

# 引力波: 时空的涟漪, 天球的乐音

李 泳<sup>†</sup>

(中国科学院成都山地灾害与环境研究所 成都 610041)

2016-04-08 收到

<sup>†</sup> email: ylie@imde.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20160502

## Gravitational waves: ripples in spacetime and music of the spheres

LI Yong<sup>†</sup>

(Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, China)

**摘 要** 激光干涉引力波天文台(LIGO)的引力波观测打开了认识宇宙的新窗口。文章从引力场方程的线性化开始, 介绍了引力波的弱场近似解、四极辐射、波源和频率以及黑洞结合的模拟波形。最后借 Kip Thorne 关于引力波的预言和猜想, 呈现引力波宇宙学的前景。

**关键词** 广义相对论, 引力波, 激光干涉引力波天文台, 宇宙学

**Abstract** LIGO opens a new window to look further into the universe by hearing the chirp of gravitational waves (GWs). We provide a concise introduction of GW solution of the linearized field equation of general relativity (GR), the quadrupole radiation formula, the strength estimate of GWs, and the inspiral-merge-ringdown waveforms of binary black holes simulated by numerical relativity. Finally we present an outline of GW astronomy and cosmology by reciting the predictions and conjectures proposed by Kip Thorne concerning GWs and the related subjects.

**Keywords** general relativity (GR), gravitational wave (GW), Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), cosmology

广义相对论(General Relativity, GR)奠定了现代宇宙学的理论基础, 而宇宙学的兴起却是靠一系列意外的发现, 如宇宙膨胀(1929年), 类星体(1962年), 微波背景辐射(1965年), 脉冲星(中子星, 1967年), X射线源双星(1972年),  $\gamma$ 射线源(1973年), 宇宙加速膨胀(1998年)等——它们都是借“光”(电磁波)从不同“窗户”看见的。不过, 电磁波的窗户存在很大局限, 它只能看见大爆炸10万年以后的景象(因为在那之前, 宇宙对光子是不透明的); 即使借粒子的眼睛(如中微子), 也只能看到大爆炸1秒钟之后的景象。幸运的是, GR 不仅为我们提供了眼睛,

还预备了耳朵——从时空的波澜, 我们能听见古人想象的“天球的乐音”, 听见大爆炸的声响, 听见时空奇点的啁啾(“chirp”)(图1)。激光干涉引力波天文台(LIGO)的发现, 不过是拉开一个序幕, 引力波演绎的宇宙大戏还没开始呢。

## 1 从电磁波到引力波

将GR场方程与牛顿引力场类比, 可以得到引力势与度规的对应, 从而得到GR的三个预言: 引力红移、光线弯曲和行星轨道的进动; 而

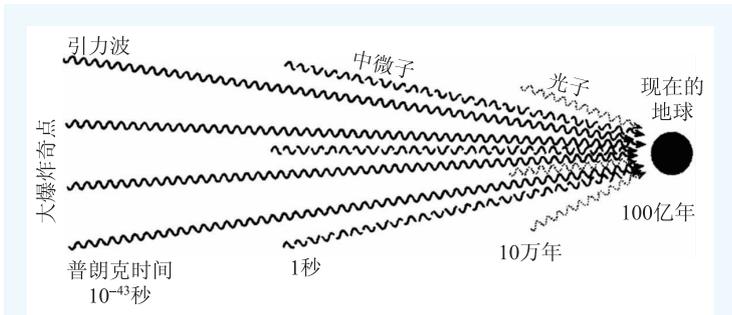


图1 引力波能带来大爆炸的消息<sup>[1]</sup>

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^B + h_{\alpha\beta}$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $\equiv \langle g_{\alpha\beta} \rangle \quad \equiv g_{\alpha\beta} - \langle g_{\alpha\beta} \rangle$

图2 背景时空下的引力波扰动

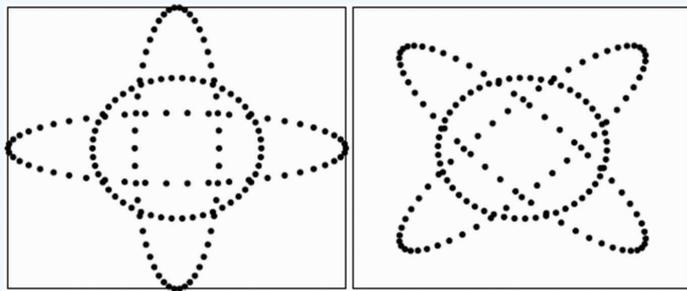


图3 引力波的极化模式<sup>[3]</sup>

与麦克斯韦电磁场类比，便自然引出场的波动即引力波。在GR场方程确立两年之前，爱因斯坦就预见当引力场扰动“无穷小”时，它将以光速传播。因为场方程高度的非线性特征，我们至今也几乎只能考虑弱场近似。

GR的图景中没有经典力学意义上的相互作用的“力”，所谓“引力”只是时空曲率的表现，我们要习惯用度规来思考问题。引力波是度规的波动，但引力场本身也有波动，我们要区分这两种波动，如图2所示，将时空度规如下分解：

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^B + h_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

则引力波是扰动度规  $h_{\alpha\beta}$  的小尺度的快速变化，其波长远小于背景度规的变化尺度： $\lambda = \lambda/2\pi \ll L \ll R$ 。

时空相应地分为两个区域：近源区(near

zone)和波动区(wave zone)，前者距离远小于波长，后者距离远大于波长。近源区的主角是静态引力场的潮汐力(如月球对地球的潮汐力)，而波动区的主角是引力波的潮汐力，是动态的，也是探测的对象。在波动区，我们将引力波近似为平直时空里的波动，而不考虑其他相互作用，如星系红移的作用、引力波的自相互作用(犹如QED的圈过程：引力波的能量导致时空弯曲，弯曲又产生新的引力波)。

在弱场情形，背景度规为平直的Minkowski度规， $g_{\alpha\beta}^B = \eta_{\alpha\beta}$ ，则由线性化引力场方程可得  $h_{\alpha\beta}$  满足协变的波动方程(波动区，不考虑波源的能量-动量)：

$$\square h_{\alpha\beta} = 0. \quad (2)$$

其中  $\square = -\partial^2/c^2 \partial t^2 + \nabla^2$ 。类似于电磁场的坐标规范，我们用“横向无迹(transverse traceless, TT)规范”提取波函数的有物理效应而与坐标系无关的分量，TT规范是随动坐标系，即自由粒子的坐标不变，但粒子间的固有分离(proper separation)变化。结果，只有横向传播的空间分量  $h_{jk}^{TT} \sim \exp(-i\omega t)$  携带能量，它也代表了时空的内禀自由度。TT波的存在直接证明了

时空的物质性；它也说明GR是背景无关的理论，即时空不是存在的背景，而是演化的实在。这种背景无关性(background independent)是未来量子引力论应该满足的条件。

将引力场方程用  $h_{\alpha\beta}$  展开，并在波长尺度上求平均，可得引力波的能量-动量<sup>[2]</sup>：

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi} \langle h_{jk,\alpha}^{TT} h_{,\beta}^{TTjk} \rangle. \quad (3)$$

$h_{jk}^{TT}$  对应的Riemann曲率张量为  $R_{0j0k} = -h_{jk,00}^{TT}/2$ ，它决定了引力波的潮汐效应，即测地线的偏离方程为

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = -c^2 R_{0j0k} \xi^k = \frac{c^2}{2} \frac{d^2 h_{jk}^{TT}}{dt^2} \xi^k, \quad (4)$$

偏离矢量的解为

$$\xi_j(t) = \xi_j(0) + \frac{1}{2} h_{jk}^{TT}(t-R/c) \xi^k(0). \quad (5)$$

它对测试粒子产生两种效应：使圆环变成半径为  $1 \pm h_{jk}^{TT}/2$  的椭圆(+模式)，或者变成椭圆且旋转  $\pi/4$ (×模式)(图3)。

极化模式揭示了引力波与电磁波的差别：引力波的两个模式相差  $\pi/4$ ，而电磁波相差  $\pi/2$ 。这个事实也可以从粒子的观点看：旋转角度等于  $\pi/2S$  ( $S$  为自旋)。引力子自旋为 2，而光子自旋为 1。超弦理论预言存在一种自旋为 2 的玻色子，具有引力子的特征。从这个意义说，超弦理论“预言”了引力的存在。极化模式的相差是设计引力波天线的基础。

## 2 引力波源

引力波的舞台是整个宇宙时空，开篇提到的那些意外发现都是引力波源。波源因速度和场强的不同而呈现不同的特征。脉冲星、双中子星等，是低速(即  $v/c \ll 1$ )波源，而黑洞(或中子星)的碰撞和超新星爆发等，是高速( $v \sim c$ )波源。这些强引力事件的发生频率各不相同，对不同探测方法的敏感性也不同。例如，LIGO-Virgo 可能观测的双(中子)星结合事件每年在 0.02~400 之间，平均大约 40 次<sup>[4]</sup>。

除了强烈的天体事件外，宇宙的大尺度时空结构和整体性活动，也是可能的引力波源，如宇宙弦(早期宇宙对称破缺相变产生的拓扑缺陷)、暴胀相变、原初黑洞、额外维效应以及微波背景辐射等等<sup>[5]</sup>。这些都关乎一定的宇宙学模型、超弦论和未来的量子引力理论。

不同的来源有不同的频率。有的频率容易确定，如脉冲星的引力波；而对多数情形，引力波的频率取决于引力源的固有频率，大致与质量成反比： $f \sim 1 \text{ kHz} (10 M_{\odot}/M)$ 。不同频率(波长)的波决定了不同的观测技术。如 1~10 kHz 的波可以在地面观测(如 LIGO)，而低频波( $10^{-4} \text{ Hz}$ )只有

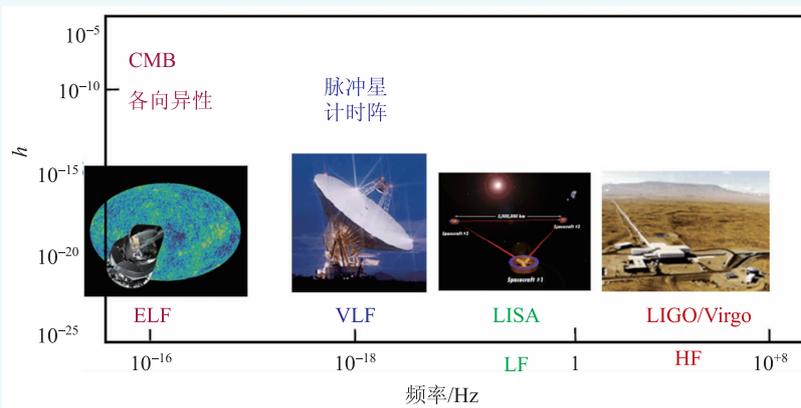


图4 不同来源的引力波频率波段

在太空观测(如 LISA 和太极计划)(图4)。在地面不可能看到质量大于  $10^4 M_{\odot}$  的天体发射的引力波。

## 3 四极辐射与引力波强度

我们知道电荷运动产生电磁辐射，物体运动当然也有引力辐射。但不同的是，因为动量和角动量守恒，没有单极和偶极的引力波；引力波最低是四极的。四极辐射的引力波为

$$h_{jk}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{jk}^{TT}, \quad (6)$$

其中  $Q_{jk}$  为质量四极矩。

我们可以从四极辐射估计双星系统的能量损失。将(6)式代入引力波的能量-动量(3)，并对能量流在遥远(观测者距离)的球面积分，可得引力波的“光度”(引力波能量流的功率)： $L_0 \sim 10^{59} \text{ er/s}$ 。这个量比太阳的(电磁波)光度高 26 个量级，比典型星系高 15 个量级。 $L_0$  是一个普适上限，对应于尺度为引力半径的系统(即使引力波也不可能从系统跑出来)。对具体的天体源来说，实际的辐射光度为

$$L_{GW} \sim (M/R)^5 L_0. \quad (7)$$

对临界质量( $1.4 M_{\odot}$ )的双中子星系统，能量耗尽的时间为  $\sim 10^{-20} s^4$  ( $s$  为两星之间的距离)。PSR1913+16 和其他双星数据很好地证明了轨道能量的耗散符合四极辐射公式(精度高达 0.5%)<sup>[6]</sup>。

虽然爱因斯坦在1916年就得到了四极辐射公式,但它在理论上一直存在争议<sup>[7, 8]</sup>,从而引出新的后牛顿方法<sup>[9, 10]</sup>。不过,在引力波的观测中,更重要的还是双星系统演化的波动模式(如频率或相)<sup>[11]</sup>。

方程(6)右边的量级为 $(Mv^2)_{\text{nonph}}$ ,即波源的非球对称运动动能的2倍,从而可以估计引力波强度为

$$h \sim G \frac{E_{\text{kin}}/c^2}{r} \sim 10^{-21} \left( \frac{M\omega^2 L^2}{M_{\odot} c^2} \right) \left( \frac{100 \text{ Mpc}}{r} \right), \quad (8)$$

其中 $E_{\text{kin}} \sim M(\omega L)^2$ 为四极振动能量。100 Mpc约为3亿光年,0.3个哈勃距离。这个量显然很小,远小于地球的引力场强(约为 $-9$ 量级)。地球上即使只有万亿分之一的引力场非均匀性也远比外来引力波的扰动大。因而不可能从空间强度分辨外来引力波。幸运的是,外来波源于剧烈的天体事件(其特征时间是毫秒量级),远比地球背景引力变化剧烈。因而我们可以通过序列波形来识别不同来源的引力波。其中最可能出现的就是双子黑洞的“约会”。

#### 4 黑洞约会的引力波

对双星(中子星或黑洞)系统来说,对应于方程(5)的引力波极化模式为(不考虑轨道偏心率)<sup>[12]</sup>

$$h_{+} = \frac{-2M\eta r^2 \dot{\omega}^2}{R} (1 + \cos^2 \vartheta) \cos 2\omega, \quad (9a)$$

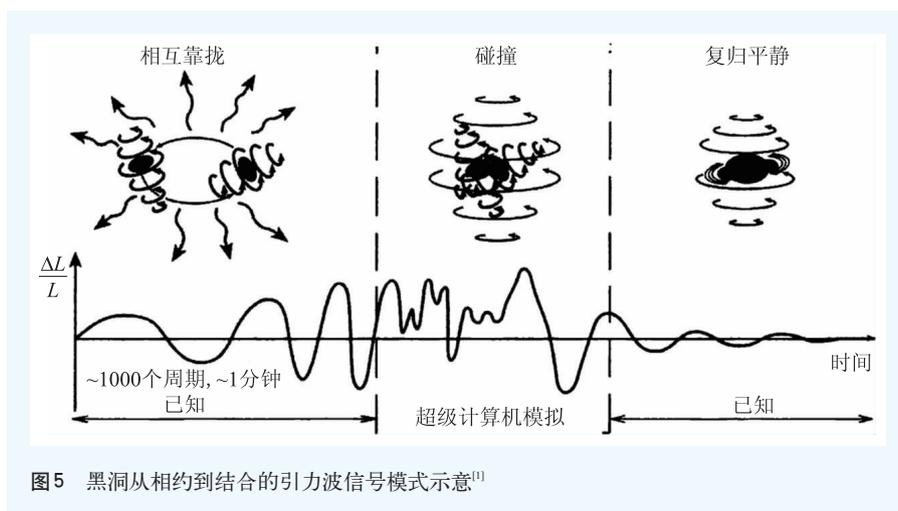


图5 黑洞从相约到结合的引力波信号模式示意<sup>[1]</sup>

$$h_{\times} = \frac{-4M\eta r^2 \dot{\omega}^2}{R} \cos^2 \vartheta \cos 2\omega. \quad (9b)$$

其中 $r$ 为两星距离, $\omega$ 为径向角, $\vartheta$ 为轨道面对观测方向的倾角。探测器接收的信号是两种信号的线性叠加,叠加系数取决于波源的方向。(因而我们可以通过波形决定波源的方向和距离,从而确定它在空间的位置。)

引力波强度为

$$h = \frac{2\eta (Gm)^2}{c^4 R p} = \frac{2}{c^4 R} (GM_c)^{5/3} \left( \frac{2\pi}{P} \right)^{2/3} \frac{1}{1-e^2}, \quad (10)$$

其中 $e$ 为轨道偏心率, $P=2\pi(a/Gm)^{1/2}$ 为轨道周期, $m=m_1+m_2$ 为总质量, $\eta=(m_1 m_2)/(m_1+m_2)^2$ 为约化质量, $M_c=\eta^{5/3} m$ 为啁声质量(chirp mass)。 $M_c$ 是一个特征性的参数,它与频率演化有密切关系,可以区分波源是黑洞还是中子星<sup>[13, 14]</sup>:

$$M_c = \frac{c^3}{G} \left( \frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right)^{3/5}. \quad (11)$$

考虑100 Mpc外的两个密近黑洞合并前的瞬间,其质量分别为 $20 M_{\odot}$ 和 $25 M_{\odot}$ (从而啁声质量为 $20 M_{\odot}$ ),轨道周期为10 ms,则<sup>[10]</sup>

$$h = \frac{3.0 \times 10^{-21}}{1-e^2} \left( \frac{M_c}{20 M_{\odot}} \right)^{5/3} \left( \frac{10 \text{ ms}}{P} \right)^{2/3} \left( \frac{100 \text{ Mpc}}{R} \right). \quad (12)$$

在实际观测中,仅凭辐射的四极项(即所谓牛顿近似)是不够的,还需要更高阶(如 $v/c$ 和 $G$ 的高阶项)的修正(多阶后牛顿修正,简称1.5 PN, 2 PN, ……)<sup>[9]</sup>。而更重要的是,我们需要对黑洞约会的过程进行模拟:两个黑洞飞旋着相互靠拢

(inspiral),然后碰撞(collision)、合二为一(merge),最后爆发一声“铃响”,然后衰减,复归平静(ring-down)。后牛顿近似方法和数值相对论已经得到了各种情景的IMR(inspiral-merge-ringdown)波形<sup>[15-19]</sup>,引力波的观测和判识就是通过匹配滤波(matched-filtering)方法从信号里发现与波形模板相应的信息(图5)。

对GW150914事件,两个黑洞的质量分别为 $29 M_{\odot}$ 和 $36 M_{\odot}$ ,合并后的黑洞质量为 $62 M_{\odot}$ ,距离约400 Mpc。这些数据与模型很接近,是因为LIGO主要的预期观测目标就是黑洞约会,所以它对这类信号特别敏感。一般说来,引力波还可能透露更多的消息:黑洞如何失去“多余的毛”,约会后留下一个洞还是一个裸露的奇点。

## 5 引力波宇宙学的问题和猜想

观测引力波当然不只是为着检验GR的预言或发展相关技术,还为着更多的发现。1989年,Kip Thorne等在向美国科学基金会申报LIGO项目时,提出两个终极目标,一个是检验:检验GR的预言,测量引力子的静止质量和自旋,研究引力的非线性动力学;一个是发现:为宇宙打开不同于电磁天文学和粒子天文学的新窗户。

2000年6月,Kip在60岁的生日会上提出了10个关于引力波的预言或猜想,虽然在16年后的今天看来有些预言不太准确,但它们基本勾勒了引力波宇宙学的现状和愿景,也可以作为引力波研究的指南,所以我们原封不动地转述如下<sup>[20]</sup>:

预言1:从2010年到2015年,一个叫LISA的太空基线引力波探测器将揭示许多遥远的大质量黑洞周围的时空弯曲,而且能绘出非常精细的弯曲地图——包括三个方面的弯曲:空间的弯曲,时间的弯曲和视界周围的时空旋涡。

预言2:在2002到2008年间(也就是在2010年发射LISA之前),大地基线引力波探测器将看着黑洞发生碰撞,看着它们的碰撞引起时空弯曲的剧烈振荡。通过对比观测的波与超级计算机模拟,我们将发现时空弯曲在与自身发生动力学的非线性相互作用时是如何活动的。

猜想3:从2020到2030的十年间,LIGO、它的伙伴和一个继LISA之后的空间基线探测器,将看到宇宙间所有3百万太阳质量以下的黑洞的碰撞,所有中子星与黑洞的碰撞,以及所有

中子星与中子星的碰撞。它们每天都能看到很多碰撞。将观测的引力波与数值相对论的模拟进行比较之后,我们能得到一个庞大的碰撞编目和它们的细节,就像20世纪的光学、射电和X射线天文学做的恒星和星系编目一样。

预言4:在2008到2010年的某个时候,LIGO和它的伙伴们的先进的探测器,将通过黑洞撕裂中子星时所产生的引力波,来跟踪大核物质的性质。观测的引力波结合星体破碎的相对论数值模拟,将以10%左右的精度告诉我们星体的周长。这个结果连同引力波的其他特征,将使我们更多地认识核的物态方程。

预言5:2008年,我们将在LIGO看到40 kg的蓝宝石圆柱表现出量子力学的行为。我们将发明一种“量子无破坏技术”来应对这种量子行为,将其融入改进的LIGO引力波探测器。那种新技术可能是所谓“量子信息科学”的人类探索新领域的一个分支,包括“量子密码技术”和“量子计算”。

猜想6:在2008到2030年间,我们将观测到来自大爆炸奇点的引力波。这将开辟一个新的时代,至少延续到2050年。那时我们将在100米到百亿光年的波长范围观测原初引力波的波谱(即波的强度作为波长的函数),然后画出天空的波强度模式图。这些工作将揭示大爆炸奇点最隐秘的细节,从而确立哪种形式的弦理论是正确的量子引力理论。它们还可能揭示宇宙在最初1秒钟的众多现象。

预言7:在霍金、普雷斯基尔和我还健在的时候,我们关于宇宙监督的新赌就会有结果。谁会赢呢?恐怕是霍金,但那不是显而易见的,而我也不会拿预言来破坏我们的赌约。但我还是要预言,为了了结我们的游戏——发现裸奇点能否不通过振幅的微调而产生——还需要三样工具:铅笔加稿纸的计算,数值相对论的计算,引力波的搜寻。

预言8:到2020年,物理学家将认识量子引力定律,会发现它是某种形式的弦理论。2040年时,我们将满怀信心地用这些定律来回答许多深

层的疑难问题, 包括:

(1)产生空间、时间和宇宙的大爆炸奇点的真正本质是什么?

(2)大爆炸奇点之前有什么? 真的存在什么“之前”的事物吗?

(3)存在其他宇宙吗? 假如是的, 它们与我们有什么关系? 又如何与我们的宇宙发生联系?

(4)黑洞内部的奇点的真正本质是什么?

(5)能从黑洞内部的奇点产生出其他的宇宙吗?

(6)物理学定律允许高度发达的文明制造并维持用于星际旅行的虫洞吗? 允许他们制造能回到过去的时间机器吗?

不太有根据的猜想9: 我们将证明, 物理学定律确实允许在人体大小的虫洞内存在足够的奇

异物, 从而保持虫洞的开放。但我们也将证明, 制造虫洞和打开虫洞的技术远远超越了我们人类文明的能力。

猜想10: 我们将证明, 物理学定律严禁回到过去的时间旅行, 至少在人类的宏观世界是这样的。不论多么先进的文明付出多么艰辛的努力, 都不可能阻止时间机器在启动的时刻发生自我毁灭。

Kip的猜想洋溢着乐观和冒险的精神, 正如他们在LIGO申请报告开头引用的一段名言(马基雅维利《君主论》): “没有比引领事物的新秩序更难把握、更冒险和更不确定的了。”在这个意义上说, 引力波不仅是时空的波澜, 也是引领宇宙学新潮的波澜。

## 参考文献

- [1] Thorne K S. Warping spacetime. In: Gibbons G W *et al* (ed.). The Future of Theoretical Physics and Cosmology: Celebrating Stephen Hawking's 60th Birthday. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. pp74—118
- [2] Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation. New York: Freeman, 1973
- [3] Sathyaprakash B S, Schutz B F. Living Reviews in Relativity, 2009, 12:2
- [4] Abbott B P *et al.* (LIGO Scientific Collaboration). Classical Quantum Gravity, 2010, 27: 173001
- [5] Battye R A, Shellard E P S. Class. Quant. Grav., 1996, 13: A239
- [6] Taylor J H. Rev. Mod. Phys., 1994, 66: 711
- [7] Ehlers J, Rosenblum A, Goldberg J N *et al.* Astrophysical Journal, 1976, 208: L77
- [8] Damour T. The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity. In: Hawking S W, Israel W(eds.). Three Hundred Years of Gravitation. Cambridge University Press, 1987. pp. 128—198
- [9] Pati M E, Will C M. Phys. Rev. D, 2000, 62: 124015
- [10] Poisson E, Will C M. Gravity, Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic. New York: Cambridge University Press, 2014
- [11] Cutler C, Apostolatos T A, Bildsten L *et al.* Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 2984
- [12] Brown D A, Zimmerman P J. Phys. Rev. D, 2010, 81: 024007
- [13] Blanchet L, Damour T, Iyer B R *et al.* Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 3515
- [14] Abbott B P *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Phys. Rev. Lett., 2016, 116: 061102
- [15] Buonanno A, Damour T. Phys. Rev. D, 1999, 59: 084006
- [16] Buonanno A, Pan Y, Pfeiffer H P *et al.* Phys. Rev. D, 2009, 79: 124028
- [17] Pan Y, Buonanno A, Boyle A *et al.* Phys. Rev. D, 2011, 84: 124052
- [18] Abbott B P *et al.* (LIGO Scientific Collaboration). Phys. Rev. D, 2013, 87: 022002
- [19] Kumar P, MacDonald I, Brown D A *et al.* Phys. Rev. D, 2014, 89: 042002
- [20] Thorne K S. Spacetime warps and the quantum world: speculations about the future. In: Price R H(ed.). The Future of Spacetime. W.W. Norton, 2002