广义相对论与黎曼几何系列之九 二维曲面上的平行移动和曲率

张天蓉†

2015－12－13收到
† email：tianrong1945@gmail.com
DOI：10.7693/wl20160109

根据上一篇最后得到的“无限小”平行移动公式，理论上便知道了如何改变一个矢量的坐标分量使其作平行移动，但在实际情况下往往不是那么容易操作的。因此，首先举几个实际中的简单例子，给二维曲面特殊情形下的平行移动作点直观说明。在这些例子中，我们感兴趣的只是矢量绕某个闭曲线作平行移动一周后的方向变化。

就我们现在所具有的科学知识而言，我们认为自己(人类)是一种三维空间的生物，我们的世界是三维(不知是否还有更多的维数？)。就像上一篇中所描述的“三维先生”，自以为要比那个可怜的平面生物“扁先生”高明多了。我们在三维世界中看得非常清楚，扁先生生活的世界是一个锥面，这是一个可展曲面，或者说，本来就是由三维先生将一张平面的“纸”剪去了一个角而粘成的。因此，我们看一眼就知道，扁先生的锥面世界处处都是平坦的，除了那一个顶点O之外。

首先研究锥面上的平行移动。正如扁先生所观测到的，如果平行移动经过的闭合路程包括了顶点O的话，他的陀螺仪，即作平行移动的矢量，就会与原来出发时的方向相差一个角度，如果他的旅游路线没有包括顶点的话，任何矢量平行移动后回到出发点时方向仍然不变。为了更清楚地解释这两种不同的情况，我们在图1(a)中，将锥面从顶点剪开后重新展开还原成了一个平面图形。这个“剪去一角的平面图形”与整个欧几里德平面的区别在于图中的A和B是锥面上的同一点，因此，直线OA和OB需要被理解为是同一条线。

图1(a)中靠右方的闭合曲线C_1，没有包含顶点O，因而，曲线C_1所在的所有区域，都和欧几里德平面没有任何区别。当一个矢量平行于自身沿着C_1，经过点(1-2-3-4-5-1)逆时针绕行一周后，和原来在平面上绕行一周一样，方向不会改变。但是，如果矢量是沿着左边的曲线C_2平行移动的话，情况则会稍微不同，因为C_2包括了顶点O，矢量在绕行过程中必然要碰到直线OA。比如像图中所示那样，假设矢量从B点出发，出发时的方向垂直于OB，因为图中的A、B、1三个点其实都是同一个点，所以，出发时的矢量方向也是垂直于OA的。然后，矢量经过各个点2、3、4，到达5的时候应该保持和原来相同的方向。点5其实就在直线OA上，但是因为OA和OB之间剪去了一个角，平行移动到点5时，矢量并不垂直于OA，而OA和OB又是同一条线，所以最后的矢量与OB也不垂直。产生角度差的原因很明显，因为平面被剪去一角变成锥面后，使得绕行C_2一周在平面上并没有绕过360°，而是少走了一个角度(在图中所示的例子中，只绕了320°)。所以使得矢量平行移动后产生了一个40°的“角度亏损”。

因此，任何矢量在锥面上作平行移动的规律很简单：如果绕行的

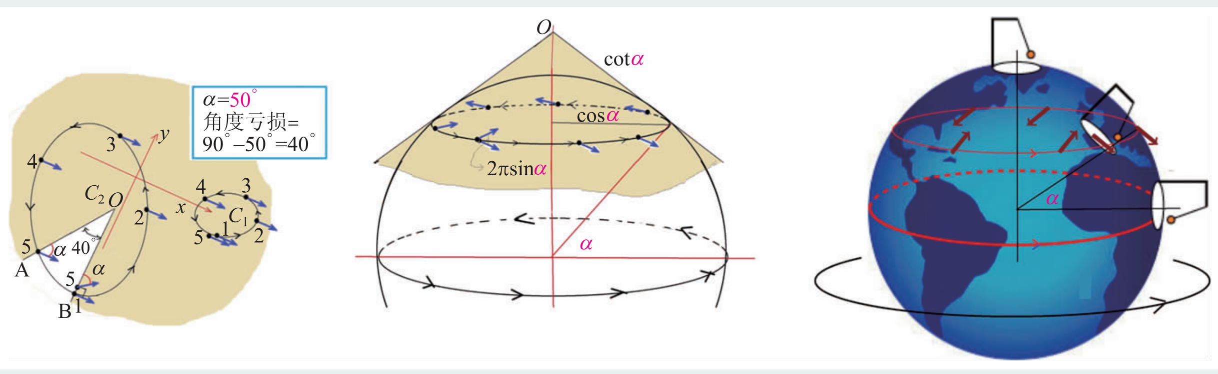

图1 平行移动举例 (a)锥面上的平行移动；(b)球面上的平行移动；(c)傅科摆

回路中没有顶点O，矢量方向不变；如果回路包括了顶点，则将产生一个固定的角度亏损，这个角度差别取决于锥形的形状。锥面是个很特别的曲面，它处处都是“平”的，与欧几里德几何一致，除了顶点是个“奇点”之外。

综上所述，矢量平行移动一周之后产生的角度亏损与绕行曲线所包围的区域的弯曲性质有关，如果那块区域是完全平坦的，则没有角度亏损。换言之，角度亏损是由于被包围的区域中的“不平坦”性产生的。对于锥面的情况，不平坦的来源是顶点。

人类赖以为生的地球是一个球面，因此，我们更感兴趣在球面上的平行移动。首先研究在球面上沿着一条比较简单而特殊的曲线(圆)平行移动的规律。不失一般性，如图1(b)所示，我们赋予球面一个类似地球表面所使用的经纬坐标，然后考虑纬度为α的圆C_α。球面上的矢量沿着这个圆周的平行移动可以简化为锥面上的平行移动。方法是像图中所画的那样，给球面带上一顶刚好与其在C_α相切的锥形帽子。在如此构造的结构中，如扁先生这种二维生物，假设他只能看到他周围无限小的距离的话，他无法分辨出他是在球面上沿着C_α平行移动，还是在锥面上沿着C_α平行移动，因为两者的移动效果是一样的。因此，球面上沿C_α平行移动的角度亏损等于沿锥面平行移动的角度亏损。这个角度差与锥形“帽子”剪去的那个角度有关，读者自己不难从初等几何推导出角度亏损与纬度α的关系：矢量逆时针平行移动后，其方向以逆时针方向旋转了$2\pi\sin\alpha$，相应的角度亏损则为$2\pi(1-\sin\alpha)$。如果纬度α变大，圆周C_α向上方移动且变小，锥形帽子剪去的角度也就更小，锥形变得更平坦，因而使得平行移动后的角度亏损也更小。

物理上，球面平行移动的计算可以用来解释傅科摆的现象(见图1(c))。傅科摆是证明地球自转的一种简单设备，根据法国物理学家莱昂·傅科(Léon Foucault，1819—1868)而命名。

考虑悬挂在位于纬度为α处的单摆。因为地球绕着南极—北极的轴自转，单摆上方的固定点，将和地球一起转动，而摆平面的方向却是相对自由的。如果用一个矢量$\boldsymbol{V}$来表示摆平面的方向，在以太阳为参考系的观测者看来，当地球自转一周时，矢量$\boldsymbol{V}$沿着纬度为α处的纬圈平行移动了一圈。根据刚才对球面上平行移动的分析可知，矢量$\boldsymbol{V}$平行移动一圈之后，将和原来的方向相差一个角度：$2\pi\sin\alpha$，这正是被傅科摆实验证实了的摆平面旋转的角度。傅科用这个简单的设备，证明了地球自转的动力学规律，同时也验证了地球表面是一个近似球面的几何事实。

再回过头来继续研究球面上的平行移动。由以上分析可知，矢量沿α纬圈平行移动一圈的角度亏损为$2\pi(1—\sin\alpha)$。这个角度亏损是来源于所包围的区域中“不平坦”性的总和。如果绕行的圆圈越小，角度亏损也越小。在北极(或南极)附近，纬度α靠近90°的地方，圆圈的面积接近0，角度亏损也接近0。因为球面的对称性，它处处的“不平坦”程度都是一样的。所以，在球面上将任何矢量平行移动一圈回到出发点后的角度亏损很容易计算：角度亏损θ正比于闭曲线所包围的区域面积A。

如果研究对象不是标准的球面，而是一般的二维曲面，上述“角度亏损θ正比于区域面积A”的结论在大范围内不能成立，但在二维曲面某个给定的P点附近，当绕行的回路趋近于无限小的时候仍然成立。也就是说：无限小的角度亏损$\mathrm{d}\theta$将正比于无限小的区域面积$\mathrm{d}A$。

在本系列文章第四篇“内蕴几何”中，介绍过高斯曲率。高斯当时是根据高斯映射来定义高斯曲率的。高斯映射实际上也涉及到平行移动，但高斯的说法不太一样。现在，我们明白了黎曼流形上矢量平行移动的概念之后，可以用平行移动来重新定义二维曲面上的内蕴曲率R，这点对下一篇将要介绍的一般黎曼空间中的黎曼曲率张量很有用处。

矢量绕着曲面上P点附近无限小的一块区域平行移动后，产生的角度亏损$\mathrm{d}\theta$将正比于区域的面积$\mathrm{d}A$，可用公式表示为

$$\mathrm{d}\theta=R\mathrm{d}A, \tag{1}$$

这里的比例系数R被定义为二维曲面在P点的曲率。对半径为r的球面：$2\pi(1-\cos(\mathrm{d}\alpha))=R\pi(\mathrm{d}r)^2$，其中$\mathrm{d}r=r*\mathrm{d}\alpha$，可以解出球面的曲率$R=1/r^2$。

对剪去一个有限角度δ而形成的锥面，只要绕过的区域包含了顶点，角度亏损便都固定等于δ，无论面积$\mathrm{d}A$取得多小。因此，锥面上顶点处的曲率等于无穷大，其余点的曲率为0。

由平行移动根据(1)式定义的曲率R可正可负。如果矢量沿着闭合曲线逆时针方向平行移动一周后得到逆时针方向的角度变化，或者顺时针方向平行移动后得到顺时针方向的角度变化，得到的曲率为正，否则为负。马鞍面是曲率为负值的二维曲面的例子。