一念非凡之狄拉克
自出机杼的因式分解

曹则贤[†]
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2015－10－04收到
† email：zxcao@iphy.ac.cn
DOI：10.7693/wl20160309

1955年，东西方冷战正酣的时候，一位英国教授访问了莫斯科大学。按照莫斯科大学的传统，来访者被要求在黑板上写下一句铭言供保存。这位英国教授写下的是“A physical law must possess mathematical beauty(物理定律必须具有数学美)。”如今，这句话已然成为理论物理之数学美原则。这位敢在冷战气氛下访问莫斯科的英国人就是量子力学的奠基人之一狄拉克。

狄拉克(Paul Adrien Maurice Dirac，1902—1984)，英国物理学家，剑桥大学的卢卡斯教席教授(牛顿曾执掌过的教席)。这是一个瑞士移民在英国的第一代后裔，严厉的父亲要求孩子在家里必须说纯正的法语。因为担心说不好，小狄拉克干脆选择了尽可能地少说话，甚至有了自闭症的表现。沉默寡言后来成了狄拉克的标识，甚至有人因此引入了一个度量语速或者健谈度的单位狄拉克：1狄拉克等于每小时一个字。沉默寡言的狄拉克虽然语速缓慢，但是他的头脑中却风起云涌，那里发生的才是真正的头脑风暴。狄拉克独特的思维方式让后人感到迷惑不解，就是同时代与他伯仲之间的人物也会对其人其事表示不易理解。甚至有人说，如果一个人没为狄拉克着迷过，那他算不上是学理论物理的。

狄拉克1921年从布里斯托大学电气工程专业毕业，接着在那里学了两年数学，1923年终于有钱可以支撑他在剑桥大学圣约翰学院的学习。在剑桥期间，狄拉克跟随福勒(Ralph. Fowler)研究广义相对论以及那时才见发端的量子力学。到他1926年完成了量子力学方向的博士论文时，狄拉克已经奠定了其在物理学史上的地位。

1925年9月，福勒交给狄拉克一份海森堡(Werner Heisenberg)关于辐射跃迁(就是原子如何发光的过程)的矩阵力学论文的复印件。这篇论文的核心发现是说一些物理量之间可能是不对易的。若把某些物理量理解成操作的话，则两个物理量的连续操作，若顺序不一样的话其结果可能是不同的——设想一下你早晨起来先穿袜子后穿鞋和先穿鞋后穿袜子的效果。具体地，玻恩(Max Born)帮助海森堡把谐振子问题里的位置和动量之间的对易关系表述成了$[x, p]=xp-px$，且有$[x, p]=\mathrm{i}\hbar$，其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\hbar=h/2\pi$是普朗克常数。狄拉克，和我们现在一样，面对这个公式觉得好不奇怪。几个星期后的某个星期天，狄拉克突然认识到这个括号形式的公式和经典力学里已有的一种括号——泊松括号——有相似的结构。狄拉克想到这一点的时候是晚上，据说他激动得一夜未睡，因为经由泊松括号或许可以把对易关系$[x, p]=xp-px$扩展到别的物理量上去。等剑桥大学图书馆早上一开门，他就冲进去找经典力学关于泊松括号的内容，急着检验他关于泊松括号的记忆是否正确。

经典力学里的泊松括号是这个样子的：$\{f, g\}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial p}-\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial g}{\partial x}$。如果把微分运算$\partial f/\partial x$换种表达方式写成$f_x$，则$\{f, g\}=f_x g_p-f_p g_x$，这和上面的海森堡对易关系$[x, p]=xp-px$就更像了，就是求两个量(或者操作)不同顺序乘积之间的差。可是，这种形式上的相像有什么意思呢？能否在这两者之间建立起某种联系呢？狄拉克那天晚上肯定这样想过。

接下来我们就能领略狄拉克的天分了。他去计算两对函数，比如u_1u_2和v_1v_2，而不是两个函数的泊松括号。因为泊松括号在经典力学里是完好定义的、意义明确的，计算当然是有道理的。逐步计算$\{u_1u_2, v_1v_2\}$会得出这样的结果，$\dfrac{u_1v_1-v_1u_1}{\{u_1, v_1\}}=\dfrac{u_2v_2-v_2u_2}{\{u_2, v_2\}}$，可是这意味着$\dfrac{u_1v_1-v_1u_1}{\{u_1, v_1\}}$是个常数，或者说对任意的函数$f$，$g$，有$\dfrac{fg-gf}{\{f, g\}}$为常数。注意，这个式子的分子就是海森堡对易关系呀！考虑到泊松括号下$\{x, p\}=1$，而量子力学的对易式$[x, p]=\mathrm{i}\hbar$，狄拉克于是推论说任何两个函数的量子力学对易关系

* 本文摘自《一念非凡——科学巨擘是怎样炼成的》一书，外语教学与研究出版社，2016。

$[f, g]=fg-gf$ 等于相应的泊松括号 $\{f, g\}=f_x g_p-f_p g_x$ 乘以常数 $i\hbar$ 。这样，狄拉克就建立了量子力学中力学量的一般对易关系：两个量子力学里的力学量之间的对易关系，即海森堡括号决定的关系，等于相应的经典力学量的泊松括号乘以常数 $i\hbar$ 。由此，量子力学里的力学量有了可通过泊松括号建立的对易关系，量子力学的构造得以蓬勃开展起来。

狄拉克是怎么想到要计算两对函数的泊松括号的？科学史没有相关材料，我们无从得知。可是，笔者再次强调，这个看似随意挥洒的一笔却是量子力学构造的关键一步。可惜的是，一般的量子力学和量子力学历史教程，连这件事提都不提。

狄拉克最伟大的成就是给出了相对论量子力学方程，即狄拉克方程。狄拉克方程的形式以及后来对它的诠释，都是一些很艰深的内容。然而，笔者以为，**导致狄拉克方程建立的关键一步也许不过就是初中数学里的因式分解而已，**当然我们不如狄拉克学得那么深入。笔者所学的中文数学教科书，从来没告诉过读者这些数学是可以发展的，而且就是读者本人可以试着发展的。没有冲动，没有尝试，哪里会有成就呢？

在狭义相对论中，空间 x 和时间 t 的变换，所谓的洛伦兹变换，是线性形式的，也即是一元齐次方程的形式： $x'=a_{11}x+a_{12}t$ ， $t'=a_{21}x+a_{22}t$ 。可是，如果从能量关系出发去构造量子力学方程的话，却发现相对论能量关系是二次型形式的 $E^2=(pc)^2+(mc^2)^2$ 。为了让能量关系与相对论的时空变换自洽，就要求能量—动量关系也是线性的，那就得对能量关系进行因式分解。怎么分解呢？上初中的时候我们学过 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ， 可是老师说 x^2+y^2 就无法因式分解。等到学了复数，x^2+y^2 也能分解了，$x^2+y^2=(x-iy)(x+iy)$ 。注意，这里可不仅仅是引入了一个 $i=\sqrt{-1}$ 那么简单，而是我们有了崭新的数系二元数，即这个数总有两个部分，可以写成 $x+iy$ 或者 (x, y) 的形式，它们和 3.14，− 2.1 这样的一元数不是一类的。狄拉克想要的因式分解是这样的：$x^2+y^2=(\alpha x+\beta y)^2$ 。有这样的因式分解吗？

图1　狄拉克和狄拉克方程

狄拉克发现，只要要求 $\alpha^2=1$， $\beta^2=1$， $\alpha\beta=-\beta\alpha$ 就行。没有这样的实数，也没有这样的复数，可是有这样的数的矩阵呀！构造了合适的矩阵， $x^2+y^2=(\alpha x+\beta y)^2$ 这样的因式分解就是可行的，当然了，此时 x，y 也应该变成和 α，β 相匹配的量。 狄拉克引入了 4×4 的矩阵把 $E^2=(pc)^2+(mc^2)^2$ 做了因式分解，由此**构造**出了相对论性的量子力学方程 $(i\gamma\cdot\partial+m)\psi=0$ (图 1)。这个相对论量子力学的方程看似简单得可怕，应了“美的应该是简单的”道理。不过，所谓的简单，却是极具欺骗性的：你懂得越多，它就越复杂。基于这个方程，人们解释了自旋是相对论性粒子的内禀性质，提出了反粒子的概念(电子有带正电荷的反粒子，即正电子)等等。最重要的，它可能还有尚未挖掘出来的内容。

狄拉克即使在顶尖物理学家中也属另类。他思维敏捷、成就斐然，但又总是很谦虚。是他写出了非相对论量子力学中算符随时间演化的方程，但他却总称之为“运动的海森堡方程”。关于自旋半整数粒子应遵循的费米—狄拉克统计，他总是说成费米统计。笔者曾在一篇文章中写道：“文化的最后成果，是人格。物理学与人的交互作用会导致对物理学家人格的塑造。那些真正投入到物理世界中去的真正的物理学家们，因为有信仰有追求，因为领略了一些自然的伟大与神奇，所以他们的外部动作和内心世界都能显示出一份从容、深邃、祥和。**不是他们刻意追求深邃，而是物理学让浅薄于他们已经成为不可能。**” 看看图2中的狄拉克和另一位天才物理学家费曼交谈的情景，你不觉得他们已经到了宠辱不惊的境界了吗？

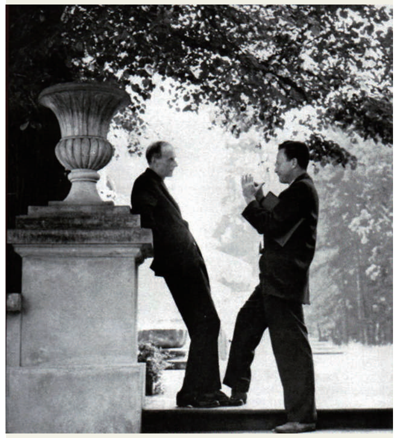

图2　狄拉克(左)与费曼

参考文献

[1] Farmelo G. The Strangest Man：The Hidden Life of Paul Dirac，Mystic of the Atom. Basic Books，2011

[2] Kragh H. Dirac：A Scientific Biography. Cambridge University Press，2005