

稀薄量子系统中的接触量和普适关系*

贺明元 周琦[†]

(香港中文大学物理系 中国香港特别行政区 沙田)

2016-06-01 收到

[†] email: qizhou@phy.cuhk.edu.hk

DOI: 10.7693/wl20160604

Contact and universal relations in dilute quantum systems

HE Ming-Yuan ZHOU Qi[†]

(Department of Physics, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, Hong Kong SAR, China)

摘要 对接触量和普适关系的发现是超冷原子物理中的一个重大理论突破。自檀时钠于2005年首次指出接触量这个概念以来,对普适关系的研究已经成为超冷原子物理中的一个重要课题,并对其他相关的领域产生了重大的影响。文章介绍了什么是接触量和普适关系,以及普适关系的来源,并讨论在这个研究方向上最新的一些进展,包括高分波散射的接触量和接触量谱。

关键词 超冷原子物理, 接触量, 普适关系

Abstract The discovery of contact and universal relations is a breakthrough in the field of ultracold atom physics. Since S. Tan first pointed out the concept of contact in 2005, the study of universal relations has become an important subject regarding ultracold atoms, and has had a significant impact on related fields. This article gives an introduction on what are contact and universal relations, and their origins. Recent new developments including contact in high partial wave scattering and contact spectrum are also discussed.

Keywords ultracold atoms physics, contact, universal relations

1 引言

自1995年在实验室里实现第一团玻色—爱因斯坦凝聚体以来,超冷原子物理在20年内迅速发展。涡旋晶格、费米超流、BEC—BCS演变、光晶格、冷极化分子、超冷原子拓扑态等是其中具有代表性的一些进展。这些重要进展背后的一个重要因素是超冷原子系统的高度可控性。包括散射长度、系统维度、原子和外加光场的作用等在内的各种微观参数可以在很大范围内被调节。因

此,物理学家可以利用超冷原子这样一个平台去探索其他物理系统中难以获得的参数空间,或者去实现一些崭新的物理现象。另一方面,跟其他量子系统相比,超冷原子具有一个独特的性质——尺度分离。跟电子之间的长程库仑相互作用不同,中性原子之间的相互作用是短程的范德瓦尔斯势。当原子之间的距离大于范德瓦尔斯长度 r_0 以后,原子之间的相互作用变得很弱,在很多问题中可被忽略。同时,超冷原子系统非常稀薄。如果用费米动量的倒数 k_F^{-1} ,来刻画原子之间的平均距离,我们发现, k_F^{-1} 一般比 r_0 大一到两个数量级。因此,我们可以认为, $k_F r_0 \ll 1$ 。

*香港研究资助局(Hong Kong Research Grants Council/General Research Fund)(批准号:14306714)资助项目

这就是所谓的尺度分离(length scale separation)。这样一个看似简单的尺度分离却给我们带来了新的物理规律,即量子稀薄系统中通过接触量而建立的普适关系。

2 什么是接触量和普适关系

2005年,当时还在芝加哥大学物理系念博士的檀时钠在arxiv.org上载了几篇文章,其中包括*Energetics of a strongly correlated Fermi gas*, arXiv:cond-mat/0505200; *Large momentum part of fermions with large scattering length*, arXiv:cond-mat/0508320。这些文章指出,在有接触相互作用的二分量费米子体系中,存在一系列优美而深刻的普适关系。这些普适关系把很多看起来并不相关的物理量通过简单的方程联系起来。所谓的接触相互作用,是指只有当两个粒子的空间坐标完全一致的时候,它们之间才具有相互作用。这是针对稀薄系统中的短程相互作用的一个理想模型近似。在这些普适关系里,最重要的一个物理概念是接触量。接触量描述在短程范围内同时发现两个粒子的几率。檀时钠发现,在这样一个理想模型中,无论系统温度、相互作用强度或者其他微观参数如何被调控,通过接触量建立起来的这些普适关系严格成立。随着时间的推移,接触量和普适关系的重要性逐渐被越来越多的物理学家所意识到。2008年,前文所提到的两篇文章和同作者的另外一篇文章(*Generalized virial theorem and pressure relation for a strongly correlated Fermi gas*, arXiv:0803.0841)被一起发表在*Annals of Physics*上^[1-3]。这三篇文章已经成为超冷原子物理领域的重要文献,并被广泛引用。

具有s波散射的二分量费米子体系也可以被看成一个赝自旋-1/2的费米子体系。具有相同自旋的粒子之间没有相互作用,具有不同自旋的粒子之间的作用由Huang—Yang赝势 $U(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r$ 描写,其中, M 是粒子的质量, a_s 是s波散射长度^[4]。以下是在此系统中几个基本的普适

关系:

$$n_\sigma(\mathbf{k}) \rightarrow \frac{C}{k^4}, \quad \sigma = \uparrow, \downarrow, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1)$$

$$\left. \frac{dE}{d(-1/a_s)} \right|_S = \frac{\hbar^2 \Omega}{4\pi M} C. \quad (2)$$

$$E_{\text{in}} = \sum_{k\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \left(n_{k\sigma} - \frac{C}{k^4} \right) + \frac{\hbar^2 \Omega C}{4\pi a_s M}. \quad (3)$$

(1)式中, $\sigma = \uparrow, \downarrow$ 是自旋指标。(1)式告诉我们,当动量大于此系统中一切特征动量尺度时,动量分布 $n_\sigma(\mathbf{k})$ 趋向 $1/k^4$ 。这样的一个幂次律的幅度正比于接触量 $C = \Omega C$, Ω 是系统的体积, C 是平均接触量密度。(2)式中, E 是系统的能量, S 是系统的熵。(2)式告诉我们,如果保持熵不变,也就是在所谓的绝热条件下,将系统的能量对散射长度的倒数取微分,所得到的值也恰好对应于接触量 C 。需要指出的是,如果单独看(2)式本身,它可以被认为只是一个定义。但神奇的是,这样一个通过对能量求微分得到的物理量,却也出现在(1)式中关于动量分布的渐近形式里面。所以,从(1)和(2)式可以看出,接触量 C 把看起来毫无关系的两个物理量联系了起来。

(3)式表示的是能量泛函(energy functional),即系统的内能 E_{in} 可以写成关于动量分布的泛函。在所有的普适关系中,(3)式具有特殊的意义。即便我们不知道或者是还没有推导出其他任何的普适关系,(3)式本身也应该引起我们特别的重视。在此,我们不对(3)式的来源做推导,而侧重于讨论它的物理意义。根据(1)式,我们如果要计算系统的动能, $E_{\text{kin}} = \sum_{k\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} n_{k\sigma}$,并注意到对 k 的求和可以改写为 $\frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k$,显然会得到一个发散的结果。追溯源由,我们发现前文提到的接触相互作用只是实际系统中短程相互作用的一个近似。对短程相互作用来说,我们可以定义一个特征的长度 r_0 。当粒子间的距离 r 大于 r_0 的时候,相互作用消失。但当 $r < r_0$ 的时候,粒子间的相互作用由实际系统的微观物理决定。实际体系的动量分布只有在区间 $k_F \ll k \ll r_0^{-1}$ 内具有(1)式的渐近行为。当 $kr_0 \gg 1$ 时,真实的动量

分布衰减得比 $1/k^4$ 快得多, 所以实际上动能并不存在发散。但问题是, 我们往往不能精确地知道在 $r < r_0$ 这样的极小范围以内, 粒子间相互作用的所有细节, 所以无法严格计算当 $k \gg r_0^{-1}$ 时的动量分布。同时, 在这样大动量的范围以内, 布居数 $n_{k\sigma}$ 已经变得很小, 我们往往无法在实验上精确测量这样一个很弱的信号。因此, 一个自然的方案就是, 把在 $k_F \ll k \ll r_0^{-1}$ 范围内得到的幂次律推广到 $k \rightarrow \infty$ 。这就是(1)式的来源。

当了解到发散的来源后, 解决此发散的一个很简单的办法就是在动量分布中, 扣除这样一个幂次律。那么关于总动能的求和就变成: $E_{\text{kin}} = \sum_{k\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \left(n_{k\sigma} - \frac{C}{k^4} \right)$ 。正因为(1)式在大 k 极限下, $n_{\sigma}(k)$ 和 C/k^4 互相抵消, 这个求和自然地变得有限, 这就解决了前文提到的发散问题。但随之而来的一个问题是, 这样一个求和有物理意义? 尽管此求和本身似乎并不代表任何有物理意义的量, 檀时钠指出, 只要在此积分的基础上, 再加上一项正比于 C 的量, $\frac{\hbar^2 C}{4\pi a_s M}$, 那么新得到的物理量正好就是总内能! 这是一个远远超出一般想象力的结果。因此, (3)式在数学表达形式上干净明了, 同时具有深刻的物理意义。

3 普适关系的来源

在最近几年内, 关于接触量和普适关系的研究方兴未艾。一方面, 实验上已经直接证明了很

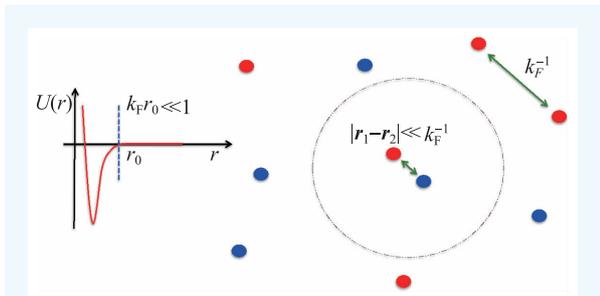


图1 红色和蓝色实心圆分别代表赝自旋向上和赝自旋向下的原子。左图的曲线代表一对赝自旋向上和赝自旋向下的原子间的短程相互作用

多普适关系^[5-8]。另一方面, 一些新的普适关系不断被发现, 比方说结构因子, rf 谱, 在外势阱中关于单粒子能级占据数的能量泛函以及二维系统中的普适关系等^[9-14]。所有这些普适关系正是来源于前文所提及的尺度分离, $k_F r_0 \ll 1$ 。

如图1所示, 在这样稀薄的量子体系中, 当两个粒子之间的距离远小于粒子之间的平均距离时, 其他粒子基本上不能影响这两个粒子的运动。这两个粒子的相对运动在这样的短程范围以内, 完全由它们自己之间的相互作用决定。描述它们相对运动的波函数遵循一个简单的单体问题的薛定谔方程。这样一个简单的观察结果, 实际上已经告诉了我们一个深刻的物理规律。在一个多体稀薄系统中, 无论粒子的数目是多少, 无论粒子之间的相互作用强度是多少, 也无论系统的状态如何复杂, 多体波函数一定要满足如下的渐近行为:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \xrightarrow{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \ll k_F^{-1}} \phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) G(\mathbf{R}_{ij}). \quad (4)$$

在方程(4)中, N 是总粒子数, \mathbf{r}_i 是第 i 个粒子的坐标, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ 是第 i 个和第 j 个粒子的相对坐标, $\phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ 是它们相对运动的波函数, $\mathbf{R}_{ij} = \{(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2, \mathbf{r}_{k \neq i, j}\}$ 包括第 i 个和第 j 个粒子的质心位置和其他所有粒子的坐标。 $\phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ 满足单体薛定谔方程:

$$\epsilon \phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \left[-(\hbar^2/2\mu) \nabla_{ij}^2 + U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right] \phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (5)$$

式中 $U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ 是二体短程相互作用势, $\mu = M/2$ 是约化质量, ϵ 是相对运动的能量。对于接触势的情况, $\phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 1/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| - 1/a_s$ 。因为方程(4)右边只描述多体波函数的渐近行为, $\phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ 本身不需要满足归一化条件。同时, $G(\mathbf{R}_{ij})$ 包含所有多体物理的信息, 并决定所有依赖 $\phi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ 的物理量的强度。从方程(4)出发, 接触量可以被定义为

$$C = (4\pi)^2 N(N-1) \int d\mathbf{R}_{ij} |G(\mathbf{R}_{ij})|^2, \quad (6)$$

其中, $d\mathbf{R}_{ij} = \prod_{k \neq i, j} d\mathbf{r}_k d(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2$ 。从(4), (5), (6)式出发, 我们可以很自然地推导出包括(1), (2), (3)式在内的一系列普适关系。具体的数学推导可参

见文献[15, 16]或其他一些等价的推导[17, 18]。

4 高分波散射的普适关系

原始的普适关系关心的是具有s波散射的系统。这是一个很自然的考虑,因为在低温下,高分波散射的强度远弱于s波散射。但在最新的一些工作中,高分波散射也开始被研究^[19-22]。文献[22]指出,这主要是基于三方面的考虑。其一,稀薄量子系统中的尺度分离适用于任何短程相互作用。所以普适关系的成立不依赖于系统里具有的是s波散射,p波散射或其他的高分波散射;其二,在超冷原子体系中,可以利用高分波的Feshbach共振来增强p波或者其他高分波散射的强度;其三,有些重要的多体系统里,s波的接触量被抑制,甚至完全消失。在这样的情况下,高分波的接触量和由它决定的高分波散射中的普适关系变得更加重要。

对于具有一般短程相互作用的稀薄体系,方程(4)可以被推广为更加普遍的形式。为简化公式和符号,我们在此讨论单组分的原子体系:

$$\Psi_{3D} \xrightarrow{|\mathbf{r}_j| \ll k_F^{-1}} \sum_{lm} \int d\epsilon \phi_{lm}(\mathbf{r}_j; \epsilon) G_{lm}(\mathbf{R}_j; E - \epsilon), \quad (7)$$

其中二体相对运动波函数 $\phi_{lm}(\mathbf{r}_j; \epsilon)$ 可以写成如下形式:

$$\phi_{lm}(\mathbf{r}_j; \epsilon) \sim \left\{ j_l(q_\epsilon |\mathbf{r}_j|) - \tan[\eta_l(q_\epsilon)] n_l(q_\epsilon |\mathbf{r}_j|) \right\} Y_{lm}(\mathbf{r}_j / |\mathbf{r}_j|), \quad (8)$$

以上两式中, l 是角动量量子数, m 是磁量子数, $\epsilon = \hbar^2 q_\epsilon^2 / M$ 是相对运动的能量, $j_l(x)$ 和 $n_l(x)$ 分别表示第一类和第二类球 Bessel 函数, $Y_{lm}(\mathbf{r}_j / |\mathbf{r}_j|)$ 是球谐函数, $\eta_l(q_\epsilon)$ 是相移(phase shift)。对于玻色子和费米子, l 分别取偶数和奇数。在多体体系里,任何一对粒子的相对角动量和能量都不是守恒的,所以方程(7)的右边必须包括对角动量的求和以及对能量的积分。相应地,高分波的接触量可以被定义为^[22]

$$C_{lm} = (4\pi)^2 N(N-1) \int d\mathbf{R}_j \left| \int d\epsilon G_{lm}(\mathbf{R}_j; E - \epsilon) \right|^2. \quad (9)$$

从以上两个式子出发,我们可以推导出一系列的高分波散射的普适关系。作为例子,我们在此讨

论p波的动量分布。从方程(7)出发,用类似推导s波动量分布的方法,可以得到p波在大 k 极限下的动量分布^[21, 22]:

$$n(\mathbf{k}) \rightarrow (k^{-2} C_{1m} + k^{-4} C_{1m}^1) \left| Y_{1m}(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|) \right|^2, \quad (10)$$

其中,

$$C_{1m}^1 = 32\pi^2 N(N-1).$$

$$\text{Re} \left\{ \int d\mathbf{R}_j \int d\epsilon q_\epsilon^2 G_{1m}(\mathbf{R}_j; E - \epsilon) \int d\epsilon G_{1m}^*(\mathbf{R}_j; E - \epsilon) \right\}. \quad (11)$$

跟s波相比,p波的动量除了 $1/k^4$ 的渐近行为以外,还具有额外的一项, $1/k^2$ 。显而易见,在大 k 极限下, $1/k^2$ 更为重要。并且, $1/k^4$ 和 $1/k^2$ 都会导致能量的发散。因此,在能量泛函里,这两项都需要被消去,从而导致^[22]

$$E_m P_{r_0} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \left[n(\mathbf{k}) - \left(\frac{C_{1m}}{k^2} + \frac{C_{1m}^1 f_1^1(kr_0)}{k^4} \right) \left| Y_{1m} \left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \right|^2 \right] + \frac{\hbar^2 r_0^{-2}}{32\pi^2 M} \frac{C_{1m}}{a_1} - \frac{\hbar^2 r_0^{-2}}{64\pi^2 M} r_1^\circ C_{1m}^1 + O((k_F r_0)^2), \quad (12)$$

其中 $f_1^1(kr_0) = 1 - j_0(kr_0)/2$, $P_{r_0} = 1 - N(N-1)I_{r_0}/2$, I_{r_0} 表示二体波函数在区间 $|\mathbf{r}_j| < r_0$ 内的比重, a_1 和 r_1° 分别是p波散射的散射长度和有效距离(effective range)。跟s波的能量泛函相比,上式具有以下一些新的特征:其一,为了消除能量的发散,p波大 k 极限下的动量分布渐近展开必须至少保留前两项;其二,不同于s波相移的低能展开中只有散射长度主导,对于高分波散射,有效距离 r_1° 变得不可忽略,它直接出现在能量泛函中;其三,等号的左边,对于s波波函数在短程相互作用势阱中的比重可以忽略不计, $P_{r_0} \approx 1$,但对于p波,波函数在短程相互作用势阱中的比重不可被忽略,否则会导致总几率的发散。所以,对于高分波散射, P_{r_0} 必须保留下来。最近的实验已经观测到了p波的接触量,并验证了一些p波的普适关系^[19]。

5 接触量谱

除了单独考虑某一个分波的接触量之外,我

们还可以把所有分波的接触量放在一起考虑，从而定义接触量谱为^[22]

$$\{C_{00}, C_{1-1}, C_{10}, C_{11}, \dots\}, \quad (13)$$

在二维系统里，我们也可以定义相应的接触量谱：

$$\{C_0, C_1, C_2, \dots\}. \quad (14)$$

上面两式中的下标是角动量的量子数。相对于任何一个单独的分波接触量，接触量谱能更全面地体现多体波函数在短程范围内的渐近形式，并能反映多体系统中的关联。如果考虑一个总角动量守恒的三维体系，动量分布的一般形式为

$$n(\mathbf{k}) = \sum_{lm} n_{lm}(k) |Y_{lm}(\mathbf{k}/k)|^2, \quad (15)$$

$$n_{lm}(k) \xrightarrow{k_F \ll k \ll r_0^{-1}} C_{lm} k^{2l-4} + \sum_{s=1}^l C_{lm}^s k^{2l-4-2s}, \quad (16)$$

这里的 C_{00} 正比于前文讨论过的 s 波接触量，两者通过 $C = C_{00} |Y_{00}(\mathbf{k}/k)|^2$ 联系起来。 C_{lm}^s 表征不同幂次律分布的幅度。方程(7)的右边其实已经暗示了一对粒子相对运动的角动量是如何在不同的分波频道里分布的。接触量谱正好定量地反映了这样的分布。一个简单的例子是，如果某个角动量为 l 的分波所对应的权重正好为零，那它相对应的接触量也必须为零。最近的研究指出，在现代凝聚态物理中很重要的一类强关联体系——分数量子霍尔态里，一些低分波的接触量必须为零，或者远小于高分波的接触量^[22]。这反映了在分数量

子霍尔态这样一类具有很大总角动量的强关联系统里，任何一对粒子相对运动都是和系统的其他粒子强烈纠缠，从而携带的角动量的分布必须满足一定的条件。这样的纠缠超出了任何一个单独的分波接触量所能描述的范畴。如果考虑总体的接触量谱，并通过对接触量谱进行测量，我们将不仅能探测分数量子霍尔态本身，而且能直接测量在角动量空间的某一类纠缠谱。这样我们就能建立强关联体系中少体问题和多体关联的一个直接联系。关心相应细节的读者可查阅文献[22]。

6 结束语

我们已经看到，稀薄量子体系里一个简单的尺度分离可以导致丰富而深刻的物理。关于接触量和普适关系的研究正在蓬勃发展。我们有理由相信，目前发现的只是冰山一角。在不久的将来，物理学家会揭示稀薄量子体系里更多的新现象和新规律。

致谢 感谢檀时钠教授建议使用“接触量”作为 contact 一词的中文名字，并建议使用不同符号来区分“接触量”和“接触量密度”。

参考文献

- [1] Tan S N. *Ann. Phys.*, 2008, 323:2952
- [2] Tan S N. *Ann. Phys.*, 2008, 323:2971
- [3] Tan S N. *Ann. Phys.*, 2008, 323:2987
- [4] Huang K, Yang C N. *Phys. Rev.*, 1957, 105:767
- [5] Stewart J T, Gaebler J P, Drake T E *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104:235301
- [6] Wild R J, Makotyn P, Pino J M *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 108:145305
- [7] Sagi Y, Drake T E, Paudel R *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 109:220402
- [8] Kuhnle E D, Hoinka S, Dyke P *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 106:170402
- [9] Palestini P A, Pieri P, Strinati G C. *Phys. Rev. A*, 2010, 82:021605
- [10] Enss T, Haussmann R, Zwerger W. *Ann. Phys.*, 2011, 326:770
- [11] Chen Y Y, Jiang Y Z, Guan X W *et al.* *Nat. Commun.*, 2014, 5:5140
- [12] Anderson E R, Drut J E. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 115:115301
- [13] Tan S N. *arXiv*:2005.0505615v1
- [14] Tan S N. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, 107:145302
- [15] Werner F, Castin Y. *Phys. Rev. A*, 2012, 86:013626
- [16] Werner F, Castin Y. *Phys. Rev. A*, 2012, 86:053633
- [17] Zhang S Z, Leggett A J. *Phys. Rev. A*, 2009, 79:023601
- [18] Braaten E, Platter L. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 100:205301
- [19] Luciuk C, Troitzky S, Smale S *et al.* *Nat. Phys.*, 2016, 12:599
- [20] Yoshida S M, Ueda M. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 115:135303
- [21] Yu Z H, Thywissen J H, Zhang S Z. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 115:135304
- [22] He M Y, Zhang S L, Chan H M *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 116:045301