复合费米子理论很好地解释了大部分实验观测。在复合费米子理论

中，每个电子携带偶数个量子磁通构成复合费米子，复合费米子在去除携带磁通后的有效场下运动。对比分数量子霍尔效应与整数量子霍尔效应，复合费米子类比于电子，有效场类比于磁场(图4)。复合费米子理论仅能解释以奇数为分母的分数量子霍尔效应。

1987年，Willett观测到了填充因子为 $5/2$ 的分数量子霍尔态，它不同于之前发现的奇数分数量子霍尔态，需要新的理论解释(图5)。很快，Haldane和Rezayi提出了一个 $5/2$ 态的理论解释，他们考虑了复合费米子的d波配对，可是后续的工作发现这个理论解释无法提供分数量子霍尔效应必须有的体态能隙。1991年，Moore和Read提出了后来赫赫有名的Moore—Read态，有时也因为其数学表达式被称为Pfaffian态，其中的复合费米子以三重态配对。1998年，Morf的一项重要计算支持类似Pfaffian态的自旋极化波函数。2007年，Pfaffian态的粒子—空穴共轭态Anti-Pfaffian被提出。这两个波函数被认为是 $5/2$ 态波函数的最可能候选者。此外， $5/2$ 的波函数还有其他许多理论。目前所有的 $5/2$ 理论都支持其准粒子携带 $e/4$ 的分数电荷。时至今日，实验上还无法确认 $5/2$ 态的基态波函数。

能隙是一个量子霍尔态最基本的信息之一，它可以通过测量纵向电阻随温度的依赖关系获得。测量奇数分母量子霍尔态能隙与磁场的关系，也能判断一些奇数态中复合费米子所携带的量子磁通数。一份数值计算表明，在同一个样品中， $5/2$ 态的能隙是 $1/3$ 态的 $1/11$ 。可是，除了温度条件之外， $5/2$ 态对样品质量还有要求，只出现在迁移率高达 $10^6 \text{ cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ 量级的二维电子气中，并且高迁移率并不能保证它的出现。产生 $5/2$ 态的高质量二维电子气通常来自GaAs—AlGaAs异质结，目前只有几个分子束外延生长组有能力提供产生 $5/2$ 态的样品。

更高的能隙有利于研究 $5/2$ 态。能隙依赖于样品迁移率、二维电子气密度和异质结的结构等多种因素，关系非常复杂。一般来说，在生长条件类似的样品之中，迁移率越高(或者二维电子气

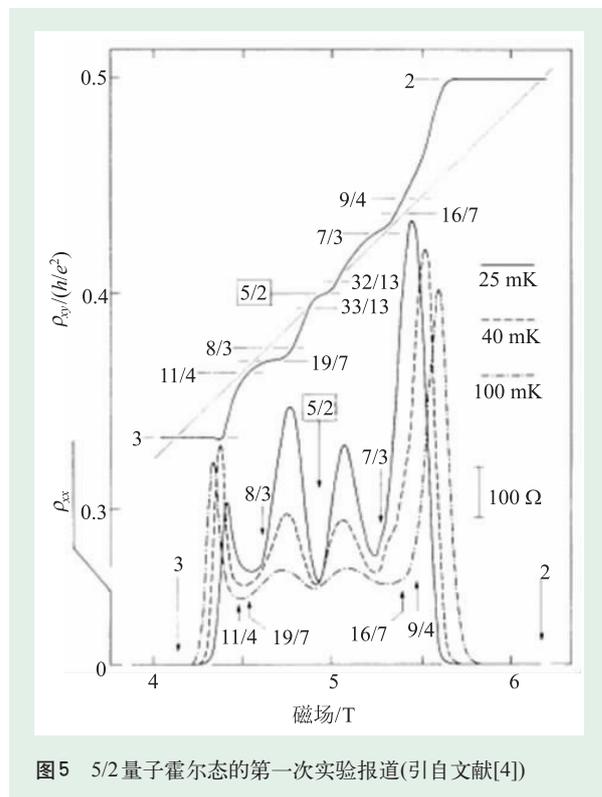


图5 $5/2$ 量子霍尔态的第一次实验报道(引自文献[4])

密度越大)， $5/2$ 能隙越大。这个说法只是大致成立，并不符合所有的实验结果。异质结中的杂质和缺陷，以及异质结的具体化学元素组成成分也能影响能隙。实验条件(比如样品受光照程度)一样会影响能隙。尽管已有许多关于 $5/2$ 能隙的实验，但相关的实验和理论研究依然在持续开展之中。

$5/2$ 态并非唯一被发现的偶数分母量子霍尔态。 $7/2$ 态与 $19/8$ 态也已被发现，但是它们并没有引起类似对 $5/2$ 态的关注。 $7/2$ 态可以认为是与 $5/2$ 态起源类似，而 $19/8$ 态对实验观测的要求过于苛刻了。已报道的 $19/8$ 态的能隙为 5 mK 。尽管稀释制冷机已成为常见的低温环境设备，然而稀释制冷机的低温极限只有 2 mK ，商业化的稀释制冷机通常高于 10 mK 。不仅如此，低温设备的最低温度是晶格温度，而对于二维电子气，真正有意义的温度是电子温度。因为低温环境下电声子耦合很弱，电子温度往往远高于低温设备所产生的最低温度。全球范围内，只有两三个实验室实现了 10 mK 以下电子温度的固态测量环境。尽管 $5/2$ 态以测量条件苛刻闻名，它的能隙还可以有 600 mK ，

远高于 $19/8$ 态。与之对比, $1/3$ 态的能隙在 10 K 量级。偶数分母量子霍尔态的研究集中于 $5/2$ 态。

5 非阿贝尔统计与拓扑量子计算

在 $5/2$ 态可能的波函数中, 有一些具有非阿贝尔的统计性质, 可应用于拓扑量子计算, 这让 $5/2$ 态得到了更多的关注。这里的统计性质指的是波函数在粒子交换下的性质。在三维条件下, 如果交换两个全同粒子, 因为两次交换下系统回到初始状态, 因而只存在两种统计: 费米统计和玻色统计。交换玻色子和费米子相当于波函数改变 0 或者 π 的相位。如果把全同粒子交换等价于坐标轴反转, 那么两次交换类比于一个粒子绕另外一个粒子一圈。此时三维条件与二维条件有本质区别: 在三维条件下, 粒子 A 绕粒子 B 一圈画一个圆, 当该圆无限缩小为一个点时, 它在三维空间中有很多条缩小的路径, 其边不一定需要与 B 交叠; 而在二维条件下, 此圆缩小为一个点时, 边一定得与 B 相遇。在二维条件下, 交换全同准粒子可以产生一个非零非 π 的相位, 这样的准粒子被称为任意子, 相关的统计被称为分数统计。

简单的分数量子霍尔效应有分数统计, 这一点可以直接从 Laughlin 波函数中得出。尽管可以认为分数统计来源于分数电荷, 理论学家也提出了用干涉仪来探测分数统计的提议, 可是对比起大量证明分数电荷存在的实验证据, 分数统计存在的直接实验证据近乎于没有。分数统计并不局限于分数量子霍尔效应, 它源于二维空间固有的拓扑性质。

在 $5/2$ 态可能的波函数中, 有些携带比分数统计更复杂的统计, 称为非阿贝尔统计。在非阿贝尔统计中, 交换全同粒子不是只单纯改变波函数的相位, 而是产生一个完全不同的新波函数。这些因为交换全同粒子而出现的大量新波函数都是系统的简并基态, 并且简并的来源与对称性无关。这些简并基态与激发态之间也存在能隙, 可以支持分数量子霍尔效应的出现。具体波函数取决于具体参与交换的粒子以及参与交换的顺序,

这个改变波函数的过程称为编织。一系列全同粒子交换之后的最终波函数, 取决于编织的结果。

非阿贝尔统计的性质让它具备拓扑量子计算的应用前景。对于一个量子状态, 它所存储的信息通过编织而来, 环境的微扰无法改变这个波函数。换句话说, 编织引起的操作影响全局, 编织将系统变成一个同样处于基态的新量子态。因此, 量子计算中常遇到的退相干问题在非阿贝尔统计中得到了解决。只要环境的微扰不足以跨越简并态上的能隙, 修改现有波函数需要一个新的编织, 因而, 局部微扰难以破坏量子信息的全局存储, 这样的性质称为拓扑性质。基于分数量子霍尔效应的拓扑量子计算还有以下两个特殊的优点: 从物理上看, 一旦非阿贝尔统计被建立, 参与编织的准粒子可以大量出现, 而在许多量子计算的方案中, 信息存储单元是逐个被建立的, 复杂度随着存储单元数量的上升而迅速增加; 从技术手段上看, 分数量子霍尔效应的工艺基于半导体, 与现有的硅半导体工艺有较好的兼容。 $5/2$ 分数量子霍尔态一直被认为是最有可能第一个实现拓扑量子计算的体系。

6 $5/2$ 态的波函数甄别实验

尽管人们普遍认为 $5/2$ 态有非阿贝尔统计的可能性非常大, 但是不携带非阿贝尔统计并且能实现 $5/2$ 态的波函数也存在。计算表明, 非阿贝尔的 Pfaffian 态和 Anti-Pfaffian 态最可能是 $5/2$ 的基态, 可是实验上一直缺乏足够的证据支持。对于 $5/2$ 态, 严格判断波函数表达式的实验方法暂时还没有。然而, 比判断具体波函数更重要的是判断 $5/2$ 态是否有非阿贝尔统计, 是否可以用于拓扑量子计算, 这个判断的难度就降低了许多。总体而言, 支持 $5/2$ 态存在非阿贝尔统计的实验和理论越来越多, 尽管这些研究逐渐发现 $5/2$ 态比预计的复杂。

早期的计算支持自旋极化的非阿贝尔基态波函数, 于是人们开展了一系列探测自旋极化的实验, 倾斜场实验是其中之一。当二维电子气被置

于倾斜场中时，霍尔态的性质只与垂直场有关，而自旋的贡献与总磁场有关，因此，一个原来就自旋极化的波函数不会受倾斜角度的影响。早期的倾斜场实验认为 $5/2$ 态不是自旋极化的，而后续的倾斜场实验则不支持此观点。核磁共振、光学手段、能隙分析等可以探测自旋极化状态的方法，也无法给出统一的看法。简而言之，尽管自旋极化与否是一个非常重要的信息，但是 $5/2$ 态的相关实验难度太大，到现在都无法给出确定的结论。

干涉仪实验不仅可用于分数统计的测量，还可以用于证明非阿贝尔统计的存在。在分数量子霍尔效应中，不同流向的边界电流之间没有“交流”，可是实验上它们能被挤压得非常靠近，这样的结构被称为量子点接触，两个量子点接触便可以形成干涉仪(图6)。理论预测，干涉图样可能不出现也可能出现，取决于干涉仪内准粒子数的奇偶性，这与常规的干涉结果不同。干涉仪内准粒子数的奇偶性可以由磁场或者干涉仪的面积调节。有实验发现， $5/2$ 态的干涉图样确实不同于常规的阿贝尔统计，存在 $e/4$ 的准粒子振荡，也存在 $e/2$ 的准粒子振荡，这与原始的理论预测也不完全一样。此实验现象尚未被其他课题组重复。

利用量子点接触，还可以通过隧穿的手段研究 $5/2$ 态的波函数。不同的波函数给出数个不同的相互作用因子 g ，这个 g 因子与波函数的统计有关系，可以通过隧穿随偏压和温度的变化测量。电子的 g 等于1， $1/m$ 态(m 为奇数)分数量子霍尔效应中的准粒子的 g 等于 $1/m$ ， $5/2$ 态的一些波函数的 g 见表1。文小刚教授是相关理论工作的先驱者。目前的隧穿实验进展倾向于不是非阿贝尔统计的331态，实验还发现隧穿的结果可能依赖于隧穿点附近的几何结构，并且怀疑 $5/2$ 态有多个能量接近的基态波函数。在此方向的研究还需要更多更详细的工作。

参考文献

- [1] Horst L S. Reviews of Modern Physics, 1999, 71: 875
 [2] Daniel C T. Reviews of Modern Physics, 1999, 71: 891

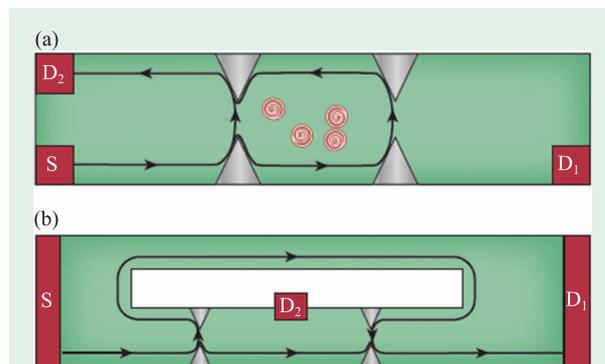


图6 量子霍尔系统中的干涉仪实验原理图 (a)Fabry—Pérot干涉仪；(b)Mach—Zehnder干涉仪(图中 D_1 为出口1， D_2 为出口2，S为源。引自文献[5])

表1 $5/2$ 态可能波函数的几个例子，以及它们的分数电荷 e^* 和相互作用因子 g 的理论预言(红色代表波函数携带非阿贝尔统计。所有的波函数都预测 $e/4$ 的分数电荷，与实验观测一致)

	$k=8$	Pfaffian	331	Anti-Pfaffian	$U(1) \times SU(2)$
e^*	$e/4$	$e/4$	$e/4$	$e/4$	$e/4$
g	$1/8$	$1/4$	$3/8$	$1/2$	$1/2$

7 结束语

作为一个偶数分母态， $5/2$ 态本身非常有趣，作为一个非阿贝尔统计的可能载体， $5/2$ 态值得被关注。不论是对 $5/2$ 态的理解，还是考察它如何应用于拓扑量子计算，都还需要进行更多的研究。武断一点说， $5/2$ 态研究所需要的苛刻实验条件限制了它将来大规模应用的可能性，然而，从晶体管到信息时代，中间是漫长的等待、高额的投入、以及许多科研人员的努力，从这个角度上考虑， $5/2$ 态的研究也只是一个起点。极低温这种看似没有实用价值的测量环境， $5/2$ 这种比较难得的量子态，允许我们去探索新的基础物理，这样的探索或许只是源于好奇，却渐渐推动了科技的发展。

- [3] Jain J K. Indian J Phys., 2014, 88: 915
 [4] Willett R, Eisenstein J P, Stöfmer H L *et al.* Phys. Rev. Lett.,

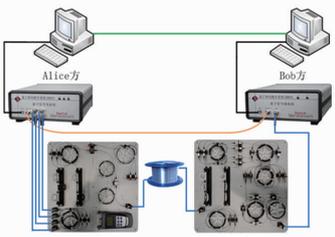
1987, 59:1776
 [5] Ady S. Nature, 2010, 464: 187
 [6] Richard E P, Steven M G. The Quantum Hall Effect. Springer, 1990
 [7] Sankar D S, Aron P. Perspectives in Quantum Hall Effects. John Wiley & Sons, Inc., 1997
 [8] Laughlin R B. Reviews of Modern Physics, 1999, 71: 863
 [9] Jainendra K J. Composite Fermions. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
 [10] Wen X G. Quantum Field Theory of Many-Body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons. Oxford:

Oxford University Press, 2007
 [11] Chetan N, Steven H S, Ady S *et al.* Reviews of Modern Physics, 2008, 80: 1083
 [12] Nicholas R. Physics Today, 2012, 65(7): 38
 [13] 万歆, 王正汉, 杨昆. 物理, 2013, 42: 558
 [14] Zyun F E. Quantum Hall Effects: Recent Theoretical and Experimental Developments. World Scientific Publishing Company Incorporated, 2013
 [15] Willett R L. Reports on Progress in Physics, 2013, 76: 076501
 [16] Lin X, Du R R, Xie X C. National Science Review, 2014, 1: 564



安徽量子通信技术有限公司
 地址: 安徽省合肥市望江西路800号创新产业园D3
 电话: 400-885-0929 65368589(传真) 13395515356
 网址: www.quantum-info.com
 邮箱: feng.liu@quantum-info.com

BB84 量子密钥分发教学科研系统



Alice方 Bob方



QKDS-84-T型量子信号发射机 QKDS-84-R型量子信号接收机



QKDS-84-P-T型光学调试平台发射端 QKDS-84-P-R型光学调试平台接收端

BBO小型纠缠源系统

系统组成



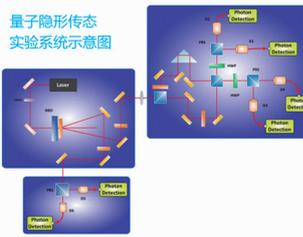


技术指标

- 泵浦光功率 (mW) 100
- 可见度 92%
- 偶然符合计数率 (Hz) < 10
- 单光子亮度 (cps) > 100k
- Bell不等式破坏程度 $S > 2.3$
- P, N偏振对比度 > 7:1
- 纠缠光子对亮度 (cps) > 10k
- H, V偏振对比度 > 25:1

量子隐形传态实验系统

量子隐形传态实验系统示意图



数据采集&分析显示界面





提供**最专业的量子信息科研系统**

• BB84量子密钥分发教学科研系统 • 小型纠缠源 • 高亮度纠缠源 • 单光子干涉系统 • 双光子干涉系统 • 双缝量子成像系统 • 量子隐形传态 • 单光子探测器 • 皮秒脉冲激光器