广义相对论与黎曼几何系列之八
平行移动和协变微分

张天蓉†

2015－11－18收到
† email:tianrong1945@gmail.com
DOI:10.7693/wl20151209

什么是平行移动？简单地说，就是将一个矢量在保持与原来的方向平行的前提下沿着空间里的一条曲线移动。怎样才算是“保持与原来的方向平行”呢？在平坦的欧几里德空间里，对直角坐标而言，这种移动方式一目了然。

比如说，让我们想象有一个极小极扁的平面生物“扁先生”，生活在一张平坦的纸上。扁先生会使用坐标系，他对他的世界进行观察和测量。他感受到的几何，是与我们中学学过的平面几何一致的标准欧几里德几何：三角形的三个内角之和等于180°；过不在同一直线上的三点可以作一个圆；直角三角形两条直边的平方和等于斜边的平方……等等。

扁先生也学过微积分，会计算许多图形的面积，懂得矢量和张量等概念。扁先生所理解的平行移动，就是像图1中左图所示的：矢量移动的时候，要保持与自己原来的方向平行。如何才能做到这点呢？只要保持这个矢量在直角坐标系中的分量不变，是一个常数，就可以了。扁先生发现，如果将矢量沿着一条闭曲线平行移动一圈再回到原来出发点的话，矢量的大小和方向都不会改变，经过了平行移动得到的矢量，和原来的矢量是一模一样。

不过有一天，来了一个3维世界的小生物“三维先生”，看见了扁先生生活的这张纸。三维先生突发奇想，把这张纸剪去了一个角。比如说，像图1中间图所画的情形，剪去了一个α的角，然后再将剩余图形的两条剪缝黏贴在一块儿，做成了一个图1右图所示的锥面。

生活在“锥面”纸上的扁先生并没有立即感到他的世界有什么变化。似乎照样是欧氏几何，他画的直角坐标轴仍然在那儿。当他拿着他的(平面)陀螺仪，沿着他的小圆圈(图1右图的C_1或C_2)作平行移动而回到原来出发点的时候，陀螺仪的指向和原来一样。这说明矢量平行移动的规律没有改变。

不过，扁先生的技术越来越高，胆子越来越大，旅游的地点也走得越来越远。他逐渐发现了一些问题。比如说，当他沿着图1右图中所示的曲线C_3走了一圈回到原来出发点的时候，他的陀螺仪的指向和出发时候有了一个角度差(α)。这个新发现令扁先生激动，于是，他进行了更多的平行移动实验，绕了好多个不同的圈，终于总结出了一个规律：在他生活的世界中，在图1右图中所标记的点O附近，有一个特殊的区域，只要他平行移动的闭曲线中包含了这个区域，陀螺仪最后的指向就总是和原来出发时的方向相差一个α。如果不是绕着这个区域转圈的话，平行移动便不会使矢量的方向发生任何改变。当时的扁先生，还没有搞清楚这个区域是多大。

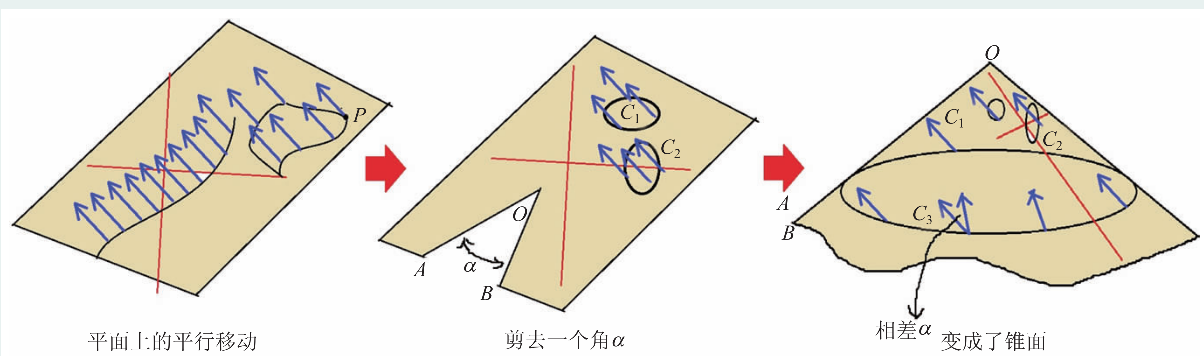

图1 当平面被剪去一个角并粘贴成锥面后，矢量平行移动的变化

扁先生想，首先还得从理论上研究一下“平行移动”的概念。按照他原来所理解的平行移动，是“保持这个矢量在直角坐标系中的分量不变”。但是，如果用极坐标的话，以上叙述便不能成立了。那么，在极坐标中又应该如何操作平行移动呢？当然，扁先生的锥面世界中绝大多数地方都是“平”的，除了那块该死的区域之外！只要空间是平的，极坐标总是可以转换成直角坐标的，那样的话，“平行移动”便意味着“分量不变”了。不过，如果不平坦的地方，度规张量无法靠坐标变换来变成常数的话，平行移动是什么意思呢？那种情形下的平行移动是否就会产生诸如“陀螺仪绕一圈回不到原来方向”这样的怪事？因此，扁先生提醒自己，不能老是用笛卡尔的直角坐标来思考问题，即使是在平面上，有时候也得从一般的曲线坐标出发来考虑问题，就像图2(a)所画的那种坐标。

沿着某条曲线的平行移动是由许多沿着无穷小的一段弧长ds平行移动的连续操作而构成的。因此，要解决扁先生的疑问，我们首先得理清楚“平行移动无穷小弧长ds”是什么意思。“无穷小”与微分有关，换言之，需要考查流形中矢量场的“导数”的概念。

在本系列文章的上一篇“黎曼几何”中提到过，黎曼流形上可以定义各种张量场。所谓“场”，就是流形上每个点都有一个物理量。张量场即是流形上每个点都有一个张量。在n维流形上，张量包括1个数值的标量、n个分量的矢量，以及2阶张量(n^2个数)、3阶张量(n^3个数)等等。因为分量数目的这种规律，可以将坐标系中的张量分量用取值从1到n的指标i、j、k……等来表示。比如说：标量ϕ，不需要指标，为0阶张量；矢量V^i，1个指标，为1阶张量；有两个指标的度规张量g_{ij}是二阶张量；4阶张量R^i_{jkr}，则有4个指标……

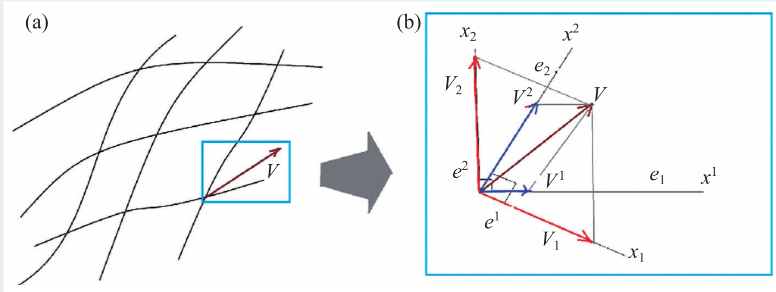

图2 (a)任意的曲线坐标系；(b)协变矢量和逆变矢量

但是，并不是说分量数目符合上述规律的物理量就一定是张量。重要的是，当坐标变换时，张量的分量得按照某种相关的规律变化，才能将其称之为张量。另外还有一点需要说明的是，上面所列举的张量的指标i、j、k等，有的在上，有的在下，“上、下”只是一种约定，分别代表“逆变”和“协变”的意思。我们仅以矢量为例说明这点。如果某矢量的分量按照和坐标基矢e_i相同的变换规律“协调一致”地变换，这样的矢量叫做协变矢量，指标写在下面，记为V_i。如果某矢量的分量按照和坐标基矢e_i变换的“转置逆矩阵”的规律而变换，这样的矢量叫做逆变矢量，指标写在上面，记为V^i。其他阶张量的指标也是按照类似的规律来分成“协变”或“逆变”部分的，从而决定该指标写在“下”或“上”[1]。

图2显示了协变矢量和逆变矢量直观的几何意义。同一个矢量V，可以用对坐标平行投影的方法表示成逆变矢量，也可以用对垂直坐标投影的方法表示成协变矢量。对直角坐标系而言，两种坐标系是一样的，所以没有“协变量”、“逆变量”的区别。

张量的变换规律决定了张量的一个重要性质：如果在某个坐标系中，一个张量是0，那么，这个张量在其他坐标系中也是0。也就是说，张量其实是独立于坐标而存在的，这点对于物理定律的描述很重要，因为物理定律也不应该依赖于坐标，坐标只是为了计算的需要或表述方便而被引入。张量应该不依赖于参照系的选择这点，从矢量V的原始定义也可以看出：矢量是指一个同时具有大小和方向的几何对象，通常被标示为一个带箭头的线段，这里并没有什么坐标牵扯进来。然后，在一定的坐标系下，V可以表示成坐标基矢e_i(或者e^i)的线性组合：

$$V=V^ie_i=V_ie^i\,. \tag{1}$$

这个表达式中又用了另一个科学界常用的约定，叫做爱因斯坦约定。它说的是：如果像在上面式子中那样，指标i出现两次(一上一下)的话，意思是对指标的所有可能取值求和。矢量(张量)的协变分量和逆变分量可以通过度规张量g_{ij}互相转换：

$$V_i=g_{ij}V^j\,. \tag{2}$$

现在，我们再回头来考虑流形中矢量场的“导数”问题。

假设(1)式描述的是欧氏空间的一个矢量场V，如果使用笛卡尔直角坐标系，基矢e_i是整个空间不变的，对V的导数只需要对V^i求导就可以了：

$$\frac{\partial V}{\partial x^{\beta}}=\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}e_{\alpha}\,, \tag{3}$$

但是，对一般的流形(平坦空间的曲线坐标或者不平坦的任意度规)，坐标架和基矢e_i都逐点变化，对V的导数就还必须考虑e_i的导数。因此，根据乘积求导的链式法则，便得到：

$$\frac{\partial V}{\partial x^{\beta}}=\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}e_{\alpha}+V^{\alpha}\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,. \tag{4}$$

一般来说，e_i的导数也仍然是e_i的线性组合，将其系数记为$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$，叫做克里斯托费尔符号，

$$\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}=\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}e_{\mu}\,. \tag{5}$$

度规张量g_{ij}实际上是坐标基矢e_i的内积：$g_{ij}=e_i\cdot e_j$。因此，由坐标基矢之导数定义的克里斯托费尔符号与度规张量以及度规张量的导数有关：

$$\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right). \tag{6}$$

在上面的公式中，(4)式相比(3)式而言，除了通常的对矢量分量V^{α}的微分之外，还多出了正比于矢量V^{α}的额外的一项。这一项反映了黎曼流形每一点的切空间上配备的度规张量的变化。这种加上包括克里斯托费尔符号的额外项一起定义的微分，叫做对矢量的协变微分，或者称之为共变导数。(注：“协变微分”中的“协变”，与“协变矢量”中的“协变”，完全是两码事。)

流形上每个点与相邻点有不同的切空间，因而也有不同的坐标系和度规，为了能在流形上建立微分运算，两个相邻的切空间之间便需要定义某种“联络”，以意大利数学家列维-奇维塔(Levi-Civita，1873—1941)命名的列维-奇维塔联络是在黎曼流形，或伪黎曼流形(将在引进4维时空时介绍)，的切空间之间保持黎曼度规不变的唯一的无挠率联络，克里斯托费尔符号则是列维-奇维塔联络的坐标空间表达式[2]。

以上提到的“联络”一词，在数学上有其严格的定义，目前可暂且将它按上文理解。实际上，广义相对论用到的黎曼几何与原来欧氏几何的最大区别不是仅仅在于空间存在曲率这一点，而更是因为有了曲率(及内蕴的概念)后使得空间的几何局部化了。在黎曼流形上的每一个点有了一个不同的切空间，亦即不同的参考框架。仍然可以使用三维空间的二维曲面来想象。黎曼流形上每一点的有限邻域不一定是“平”的，但是当这个邻域很小的时候，可以当成是平面，就如我们在日常生活中感觉不出大地是球面一样的道理。然后，在地球表面上每个点都有一个切空间，都带上了一个不同方向的活动标架。这些切空间构成一个“丛”。可以通俗地想象成在高高低低起伏不平的地球表面上长满了“树丛”。这些所有“树”的局部几何加在一起，构成了整个流形的几何。树与树之间有些枝桠互相联系起来，叫做“联络”。原来的欧式空间呢，不像刚才描述的地球模型，而只是一个无限延伸的平面，简单多了，有点像整个平面上均匀地铺上了一层草皮而已。

言归正传，列维-齐维塔是意大利的犹太裔数学家，和他的老师、另一位意大利数学家里奇-库尔巴斯托罗(Ricci Curbastro，1853—1925)一起创建了张量分析和张量微积分。列维-齐维塔与爱因斯坦关系密切，以至于当别人问到爱因斯坦最喜欢意大利的什么东西时，爱因斯坦风趣地回答：“意大利面条和列维-齐维塔!”

从另一方面看，V^{α}对x^{β}的偏导数不是一个张量，但共变导数是一个张量。基于张量的坐标独立性，在黎曼几何下表达物理规律时，或者说，将物理规律从狭义相对论推广到广义相对论的弯曲时空时，通常以共变导数来代替普通导数。这给了我们一个简单而“偷懒”的原则。

举平行移动的问题为例。直角坐标中平行移动V时：$\mathrm{d}V^j/\mathrm{d}s=0$，在黎曼流形上，则需代之以对$V$的共变导数，表达式变成：

$$\mathrm{d}V^j/\mathrm{d}s+\Gamma^{j}_{np}V^n\mathrm{d}x^p/\mathrm{d}s=0\,. \tag{7}$$

将以上方程换一个写法：$\mathrm{d}V^j=-\Gamma^{j}_{np}V^n\mathrm{d}x^p$。这就是将矢量$V$沿$\mathrm{d}s$作平行移动时，需要如何改变$V$的逆变分量的规律。

参考文献

[1] Wikipedia：http://en.wikipedia.org/wiki/Covariance_and_contravariance_of_vectors

[2] Choquet-Bruhat Y，Dewitt-Morette C，Dillard-Bleick M. Analysis，Manifolds and Physics. Part I：Basics. 1982