

# 从空气阻力墙理论到足球的“电梯球”技术

葛惟昆<sup>1,2,†</sup> 贾继莹<sup>1</sup> 张京雷<sup>1,2</sup>

(1 清华大学物理系 北京 100084)

(2 清华大学体育部中国足球发展研究中心 北京 100084)

2015-08-26收到

† email: gewaikun@mail.tsinghua.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20160106

现代足球不但在规则和比赛阵型等技战术层面有了长足的发展,而且在技术上也有许多改进和创新。“香蕉球”和“电梯球”就是两个极具魅力和美感的踢球方式,并经常在足球比赛的实战中发挥威力。“香蕉球”是指足球飞行中在与地面平行的方向发生偏转,偏转运行的轨迹呈弧线形,可以绕进球门。其物理原因在于球的侧向旋转,从而出现马格努斯效应,产生对足球的侧向推力,其运行轨迹类似香蕉形。在2008年第7期《物理》发表的阎守胜论文《趣谈球类运动的物理》<sup>[1]</sup>中已经做过讨论,孙葆洁和葛惟昆在清华大学开设的慕课(MOOC)《足球运动与科学》中也有过详述。这里我们专门从物理原理上介绍在2008年以后发展的一种新的足球任意球技术,即所谓的“电梯球”,即指大力踢出的足球,下落很快,像是从电梯上下坠。它实际上是高速飞行的足球受到重力和大雷诺数阻力下的运动轨迹。2012年,意大利人首次把它称为“电梯球”,用来形容他们的中场核心皮尔洛在波兰踢出的一个任意球(图1中足球正在从最高点急速下落)。

对抛射物的研究表明,可以观察到两种类型的运动轨迹:如果初速度小于自由落体的末速度,将看到伽利略抛物线轨迹,即上升阶段和下落阶段的轨迹是对称的;如果初速度大于末速度,那么该抛射物

将沿着一条不对称的轨迹减速,即上升阶段斜率较小,而在轨迹末端接近成为一个垂直的落体。空气阻力如同一个墙壁(以下称为空气阻力壁)阻碍了抛射物向前的运动,这种轨迹经常出现在体育运动、烟花、灌溉等活动中(见图2),下面我们从物理上分析其主要特性。

对于一个发射体而言,这实际上就是一个弹道问题,其主要课题是确定抛射物在空气中运动时的轨迹。为了表达质量为 $M$ 和速度为 $U$ 的粒子抛射物在空气中运动时的轨迹,需要解下面的运动方程:

$$M \frac{dU}{dt} = F_G + F_A, \quad (1)$$

式中 $F_G$ 是重力, $F_A$ 是空气作用力,初始条件为 $U(t=0)=U_0$ 。在 $(U_0, g)$ 平面,其轨迹示于图3。除了实际的轨迹形状 $y(x)$ 之外,在应用中感

兴趣的还有射程 $x_0$ 、高度 $h$ ,以及能使射程达到最大的最佳发射角度 $\theta_0$ 。本文仅限于讨论轨迹形状。

为解释这一弹道问题的多样性,我们简单地讨论在抛射物为球时的空气作用力 $F_A(U)$ 。首先做一个经典的分解: $F_A = F_D + F_L$ ,其中 $F_D$ 为阻力,该力是空气作用力平行于速度方向的部分,而浮力 $F_L$ 则是垂直于速度方向的部分。

对于不可压缩的牛顿流体(密度 $\rho$ ,粘度 $\eta$ ),不旋转球体(半径 $R$ ,速度 $U$ )在无限区域内的运动是一个早已解决的经典课题。流体运动的状态,取决于雷诺数,即流体流动时的惯性力和粘性力(内摩擦力)之比,用符号 $Re$ 表示。 $Re$ 是一个无量纲的参量。在低雷诺数极限下( $Re = \rho U R / \eta \ll 1, U = |U|$ ),斯托克斯<sup>[2]</sup>从理论上确定了球在运动中



图1 皮尔洛的“电梯球”<sup>[2]</sup>



图2 不对称颗粒轨迹的例子 (a)磨削; (b)烟花; (c)水的喷射<sup>[2]</sup>

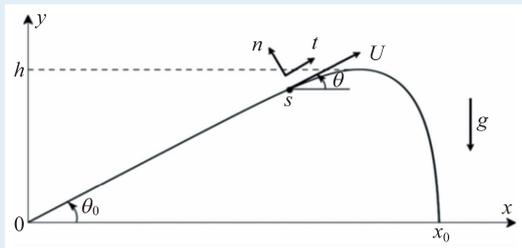


图3 轨迹图示<sup>[2]</sup>

所受到的阻力为  $F_D = -6\pi\eta UR$ 。这个结论在  $Re \leq 1$  的范围内已被一些学者在实验上验证。在高雷诺数情况下，牛顿第一个提出了阻力探索性的表达式： $F_D = -1/2\rho C_D \pi R^2 UU$ 。根据埃菲耳的早期实验， $C_D \approx 0.4-0.5$ 。这个值也被一些学者在  $10^3 < Re < 2 \times 10^5$  的范围内验证。

对于旋转球体的研究表明，球受到的升力  $F_L = 1/2\rho C_R \pi R^3 \omega_0 \wedge U$ ，其中  $\omega_0$  是旋转矢量， $C_R$  是依赖于雷诺数、旋转数 ( $S_p = R\omega_0/U$ ) 和表面粗糙度的系数。对于运动用球， $C_R$  与  $Re, S_p$  的依赖关系较弱。

从上述讨论中可知，空气作用力  $F_A(U)$  依赖于雷诺数和旋转。现在首先考虑大雷诺数纯阻力极限，球体的运动方程为

$$M \frac{dU}{dt} = Mg - \frac{1}{2}\rho C_D \pi R^2 UU. \quad (2)$$

一个很重要的参数为末速度  $U_\infty$ ，即稳态 ( $dU/dt=0$ ) 下的速度。它的矢量形式为  $U = -U_\infty e_y$ ，很容易求出  $U_\infty = \sqrt{2Mg/\pi R^2 \rho C_D}$ ， $e_y$  为纵向单位

矢量。

下面我们对轨迹做进一步的分析：

(1) 空气阻力壁的起源

我们通过讨论空气阻力壁来对一般情况下 ( $U_0 \wedge g \neq 0$ ) 的 (2)

式进行分析：没有阻力 ( $C_D=0$ ) 时，(2)式表明球体永远不会达到稳态而是在重力作用下一直加速。存在阻力时 ( $C_D \neq 0$ )，稳态 ( $dU/dt=0$ ) 出现，(2)式中球体末速度为

$$U_\infty U_\infty = \mathcal{L}g, \quad (3)$$

式中  $\mathcal{L} = U_\infty^2/g$  为特征长度。当球体运行达到稳态，此时的速度定义为末速度，它满足(3)式，该式表明，矢量形式的末速度  $U_\infty$  平行于重力加速度  $g$ ，意味着轨迹是竖直向下的。即是说，一旦阻力出现，轨迹会出现竖直的渐近线。这个竖直的渐近线在特征长度  $\mathcal{L}$  范围内达到。这一点可以通过将运动方程写为如下形式更明确地体现出来：

$$U \frac{dU}{ds} = \frac{1}{\mathcal{L}}(U_\infty U_\infty - UU), \quad (4)$$

式中  $s$  是沿轨迹的弧长。(4)式沿  $x$  方向的投影为  $dU_x/ds = -U_x \mathcal{L}$ ， $U_x$  为速度的水平分量。在初始条件  $U_{x0} = U_x(s=0) = U_0 \cos \theta_0$  下，对这个方程积分，可以得到

$$U_x(s) = U_{x0} \exp(-s/\mathcal{L}). \quad (5)$$

如果  $U_{x0} \neq 0$ ，这个方程表明速度的水平分量在距离  $\mathcal{L}$  内呈指数下降。在达到这个距离之后， $U$  和  $U_\infty$  是平行的。因此特征长度  $\mathcal{L}$  表征了空气阻力壁的位置。这一点在下面会有进一步讨论。

(2) 两个不同的区间

为确定主导整个轨迹的参数，我们引入两个约化的变量  $\bar{U} = \frac{U}{U_0}$  和  $\bar{s} = s/\mathcal{L}$ 。上述运动方程(4)式变为

$$\bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{s}} = -\left(\frac{U_\infty}{U_0}\right)^2 e_y - \bar{U}\bar{U}, \quad (6)$$

(6)式可以在初始条件  $\bar{U}(\bar{s}=0) = \bar{t}_0$  下求解，其中  $\bar{t}_0$  是在起点处正切于轨迹的单位矢量。整个系统因此仅由两个参数主导，分别是初始倾角  $\theta_0$  和初速度与末速度的比值  $U_\infty/U_0$ 。在(6)式中，后一项的初始值为1。由此我们可以区分以下两个不同的区间：

(i) 抛物线区间

在低速发射条件下 ( $U_0 \ll U_\infty$ )，(6)式中的第二项在初始时远大于第三项，运动方程简化为经典的抛物线方程：

$$\bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{s}} = -\left(\frac{U_\infty}{U_0}\right)^2 e_y. \quad (7)$$

在这个抛物线区间内，速度从初始值  $U_0$  增加至末态值  $U_\infty$ 。

(ii) 塔尔塔利亚 (Tartaglia) 曲线区间

在高速发射条件下 ( $U_0 \gg U_\infty$ ), (6)式中的第二项在初始时远小于第三项, 运动方程可简化为

$$\bar{U} \frac{d\bar{U}}{d\bar{s}} = -\bar{U}\bar{U}. \quad (8)$$

积分后可得  $\bar{U}(\bar{s}) = t_0 e^{-\bar{s}}$ . 因此轨迹的初始部分是一直线, 沿着该直线球体在特征长度  $\mathcal{L}$  内减速. 最后的状态也是一条直线, (6)式中的第二项和最后一项抵消:  $U = U_\infty$ . 在这两个区间之间, (6)式中的三项都必须考虑, 以连接这两条直线. 轨迹的这些特征与塔尔塔利亚描述的以及图 4(b)展示的非常接近. 因此我们称在高速度情况下得到的轨迹为塔尔塔利亚曲线. 值得强调的是, 在这种特殊情况下, 运动方程决不可能约化为抛物线, 也就是说, (6)式中的前两项不会抵消. 图 4 描绘了以下两种情况: (a) 为低速条件 ( $U_0/U_\infty = 0.31$ ); (b) 为高速条件 ( $U_0/U_\infty = 100$ ).

综上所述可知, 简单的物理研究可以很精确地分析受到重力影响和大雷诺数阻力下球体的运动轨迹. 不同球体在阻力与重力平衡时的末速度不同. 对于不同的发射速度, 可以观察到两种不同的轨迹: 当初速度小于末速度时, 球体轨迹为经典的伽利略抛物线; 当发射速度超过末速度时, 轨迹不再是抛物线, 而是称为塔尔塔利亚的非对称曲线. 在两种极限下, 轨迹展现出竖直的渐近轨迹(空气阻力壁), 可以有解析表达式, 给出空气阻力壁的位置和射程. 这两个量在高速度情况下都表现出对数饱和. 这种饱和和在一些领域内有意义, 例如旋转如何改变球的飞行. 这些分析提供了对电梯球这样饶有兴味的足球现

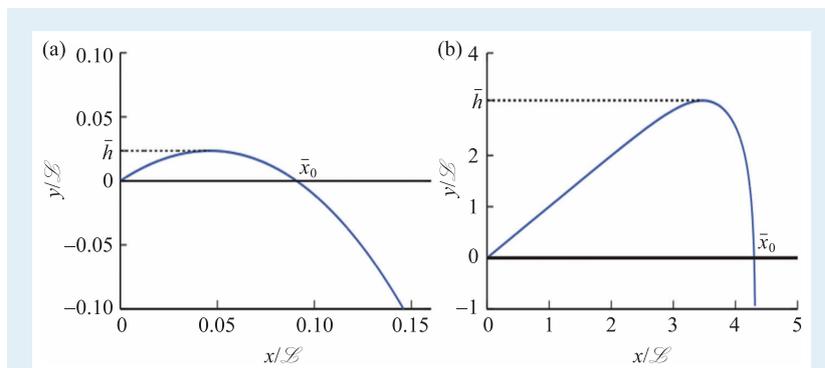


图 4 在相同初始角度  $\theta_0 = 45^\circ$  时两种不同轨迹的图示 (a)  $U_0/U_\infty = 0.31$ ; (b)  $U_0/U_\infty = 100$  (图中纵坐标和横坐标分别表示以特征长度  $\mathcal{L}$  度量的球体运行高度和距离)<sup>[2]</sup>

象的深入理解。

球的运动有物理规律可循, 物理学家可以从这个角度对体育运动提供科学的帮助. 对于足球运动员来说, 当然不需要去探究电梯球的物理细节, 只要知道, 它需要极高的初速度, 不用旋转, 就能踢出像葡萄牙运动员 C 罗那样漂亮的任意球, 急落于对方球门之内! 速度是关键. 目前所知球速最快的任意球是德国运动员马特乌斯踢出的, 时速大约为 210 公里/小时; C 罗踢出的球速可达 100 公里/小时以上, 这就是致力于踢好任意球的运动员努力的目标. “电梯球”也可以加旋转, 例如最近广州恒大足球队巴西球员保利尼奥(昵称暴力鸟)一记用外脚背踢出, 直接旋进网窝的“电梯球”。

最后要指出, 阻力壁这种空气动力学效应与球体本身的形貌有很大关系. 就足球而言, 从中国古代的蹴鞠到现代足球, 形貌发生了重大变化. 现代足球最初由 32 块皮子组成, 12 块正五边形, 20 块正六边形, 与著名的碳 60 分子表面一样,

是一种非常坚固的结构. 后来经历历届世界杯的沿革, 足球由 32 块皮子发展为 14 块、8 块, 直到 2014 年巴西世界杯采用的由 6 块皮子组成的所谓“桑巴荣耀”足球. 这种球不但减少了皮子之间的缝隙数量, 表面还布满小突起, 因此对空气阻力壁的形成有削弱的作用. 有物理学家专门研究了这种现象<sup>[4]</sup>. 事实也证明, 在巴西世界杯和此后的国际比赛中, “电梯球”大大减少. C 罗本人现在的任意球成功率大大降低, 应该也与此有关。

致谢 感谢法国国家科学院 (CNRS) C. Clanet 教授的支持。

## 参考文献

- [1] 阎守胜. 物理, 2008, 37(7): 482
- [2] Cohen C, Darbois-Texier, Dupeux G et al. Proc. R. Soc. A, 2013, 470: 0497
- [3] Stokes G G. Trans. Camb. Philos. Soc., 1851, 9: 8
- [4] Hong Sung-chan, Asai Take-shi. Scientific Report, 2014, 4: 2154