

麦克斯韦方程组的建立及其作用

刘觉平[†]

(武汉大学物理科学与技术学院 武汉 430072)

2015-09-10收到

† email: jpliu@whu.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20151204

Discovery of the Maxwell equations and their significance

LIU Jue-Ping[†]

(School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

摘要 麦克斯韦提出了描述经典电磁场运动及其与带电粒子相互作用规律的完备方程组, 将电学、磁学和光学统一为电磁场动力学理论。这一理论具有洛伦兹协变性和 $U(1)$ 局域规范不变性, 成为构造粒子物理标准模型的经典模板, 在物理理论和实验发展中起着不可估量的巨大作用。

关键词 麦克斯韦方程组, 电磁场动力学理论, 洛伦兹协变性, 局域规范不变性

Abstract The complete set of equations proposed by Jams Clerk Maxwell to describe the classical electromagnetic fields and their interaction with charged particles had combined electrics, magnetics and optics into a single unified theory of the electromagnetic fields. This theory possesses both Lorentz covariance and $U(1)$ local gauge invariance, and has become a classical prototype for constructing the standard model of particle physics. Its role in the development of physical theories and experiments has been beyond measure.

Keywords Maxwell equations, dynamical theory of the electromagnetic fields, Lorentz covariance, local gauge invariance

1 引言

150年前, 英国物理学家麦克斯韦(Jams Clerk Maxwell, 1831—1879)发表了题为《电磁场的动力学理论》的论文^[3], 提出了麦克斯韦方程组(实际上已包括洛伦兹力公式), 标志着经典电动力学的建立。这是从库仑(Charles Augustin de Coulomb, 1736—1806)、奥斯特(Hans Christian Oersted, 1777—1851)、高斯(Karl Friedrich Gauss, 1777—1855)、安培(André-Marie Ampère, 1775—1836)直到法拉第(Michael Faraday, 1791—1867)等人所从事的电学和磁学研究的伟大综合、发展和完成。至此, 麦克斯韦将电学、磁学和光学统

一为自身逻辑自洽的电磁理论。该理论以其与实验结果的惊人符合程度和自身展示的完美对称性——洛伦兹协变性和局域规范对称性, 成为物理学家构造粒子物理标准模型的模板, 开创了规范场论的新纪元。

2 19世纪50年代前的电磁学状况

1820年, 奥斯特在哥本哈根课堂发现电流能使其附近的小磁针偏转, 显示了电和磁之间的联系。这一结果立即引发了全球科学家对于其原因的探求。当时的解释是由安培用超距作用给出的。

在奥斯特工作的启发下, 法拉第从1831年到

1854年一直用各种方式进行电磁感应实验。他第一次实现了电磁能和机械能之间的转化。他不用有心力而用力线来解释电流的磁效应。

在麦克斯韦建立他的电磁理论之前, 诺依曼(Frang Ernst Neumann, 1798—1895)、韦伯(Wilhelm Eduard Weber, 1804—1891)等物理学家, 继承了安培的超距作用观点, 他们对电磁现象的研究形成了电磁研究的所谓大陆学派, 但未能建立起一个统一的理论体系。

3 法拉第的电紧张态和麦克斯韦的涡旋电场

麦克斯韦是少数认真对待法拉第实验工作的人之一, 他继承了法拉第的超距作用观念, 在电磁学研究中取得了决定性的进展。1856年, 麦克斯韦发表了他那划时代的三篇论文中的第一篇 *On Faraday's Lines of Force*^[1]。这里, 麦克斯韦继承了法拉第局域相互作用的物理思想, 力图用缜密的逻辑和模型去理解和重现法拉第的力线, 得到力线的几何模型, 使力线能同时指示在任意点处力的方向和强度。为此麦克斯韦发展了汤姆孙(William Thomson, 1824—1907)的类比方法, 将法拉第力线视为充满不可压缩流体的流管的流线, 希望找到法拉第的“电紧张态”的数学定义。

为了上述目的, 麦克斯韦着力证明了任意矢量场可分解为某一矢量场的旋度和某一标量场的梯度之和。对于磁场 \mathbf{B} , 梯度项可以用适当的变换(规范变换)去掉, 从而有

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1)$$

这里的 \mathbf{A} 实际上是 1851 年由汤姆孙引进的与磁感强度相联系的当今所谓的“矢势”。我们将(1)式两边取散度, 便有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

这是现在的麦克斯韦方程组中的两个齐次偏微分方程之一。

麦克斯韦在他的论文 *On Faraday's Lines of Force*^[1] 的第 II 部分开头写道: “当一个导体在电流或磁铁附近运动时, 或者当电流或磁铁相对于附

近的导体运动或改变其强度时, 导体便受到力的作用, 产生电动势或连续的电流, 视导体回路断开或闭合而定。这种电流的产生仅仅来自于导体周围的电或磁的状态的变化。实际上, 导体在电流或磁铁附近或远离它们的影响时各处于不同的状态, 因为移走或取消电流或磁铁会引起电流, 而没有电流或磁铁的参与就不会出现电流。”这类现象使法拉第引入所谓电紧张态的概念。麦克斯韦紧接着指出: “这种状态在它未被破坏时并不是显而易见的, 而对于这种状态的任一破坏可通过出现(感应)电流或出现(感应)电流的趋势而显示出来。”

麦克斯韦应用亥姆霍兹(Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821—1894)的方法考察了在电紧张态发生变化的过程中电流在介质中传导的条件。他“假设由外电流源产生的电流(密度)为 \mathbf{j} , 相应的电场强度为 \mathbf{E} 。在时间间隔 Δt 内电流克服电阻所做的功为

$$\int dt \int dx dy dz \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

而电磁作用对回路做的功为

$$\int dt \frac{d}{dt} \int dx dy dz \mathbf{j} \cdot \mathbf{A},$$

这里, 麦克斯韦用 \mathbf{A} 来刻画法拉第的电紧张的强度。如果电流保持不变, 麦克斯韦便由“总功应等于零, 即

$$\int dt \int dx dy dz \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \int dt \frac{d}{dt} \int dx dy dz \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} = 0,$$

得到

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}. \quad (3)$$

我们将上式两边取旋度立即得到法拉第电磁感应定律:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

这是现代形式的麦克斯韦方程组中的另一个齐次方程, 或写成积分方程:

$$\oint_L d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}.$$

可见麦克斯韦得到的电场的环路积分等于穿过该环路所张面积的磁通量, 一般不为零, 这里的 \mathbf{E} 便是所谓涡旋电场。涡旋电场与静电学中的静电场不一样, 后者的环路积分精确为零。

值得注意的是, 方程(2)在 $U(1)$ 局域规范变换

$$A \rightarrow A' - \nabla\chi \quad (\chi \text{ 是任一标量函数}) \quad (5)$$

下不变, 这一点麦克斯韦在导出方程(1)时进行了一些讨论。方程(3)左边是 $U(1)$ 局域规范不变的, 但右端却不是。因而, 方程(3)一定是在某一特定规范下写出的。为了找出麦克斯韦写出方程(3)所用的规范, 我注意到麦克斯韦同一篇文章的第 2 部分为得到方程(3)作铺垫的几个定理。麦克斯韦在他的定理 V 中, 讨论了规范自由度, 作为一般性的结果, 他完全保留了 A 的规范任意性; 但在结束该定理论证时, 他给出了一个重要的补充: 即可以这样选取 χ , 使得 A 满足库仑规范 $\nabla \cdot A = 0$ 。继而, 在论文提到的定理 VI 中, 麦克斯韦将库仑规范 $\nabla \cdot A = 0$ 作为给定的条件来讨论问题。特别是, 在给出方程(3)的推证中, 麦克斯韦明确地给出了“没有引起电流变化”的动因的条件, 即回路电流保持稳恒的条件:

$$\nabla \cdot j = 0. \quad (6)$$

这保证了麦克斯韦的电磁能 $\int dx dy dz j \cdot A$ 在规范变换方程(5)下保持不变, 即

$$\begin{aligned} \delta \int dx dy dz j \cdot A &= \int dx dy dz j \cdot \delta A \\ &= \int dx dy dz j \cdot \nabla \chi = - \int dx dy dz \chi \nabla \cdot j = 0, \end{aligned}$$

从而使得关于方程(3)的导出过程建立在合理的基础上, 进而可由欧姆定律与方程(3)和(6)得到

$$\nabla \cdot A = \text{const}. \quad (7)$$

这与库仑规范条件一致。所以, 我的结论是: 麦克斯韦在广义库仑规范方程(7)下导出了他的涡旋电场表达式, 将法拉第的物理直觉——电紧张态用明确的物理量——电磁场的矢势在同一规范下表示出来。

这一方面, 是不同于原有物理规律(静电场的环路定理)的重大突破, 揭示了磁场变化产生电场的物理机制: 电磁场矢势随时间的变化会产生环路积分不为零的涡旋电场。另一方面, 将电磁场的矢势作为磁场(见方程(1))和电场(见方程(7))的连接点, 摆在了理论的中心地位, 是关于电磁场理论研究中的重大的观念上的突破。

4 麦克斯韦的分子涡旋和位移电流

麦克斯韦的第二篇论文 *On Physical Lines of*

Force 分为 4 个部分先后在 1961 年和 1962 年间发表^[2]。在这篇文章的第一部分, 他写道: “我们不满意由假设存在方向指向磁极的吸引或排斥(超距作用)力的解释, 即使这种解释与实验现象完全符合; 我们不得不思考在任何发现这些力线的地方都应有某种物理状态或作用, 能以足够的能量产生实际的现象。” “本文的目的是沿着上述思路通过研究‘介质的张力和运动的某些状态的力学效应, 并将其与观察到的电磁现象比较’的方式来了解力线的物理。”

麦克斯韦于是考虑一种流体(文献[2]中的 Prop.I), 它在不同方向上具有不同的压强; 它由分子涡旋构成, 所有分子涡旋的旋转轴都相互平行; 分子涡旋的角速度与磁场强度成正比; 涡旋物质的密度正比于介质的磁导率。按照上述类比, 麦克斯韦能写出稳恒电流的安培环路定理(即麦克斯韦第二篇论文中的公式(9))。

在这篇论文的第二部分, 麦克斯韦提出问题: “为什么介质中的分子涡旋会处于旋转状态?” 他意识到, “实际上, 这是在询问这些涡旋与电流之间的联系。” “如果我们由分子涡旋给出的关于力线的解释是正确的, 为什么涡旋的这样的分布意味着存在电流?” 这引出一个最重要的问题: “什么是电流?” 值得指出的是, 这在一般人看来极为平庸的问题, 在当时的麦克斯韦那里却成为一个深奥的未解之谜, 这是因为麦克斯韦是从电流和磁场与电场之间的联系来询问电流的本质的。电流一方面会影响磁场的力线, 另一方面又是由电场驱动的。因而在我看来, 麦克斯韦的提问正好抓住了问题最重要的关节点; 正是麦克斯韦对这一问题锲而不舍的研究, 导致了他对位移电流的发现。

为了理解电流是怎样驱动分子涡旋转动而形成磁力线的, 麦克斯韦需要改进他的涡旋模型。他碰到的一个困难是, 如何保证分子涡旋在相邻的边界沿相反的方向旋转(以使电流的磁场分布和实验吻合)。为此, 他假设“有一层粒子, 像惰轮一样, 添加到各个相邻的涡旋之间, 以至于每个涡旋都能倾向于使与它相邻的涡旋沿着与它相同

的方向转动。”紧接着，麦克斯韦计算了这层粒子在单位时间内通过单位横截面积的数目，发现若将它视为稳恒电流密度，则其第二篇论文中的表达式(33)就是安培环路定理，即麦克斯韦同一篇论文中的公式(9)。麦克斯韦据此断言，在他的模型中，“电流是由这层可在涡旋间运动的粒子的转移来表示的。”

为了说明力线是如何由电流产生的过程，麦克斯韦让一电流通过他的精心设计的一涡旋群(见文献[2]的第二部分图2)，这将带动电流周围相邻的涡旋开始转动。我不想在这里画出麦克斯韦的这一匠心独具的分子涡旋模型，只想按照麦克斯韦的思路指出，涡旋边缘与电流相邻的部分速度方向一致，从而使得位于电流两侧的相邻涡旋的旋转方向相反，其角速度方向与一封闭回路相切(磁力线)，这就“模型地”形成了磁力线；而已经转动起来的涡旋和与之相邻的尚处于静止的涡旋之间的粒子将会开始旋转(转动方向与带动它运动的涡旋的转动方向相反)，同时朝着电流的反方向移动，这就形成感应电流。

在文章的第三部分，麦克斯韦将他的分子涡旋模型应用于静电学。麦克斯韦注意到：“考虑到转动会从分子的外围传输到分子内部，构成涡旋分子的物质必须具有弹性。”当分子涡旋之间的带电粒子在电动势作用下产生位移时，“带电粒子会对涡旋分子施加切向力，使其发生形变，同时受到来自涡旋分子弹性的反作用力。当电动势撤去后，涡旋分子恢复原状，其上的电荷分布也回到原来状态。”

“电介质受到感应时，其内每个分子中的电荷都会发生位移(极化)，以致分子的一端出现正电荷，相对的另一端出现负电荷，但是不会形成电流，因为这些电荷完全同分子联系在一起，不会从一个分子转移到另一个分子。这对于整个电介质作用的效果是沿某一方向产生电位移。这种电位移达到一定值时就不再变化，因而不会形成电流。”这里的“电位移达到一定值时就不再变化”应当意味着极化电荷受力平衡而其分布不再变化。这时，作用在单位正电荷上的电动力(电场

强度) \mathbf{E} 与电位移矢量 \mathbf{D} 之间的关系为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}, \quad (8)$$

式中 $\frac{1}{\epsilon}$ 是由电介质的特性决定的系数。接着，麦克斯韦假设涡旋分子是完全弹性的小球，介质是各向同性的，考虑电介质在均匀电场的作用下相应的电位移，利用理想固体的性质，证明了系数 ϵ 与介质磁导率 μ 的乘积等于介质折射率 n 的平方。

麦克斯韦意识到，“这种位移若随着时间而增加或减小，就会形成正向或负向电流。”他进一步指出，如果电场随时间而变化，则电位移矢量 \mathbf{D} 随时间的变化就等价于位移电流密度 \mathbf{j}_d ，

$$\mathbf{j}_d = \dot{\mathbf{D}}. \quad (9)$$

麦克斯韦指出：“这一关系与任何关于电介质的内部机制的理论(模型)无关。”麦克斯韦认为，这一电流的作用应当在原来的安培环路定理中加以考虑，从而将安培环路定理推广为以下形式：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}. \quad (10)$$

位移电流是麦克斯韦在物理概念上的又一重要发展，正是它的存在，保证了麦克斯韦方程组的内部自洽性，赋予电磁场以波动性。

这里，一方面是不同于原有物理规律(稳恒电流的安培环路定理)的重大突破(推广到任意电流的安培环路定理)，揭示了电场变化产生磁场的物理机制：电场随时间的变化会产生环路积分不为零的涡旋磁场。另一方面，将位移电流作为电场(见方程(8))和磁场(见方程(9))的连接点，摆在了理论的中心地位，是关于电磁场理论研究中的又一重大的观念上的突破。

5 麦克斯韦的电磁场

1864年，麦克斯韦发表了第三篇论文*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*^[3]。他完全撇开了他的分子涡旋模型，而致力于构造描述电磁场的运动方程，并考察电磁波在空间中的传播。

在第三篇论文的引言中，麦克斯韦对超距作用理论这样评述道：对于电磁现象，“按照超距

作用理论的解释，作用于两物体之间的力仅仅取决于两物体以及它们的相对位置，不需要对两物体周围的介质做任何考虑。”“然而，粒子间超距作用力竟与粒子速度有关。这种逻辑上的困难让我不相信这会是终极理论，即使它可用来导出实验现象。”“我更愿意寻求事实的另一种解释，假设它们是由被激发的物体通过周围的介质传递的作用引起的，而不是直接由于存在超距作用力的结果。”

麦克斯韦认为，他“提出的理论既可称为电磁场理论，因为它必须考虑带电体或磁体周围附近的区域；也可称为动力学理论，因为该区域有某种运动的物质，可观察到的电磁现象是由它产生的。”麦克斯韦指出：“电磁场是包含并围绕带电体和磁体的那部分空间。它可以被任何物质充满，或者不含有任何实物粒子，有如盖斯勒管或真空。”

麦克斯韦这样描述他的电磁场：电磁场作为“一种弥漫介质，具有很小的密度，可处于运动状态，以很大但有限的速度将某部分的运动传到其他部分。介质的各个部分相互联系在一起，以至于某部分的运动依赖于其他部分的运动状态；这种联系具有某种弹性，因为它需要时间，并不是瞬时发生的。”“这种介质能接受和储存两种能量，即依赖于各部分运动的‘实际’能量(动能)和克服弹力所做的功构成的‘潜在’能量(势能)。能量从一种形式到另一种形式的相互转换构成了波，介质的动能和势能在任何时刻都各占一半。”

麦克斯韦在他的第三篇论文第 III 部分(74 节)中进一步说：“能量既存储在带电体和磁体里，又存储在它们周围空间内的电磁场里。这种能量可描述为磁极化和电极化两种形式，并不需附加任何假设；或者极可能地，可理解为同一种介质的运动和应变。”麦克斯韦称这种介质为“以太”。

麦克斯韦通过类比于力学中的所谓约化动量，“将法拉第电紧张态 A 理解为定义在电磁场每一点的‘电磁动量’，它的改变涉及电动力的作用，正如动量的改变涉及机械力的作用一样。”

注意，它的变化并不等于(对应于电磁场动量的改变的)电磁场的麦克斯韦张力张量的冲量，它类似于在外电磁场中的电子的正则动量 $\mathbf{p}+e\mathbf{A}$ 中的外电磁场所贡献的部分(约化动量) $e\mathbf{A}$ ，后者在量子力学中起着关键性的作用。

我认为：电磁动量或约化动量 A 是麦克斯韦在他的逻辑体系中引入的又一个重要概念。若 A 可视为电磁动量，磁感应强度 B 则是电磁动量 A 的旋度(随空间的某种变化)，相当于某种角动量(正比于某种角速度 ω)；因而麦克斯韦将磁场力解释为某种旋转运动引起的结果就顺理成章了。既然按照法拉第的电磁感应现象，电场和磁场可以相互转化，涡旋电场应当是同一物理量——电磁动量 A 随时间的变化率引起的，这正是上面提到的公式(3)。电场强度又可以视为单位正电荷所受到的电场力，这与动量的时间变化率的概念一致；而 $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ 可以视为以速度 \mathbf{v} 运动的单位正电荷所受到的磁场力，因为它正比于加速度 $\omega\times\mathbf{v}$ ，从而表现为力。

麦克斯韦提出了电磁场的普遍方程组，包括 20 个分量(一个矢量方程一般有 3 个独立的分量方程)和标量方程，其中总电流 \mathbf{j} 方程为

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A})$$

磁感应强度方程为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{B})$$

按照麦克斯韦将 A 视为电磁动量的观点，一个封闭回路 L 的电磁动量为

$$\oint_L \mathbf{d}\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = \int_S \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \int_S \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B},$$

此即穿过该回路的磁力线的数目(磁通量)，式中 S 为封闭回路 L 所围的面(两者的正方向与右手螺旋法则一致)。因此，麦克斯韦接着写道，如果回路是面元 $dydz$ 的边界，则其电磁动量为

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz,$$

它是穿过面元 $dydz$ 的磁力线的数目，这就自然到方程(B)的 x -分量等式。

电流方程(推广的安培定律)为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_t \quad (\text{C})$$

电动力 f 的方程为

$$\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (\text{D})$$

式中 φ 是电磁场的标势。麦克斯韦指出：方程(D)右端第一项是导体切割磁力线产生的对于单位正电荷的电动力，第三项是与电势的空间变化率对应的的作用力，而第二项就是因电磁动量的变化而作用在带电粒子上的力。

电弹性方程(本构关系)为

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (\text{E})$$

电阻方程(欧姆定律)为

$$\mathbf{j}_t = \sigma \mathbf{E}, \quad (\text{F})$$

式中 σ 是导电介质的电导率。

自由电荷密度 ρ_t 方程为

$$\rho_t = \nabla \cdot \mathbf{D}. \quad (\text{G})$$

传导电流连续性方程为

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_t = 0. \quad (\text{H})$$

上面有的方程后面所加的解释或论述都是遵照麦克斯韦的逻辑写出的。基于这8个麦克斯韦方程(或20个分量和标量方程)，可以得出的结果是：

(1) 方程(G)是我们现在熟悉的麦克斯韦第一方程。

(2) 在方程(D)中取 $\mathbf{v}=0$ ，可得单位正电荷在磁场不起作用的情况下(或者说在带电粒子静止时)所受到的力，它就是现在熟悉的电场强度的一般表达式：

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi,$$

将该方程两边取旋度，并利用方程(B)可得我们现在熟悉的麦克斯韦第二方程：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

式中 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 是磁感应强度。

(3) 将方程(B)两边取散度可得我们现在熟悉的麦克斯韦第三方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

(4) 联立方程(A)和(C)可得我们现在熟悉的麦克斯韦第四方程：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_t.$$

(5) 现在熟悉的麦克斯韦4个方程，是赫兹在1890年从麦克斯韦的20个方程导出的，从这4个方程可自动导出传导电流连续性方程(H)。

(6) 方程(C)意味着总电流 \mathbf{j}_t 满足约束条件：

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_t = 0.$$

(7) 与 \mathbf{A} 有关的方程(B)和(D)在下述 $U(1)$ 局域规范变换

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi' + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (\chi \text{ 是四维时空坐标的标量函数}) \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' - \nabla \chi \end{aligned}$$

下保持形式不变。

(8) 在方程(D)中取 $\mathbf{v}=0$ ，将所得方程两边取散度，并利用方程(G)可得

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_t}{\varepsilon}.$$

若取库仑规范(以便与麦克斯韦在他的第二篇文章中关于法拉第电紧张态的描述一致)：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

则前一方程就是现在熟悉的决定标势 φ 的泊松方程。

(9) 从19个相互独立的分量或标量方程(正如在上面(5)中指出的，因传导电流连续性方程(H)可由现在熟悉的麦克斯韦的4个方程导出，而后者可由其他19个分量和标量方程导出)在 $\mathbf{v}=0$ 和其他给定的物理条件下可解出下述物理量(一个矢量有3个分量，加上标量，一共19个分量和标量)：

$$\mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{A}, \varphi, \mathbf{j}_t, \rho_t, \mathbf{j}_t, \rho_t,$$

其中 \mathbf{A} 和 \mathbf{j}_t 只有两个独立自由度。

(10) 将电场强度的一般表达式代入 $\mathbf{v} \neq 0$ 情形下的方程(D)中，可得电荷量为 e 的带电粒子所受到的力为

$$\mathbf{F} = e\mathbf{f} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

它当然也适用于 $\mathbf{v}=0$ 的特殊情形。这就是著名的洛仑兹力公式。怪不得麦克斯韦在得出他的20个公式后，能进一步“导出处于电磁场中的电流、磁体、带电粒子所受到的力”；原来，他的20个方程不仅能改写成现代形式的麦克斯韦方程组，还能直接得到洛仑兹力公式，我们知道，前者描述了源(电荷和电流)对电磁场的作用规律，后者则描述了电磁场对源(电荷和由运动的电荷表征的

电流)的作用规律,这两个规律构成了整个经典电动力学的理论基础。至此,传统的电学和磁学就被统一为一个完整的理论体系。

历史上,洛仑兹力公式是1895年荷兰物理学家洛仑兹(H. A. Lorentz, 1853—1928)在建立经典电子理论时作为基本假设提出的。麦克斯韦经过逻辑严密的思考得出的结论(方程(D))比洛仑兹提早了30年。因此,我认为,洛仑兹力公式应确切地称为麦克斯韦—洛仑兹力公式。

麦克斯韦在他的第三篇论文的第III部分第75节中强调:“本文导出的结论与上述假设(的模型)无关,它们只基于三类实验事实:(1)在增强或减弱回路附近电流时,回路中的感应电流会按照穿过回路的力线发生的变化而产生;(2)磁场强度按照磁势的变化分布;(3)电介质的极化。”这说明,麦克斯韦引入“以太”介质,实际上在他自己看来,也不过是作为引导思维而采用的辅助工具而已;只要上述三类实验事实正确,他的20个方程就是正确的。

这里,没有写出麦克斯韦方程组(包括洛仑兹力公式)的常用的积分形式以及四维协变形式,它们可以在任何一本现代教科书中找到。值得指出的是,它们的进一步推广,即所谓外微分形式(最现代的形式),已由微分几何学家得出;它们适用于任意参考系(不限于惯性系),甚至任意的准黎曼流形^[4]。

我记得诺贝尔物理奖得主费曼(Richard Phillips Feynman, 1918—1988)在他著名的“费曼物理学讲义”里这样说过:“看,现在我们把麦克斯韦的宏伟建筑的脚手架拿掉(意指抛弃以太论),大厦依然巍巍矗立。”

爱因斯坦(Albert Einstein, 1879—1955)这样评价麦克斯韦电磁场理论的影响,他说:“在麦克斯韦以前,物理实在是由质点来描述的,质点的运动完全服从常微分方程。在麦克斯韦以后,人们则认为,物理实在是由连续的场来表示的,它们服从偏微分方程,不能对它们做机械的解释。”“这一关于物理实在概念的变革,是自牛顿以来物理学家所感受到的最深刻、最富有成果的

进展。”

6 麦克斯韦的电磁波和关于光的理论

在麦克斯韦的第二篇论文的第三部分得到的另一个惊人的成果是:提出了关于光的理论预言。

麦克斯韦用他的分子涡旋模型局域地描述电磁相互作用,重新产生了实验上已发现的规律(例如电磁感应定律等),并推广了安培环路定理。麦克斯韦认识到,既然他的模型中的介质是完全弹性的,就可以传播横波。设弹性介质的密度为 ρ ,切变模量为 m ,则按照通常的推导,横波在其中传播的速度应为

$$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}}.$$

利用他在第二篇论文的第一部分根据他的模型导出的结果,以及由“理想固体”的特点,他得到结果(135)式,即

$$V = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

继而,根据空气或真空的介电常数和磁导率的实验数据,麦克斯韦发现 V 的值与光在空气或真空的传播速度精确一致。据此,麦克斯韦断言:“我们实在难以避开的结论是:光是产生电磁现象的同一介质中的横波。”

在麦克斯韦的第三篇论文中,由于麦克斯韦方程组已经完备,使得麦克斯韦能够顺理成章地在该文的第VI部分导出决定电磁波的运动方程(即波动方程)。在各向同性的介质中,该方程即

$$\left(\frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{B} = 0.$$

由此立即得出电磁波的传播速度为

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

1888年,赫兹(Heinrich Hertz, 1857—1894)以实验证实了麦克斯韦的电磁波的存在。

至此,麦克斯韦将电学、磁学和光学统一为麦克斯韦电磁场理论。爱因斯坦在纪念麦克斯韦100周年诞辰时写道:“自从牛顿奠定理论物理学

的基础以来，物理学公理基础的最伟大的变革，是由法拉第和麦克斯韦在电磁现象方面的工作所引起的。”“这样一次伟大的变革是同法拉第、麦克斯韦和赫兹的名字永远联系在一起的。这次革命的最大部分出自麦克斯韦。”

7 第一个相对论性规范场论

麦克斯韦的电磁场理论的正确性至少在某一个确定的(近似)惯性系(地球)中获得了证实；特别是，按照麦克斯韦的理论，真空中光速只与真空的性质有关。1904年，洛仑兹发现麦克斯韦方程组与伽利略变换矛盾，从而导致这样的结果：对于不同惯性系的观察者而言，麦克斯韦方程的形式会发生变化，于是在不同惯性系中真空的性质不一样。这与伽利略所坚持的相对性原理的精神(注意：这里指各惯性参考系中的物理规律的形式是相同的)相违背。洛仑兹据此提出了著名的洛仑兹变换，保证了麦克斯韦方程组在不同的惯性系中的形式相同，从而出现在麦克斯韦的真空电磁波方程中的光速 c 就是与惯性参考系的选取无关的常量了。这正是爱因斯坦创立狭义相对论的出发点之一。

爱因斯坦提出的狭义相对论是关于一切物质的存在形式——时间与空间的规律，迄今为止人们认识到，这是除了引力以外弱、电、强相互作用都应当满足的规律，它是检验这些特殊相互作用的规律的规律。当爱因斯坦以此框架检验牛顿力学时，发现它与洛仑兹变换矛盾，因而将它修改并推广成为相对论力学。当爱因斯坦检验麦克斯韦的电动力学时，发现它完美地与狭义相对论一致。麦克斯韦的电动力学是物理学家所发现的最早的相对论的动力学理论，它满足狭义相对论所要求的全部庞加莱(Jules Henri Poincaré, 1854—1912)变换群的对称性。

事实上，对于这一对称性，麦克斯韦早有所悟。例如，在他的名著《电磁通论》第601节说：“由这一方程(指前面的方程(D))看来，不论导体相对于固定坐标系还是相对于运动坐标系运

动，电动强度(指方程(D)左端的电动力)的表达式的形式都相同，只是将固定坐标系中的电势换成运动坐标系中的电势罢了。”

麦克斯韦方程组不仅展现了符合狭义相对论的外部对称性，还展现了所谓 $U_{em}(1)$ (下标em指明该群描述电磁相互作用)局域规范变换群的所谓内部对称性，也就是说，麦克斯韦方程组在 $U_{em}(1)$ 局域规范变换下形式不变，这不仅保证电荷守恒定律严格成立，也被外尔(Hermann Weyl, 1885—1955)用来作为证明为什么自然界存在光子的理由。特别是，将麦克斯韦方程组量子化而使经典电动力学成为量子电动力学后，计算结果(例如电子反常磁矩)与实验数据惊人的一致(相对误差仅为十亿分之一)。我们不能不说这是人类有史以来所掌握的最深刻、最精确的物理理论，其经典模板就是麦克斯韦的电动力学。进而，强相互作用理论(量子色动力学)只不过是麦克斯韦电动力学中的 $U_{em}(1)$ 规范群(它属于所谓阿贝尔群，其产生子相互对易)代之以 $SU_c(3)$ 规范群(它属于所谓非阿贝尔群，其产生子相互不对易，这里的下标c表示色荷，指明该群描述强相互作用)罢了。而温伯格(Steven Weinberg, 1933—)、格拉肖(Sheldon Lee Glashow, 1932—)和萨拉姆(Addus Salam, 1926—)提出的电弱统一理论也是以麦克斯韦电动力学为模板的，只不过它不仅将 $U_{em}(1)$ 规范群改为超荷群 $U_Y(1)$ (下标Y指明该群描述右手费米子单态与相应的规范子之间的相互作用)和左手群 $SU_L(2)$ (下标L指明该群描述左手费米子二重态与相应的规范子之间的相互作用)的直积规范群 $U_Y(1) \otimes SU_L(2)$ ，而且让这个规范对称群通过所谓Higgs机制破缺到 $U_{em}(1)$ 群，从而赋予3个规范玻色子 W^+ 和 Z 粒子以质量，并保持 γ 光子仍是无质量的。甚至连经典的引力相互作用(广义相对论)也可以按麦克斯韦的框架写成以 $SL(2, C)$ (它是洛仑兹群联通部分的最小覆盖群，其中的2和C表示该群的变换作用在2维复空间上)为规范对称群的规范场论。可见，麦克斯韦电动力学是现代规范场论的源头，它可以当之无愧地被称为物理学发展史上第一个相对论规范场论。

实验室低温制冷系统



超低振动
显微应用

4K-1100K
光谱学应用

纳米应用低温探针台

超低振动 (3-5nm)
5K 样品台温度



Advanced Research Systems

+1 610 967 2120
www.arscryo.com
ars@arscryo.com

值得指出的是，麦克斯韦对于他的方程组的内部规范对称性的存在也曾有所悟。例如，麦克斯韦在给出法拉第的电紧张态的数学表示 A 之前，就讨论过的规范自由度问题。关于这一重要的关节点，麦克斯韦在审视了他的方程组后，在《电磁通论》第 616 节指出：若作关于 A 的变换(实际上就是规范变换)：

$$A = A' - \nabla\chi,$$

则“量 A 从方程(B)中消失了，从而它是和任何物理现象(实际上是指经典物理现象)都没有关系的。”

8 结束语

麦克斯韦的生命历程只有短短 48 岁。他像一道夺目的闪电，划开了人类思想的天幕，让像爱因斯坦这样的有心人窥见了上帝的秘密；他像一颗璀璨的流星，在物理学中留下了永恒的丰碑，他的方程组引导着物理学家揭示自然界一个又一个相互作用的规律。美国科学史家托尔斯泰(Ivan Tolstoy)所著的《麦克斯韦传》这样评价说：“现代技术和物理学中，很难有哪一领域麦克斯韦的理论没有做出重要贡献——从电力的产生和传递到交换系统或现代粒子物理的大型加速器。麦克斯韦方程在科学上、实践上和工程上的后果是原创性的、无所不在的，根本无法一一列举。”诺贝尔奖得主费曼铿锵有声地陈辞：“从现在起一万年的人类历史长河中，毫无疑问的是，麦克斯韦对于电动力学的发现将被视为 19 世纪最重要的事件，与这一重大科学事件相比，发生在同一个十年中的美国南北战争只不过是一桩地区性的小事而不足挂齿。”

参考文献

- [1] Maxwell J C. On Faraday's Lines of Force—1855/56, Maxwell's first paper (Part 1 & 2)—Compiled by Blaze Labs Research
- [2] Maxwell J C. On Physical Lines of Force—1861, Maxwell's 1861 paper describing magnetic lines of Force—Predecessor to 1873 Treatise
- [3] Maxwell J C. A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155:459(This article accompanied a December 8, 1864 presentation by Maxwell to the Royal Society)
- [4] 刘觉平. 电动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004