物理学咬文嚼字之七十八
Reciprocity——对称性之上的对称性

曹则贤†
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2016－06－29收到
† email: zxcao@iphy.ac.cn
DOI: 10.7693/wl20160708

往而不来，非礼也；来而不往，亦非礼也。
——《礼记·曲礼上》

光亮是黑暗的驱逐者，阴影是光线的阻碍者。
——达芬奇

凡是涉及实在的数学定律都是不确定的，凡是确定的定律都不涉及实在。
——爱因斯坦

摘　要　互反关系是两对象之间的一种常见关系。各种不同的 principles of reciprocity 和 reciprocal relations 表明 reciprocity 还真是数学和物理中的一条基本原则，一种对称性之上的对称性。

1　引子

日常生活中常见的词才是数学物理中最基本的概念，比如，波和流[1)]。另一个常见的词是 reciprocity，这个词及其变形 reciprocal，reciprocating，reciprocative，reciprocate，reciprocation，reciprocalness，reciprocality 等充斥数学、物理以及其它各种文化语境。Principle of reciprocity 我愿意说它甚至是一条大自然遵循的基本原则——至少在我们构造的物理学中显得好象是这样的。各种reciprocal relations 彰显了 it is a symmetry over symmetry ——一种对称性之上的对称性。

Reciprocal 一词来自拉丁语 reciprocus，动词形式为 reciprocare。其词干为 reco-prokos，本意就是 backwards and forwards，汉语的有来有往、互反(返)、互逆、往复等词汇大概能传达其意思，常见表述如 reciprocal respect(互相尊重，法语为 réciprocité du respect)，a reciprocity treaty (互惠条约)都可以这样理解。在进化生物学中，有 reciprocal altruism (互返的利他主义)的概念，一个生命体会为了对方的好处肯牺牲自己，期待它时能从对方再得到补偿(图1)，这与狼狈为奸还是有区别的。在英文语法中，each other 传统上被称为 reciprocal pronoun (互反介词)。一般用法中，reciprocal 强调的是一种相互依赖关系或者相互影响，比如“Minkowski and Hilbert would exercise a reciprocal influence over each other(闵可夫斯基和希尔伯特各自都影响了对方)”；少数时候 reciprocal 强调的是一种反过来的情形，如“He did prove indeed that wave mechanics is contained in matrix mechanics, but not the reciprocal(他(薛定谔)证明了波动力学存在于矩阵力学中，而不是反过来的情形)”[2)]，或者就是倒逆关系，如“Mach points out that the Third Law really amounts to a definition of mass. Mass comes out as ‘reciprocal acceleratability’(马赫指出第三定律等同于质量的定义。由其得到的质量是可加速性的倒数)”[1]。Reciprocal 有时也就是 opposite 的意思，如“Wheeler’s theory proposes a connection between the inner realm of consciousness (mind) and its reciprocal, the external world of the

1) 任何随时间和空间变化的物理量一概被当成了波，而几乎所有的物理学方程本质上都是流方程。——笔者注

2) 这句话的确切含义是说薛定谔没证明矩阵力学包含在波动力学中。——笔者注

senses (Universe)。(惠勒的理论提议了一种在意识的内在王国(思维)与其对立面，即感觉的外在世界(宇宙)，之间的联系)”[2]。动词 reciprocate 较少见，大意为返还、回报的意思，如“His feeling was never reciprocated.” Reciprocal (reciprocity)，法语为 réciproque(réciprocité)，德语为 reziprok (Reziprozität)，用法相同。

2 一种文学趣味

文学表达会采用一些结构定式。比如“卑鄙是卑鄙者的通行证，高尚是高尚者的墓志铭(北岛《回答》)”——这种定式中，一对反义词各自平行展开。如果将一对反义词各自映射到对方，这样的定式，就是 reciprocal 表达方式，请原谅我不知道它的语法或者修辞学命名。这样的句子俯拾皆是，比如“猪是否快乐得象人，我们不知道；但是人会容易满足得象猪，我们是常看见的。——钱钟书《论快乐》”，“宇宙内事即己分内事，己分内事即宇宙内事——(陆九渊)”。有些现象就是有这样的倒易关系：有一种豆，在荷兰叫中国豆，在中国则叫荷兰豆；河边会飞过几只海鸥，海边也会飞过几只河鸥。中国的诗词中也常见这种 reciprocal 关系的句子，如[[宋]卢梅坡《雪梅》中的“梅须逊雪三分白，雪却输梅一段香”，[元]刘时中《山坡羊·侍牧庵先生西湖夜饮》中的“碧天夜凉秋月冷。天，湖外影；湖，天上景”，不一而足。

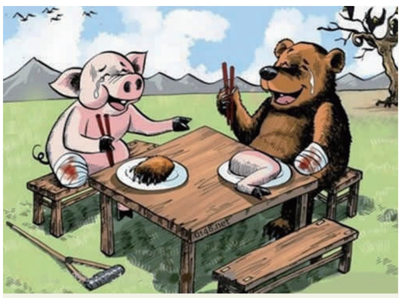

图1 Reciprocal altruism，一种聪明而心酸的生存智慧

图2 罗马人的聚会：吐了吃，吃了吐

西方语文也深谙此道。A cat at its best is a young girl；a young girl at her best is a cat (猫儿可爱至极点就是少女，少女可爱到极点就是只猫儿)，这是日常表述中的俏皮。至于奥维德(Publius Ovidius Naso)的“逃避追逐我者，追逐逃避我者”，卡萨诺瓦(Giacomo Casanova)的“我反复发现我的个性中鲜有智慧，智慧中鲜有个性(…with too little intelligence for my character and too little character for my intelligence)”，尼采(Friedrich Nietzsche)的“健康作为疾病的值判断，疾病作为健康的值判断”和“对思想家来说太安分的生存，对生存者是太疯狂的思想”，布考斯基(Charles Bukowski)的“这个世界的最大问题就是愚蠢的人总对自己的想法抱有自信而聪明人总是满怀疑虑”，显然智者们也把这 reciprocal 表述当作一种有效的智慧释放方式。笔者印象最深的是拉丁语的“Vomunt ut edant, edunt ut vomant(吐了吃，吃了吐)”(图2)，这俏皮又智慧的表达似乎能激起人们对古罗马荒淫生活的厌恶。简单的六个字，胜过史书的千言万语。

Reciprocal relation 也是曹雪芹安排红楼梦情节的手法。尤氏代王熙凤处理贾琏的奸情，结果是鲍二家的上吊自尽了。若是用 reciprocal relation 的角度去看，贾珍与秦可卿之死有关，秦可卿判词上有一幅美女上吊的插图也就可以理解了。王熙凤把秦可卿的丧事办得滴水不漏，尤氏干净利落地处理了贾琏的奸情乃尤氏回报王熙凤的恩情，也就是了。这些故事情节间遵循 reciprocity 原则的铺排，也亏曹雪芹有这个本事。

3 倒数

在数学中，$y=1/x$ is the reciprocal of x，汉语称$y=1/x$是x的倒数。倒数的翻译未能反映 reciprocal 中“相互的”的意思，x也是$1/x$的倒数。简单的倒数关系就可以给出很有趣的数学，比如极坐标下的倒数关系$r=k/\theta$，其图像被称为双曲[3)]螺线(hyperbolic spiral)，其实也称为 reciprocal spiral，因为它就是阿基米德螺线，方程为$r=k\cdot\theta$，的逆曲线(函数互为倒数)。

Reciprocal，愚以为和共轭有关。如果我们愿意把x，y看作是有量纲的物理量，则如果x的量纲为L，那y的量纲就是L^{-1}，关系$x\cdot y=1$表明x，y是关于一个无量纲量共轭的。在群论中，有关系式$g_i g_j=e$，也可写成$g_i=g_j^{-1}$，此关系和$x\cdot y=1$类似。群同时包含元素g_j和$g_i=g_j^{-1}$反映群的结构。笔者曾在不同场合强调过，力学体系是以关于作用量共轭的变量对加以组织的，而热力学是以关于能量共轭的变量对加以组织的，这是热力学与力学不同的

3) 什么双曲？*Hyperbolic* 是说话有点过头的意思。——笔者注

地方。

对于两项乘积，其倒数或者逆一般地为 $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$。对于群元素的积有 $(g_i g_j)^{-1}=g_j^{-1}g_i^{-1}$，矩阵积有 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，以及相继执行的两个算符有 $(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}$，逆关系都因为它们本质上的相同而形式上相同。

复数 z 是二元数，其 reciprocal 比实数的倒数有更多的信息，$f(z)=1/z$ 被称为 the reciprocal map，是处处保角的变换。对于内积空间中的矢量 q 来说，the reciprocal of q 定义为 $q^{-1}=q^*/|q|^2$，其中 $|q|$ 是矢量 q 的模，而 q^* 是其对偶矢量(此处 reciprocal 与 dual 有关)。显然，倒数(reciprocal)的复杂性依赖于数的形式。

对于由级数定义的函数，比如黎曼 zeta-函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，其中变量 s 是复数，该函数的倒数也可以表示为级数形式：$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$，其中的 $\mu(n)=(1，-1，0)$ 为莫比乌斯函数，分别对应 n 是有偶数个质数因子但不含平方数因子；有奇数个质数因子但不含平方数因子；有平方数因子这三种情形。看到有人能发现这样的函数，实在佩服。

在实验和物理理论使得有必要引入洛伦兹变换(属于球几何的内容)之前，就有关于球到球变换的变换群和球几何的研究了，那里就有 reciprocal 的内容，比如 Möbius 几何中的 transformation by reciprocal radii 和 Laguerre 几何中的 transformation by reciprocal directions。这些都是 Lie 球几何的特例[3]。Transformation (mapping) by reciprocal radii，半径倒数变换(映射)，是 inverse geometry 里的对象，显然这里的 reciprocal 会和 inversion(反演)相联系。关于半径为 r_0 之圆的反演是这样的：圆外某点 P，距离圆心 O 为 r；连线 OP 上有点 P'，距离圆心 O 为 r'；若 $r'=r_0^2/r$，则说点 P 反演到点 P'(图 3)。关系 $r'=r_0^2/r$ 写成笛卡尔坐标，为 $x'=\frac{r_0 x}{x^2+y^2}$，$y'=\frac{r_0 y}{x^2+y^2}$。电磁学里的镜像法就用到了半径倒数变换(映射)。

镜像法(method of mirror image)，电磁学上会具体为镜像电荷法(method of image charges)，是解微分方程的一个工具，此方法中解函数的定义域被扩展了，添加了原定义域关于一个超平面的镜像。其要求是，这样做使得因为镜像的存在边界条件自动得到满足。考虑导体球外一电荷 q 所产生的电势，假设该电荷对导体球的感应作用(球上有感应电荷)等价于某个 q'(有时是某些个电荷)，要求电荷和镜像电荷产生的电势满足特定的边界条件。比如，若导体球接地，$\Phi_{\text{sphere}}\equiv 0$，此时假设有一镜像电荷 q' 在球内，且在电荷 q 和球心连线上，$r'=r_0^2/r$，$q'=-r_0 q/r$，就能满足球面上 $\Phi_{\text{sphere}}\equiv 0$ 的条件。又，若导体球为悬浮的，$\Phi_{\text{sphere}}\equiv \text{const.}$，其上感应电荷应为零。由上个问题的解，再加一个在球心处的正电荷 q''(加在球心可确保整体效果是球面上再加上一个对称分布的电势)，$q''=-q'=r_0 q/r$，就能满足球面上感应电荷为零且电势为恒定值的条件。

4 对立量与可逆性

Reciprocal 有 opposite 的意思，这在谈论复数和可相抵消的物理量时会遇到。“Magnitudes which are **opposed** to **each other** in this way **reciprocally** cancel an equal amount in **each other**(这种互为对立面的特征抵消对方同样的量)”，这让人想起同样数量的两种极性电荷间的中和以及同等数量的正反物质之间的湮灭。在谈论负的物理量时，记得 reciprocal 一词对于正确理解相关内容是有益的。物理量的抵消伴随一些可逆过程，因此 reciprocity 和 reversibility 有关。克拉贝隆定义的卡诺循环中的可逆过程，其关键处是“逆过程进展 reciprocally，且遵循同样的规律；其把原过程中产生的作用给 reciprocally 吸收了，且是以同样的数值”[4]。原过程消耗高温热源的热量 Q_1，向低温热源注入热量 Q_2，并做功 Q_1-Q_2，可逆的反过程则消耗低温热源的热量 Q_2，向高温热源注入热量 Q_1，并要求外界做功 Q_1-Q_2。这是对可逆过程的宏观描述，而可逆循环中的可逆过程，其每一个微小步骤都是可逆的，是可用微分描述的。

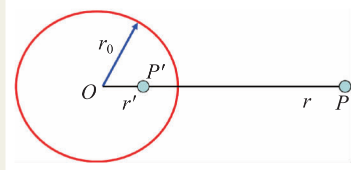

图 3 关于球面的半径倒数变换，$r'=r_0^2/r$

5 数学中的互反关系

数学中，reciprocal 或者 reciprocity 常指向一种互反关系，比如 quadratic reciprocity(二次互反律)。考察恒等式 $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\,q)$，$x^2\equiv q(\mathrm{mod}\,p)$，$p$，$q$ 是奇素数，这里 q，p 调换了角色，此乃 reciprocity 的本意。二次互反律指出除了 p，q 都是除以 4 余 3 的数以外，这两个恒等式要么同时有解要么同时无解。二次互反律由欧拉 1783 年第一次提

出，高斯1796年第一次给出正确证明。高斯一人就给出过关于二次互反律的7、8种证明[5]。据说二次互反律目前有200种不同的证明，有兴趣的读者可以研究研究。类似quadratic reciprocity，关于恒等式 $x^3 \equiv p(\bmod q)$，$x^3 \equiv q(\bmod p)$ 解之间的关系就是 cubic reciprocity(三次互反律)。

贝叶斯(Thomas Bayes，1701—1761)定理反映的也是一种互反关系。贝叶斯定理是统计中一条关于条件概率的重要定理，$P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{A})/P(\mathrm{B})$，它也能写成 $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{B})/P(\mathrm{A})$ 的形式，这两个表述之间的 reciprocity 可以说是一目了然。这两个条件概率成立是因为 $P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ 的原因。这里，$P(\mathrm{A})$，是事件发生的概率，$P(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ 是两事件同时发生的概率，$P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ 是条件概率[6]。

6 简单的往复运动

机械运动包括四种：rotary motion(转动)，linear motion(线性运动)，reciprocating motion 和 oscillating motion(摆动，振荡)。Oscillating motion 是如挂钟钟锤那样从一边到另一边的来回摆动。Reciprocating motion4)，汉译往复运动，一般是指在一条线上的来回运动但有时又不限于如此。往复运动见于reciprocating engine(往复式引擎)，其中活塞的前后运动导致了曲柄的转动进而带动轮子的转动。当然了，reciprocally，转动也可以转化为reciprocating motion(图4)。这个圆周运动和往复运动间的互相转化是热机驱动世界的基础。第二次工业革命的基础发电机和电动机之间也是reciprocal关系。在如下这句“At microscopic length scales and therefore at low Reynolds numbers, reciprocal motion is absent as a potential means of locomotion(在微观尺度上，因此是在小雷诺数条件下，缺乏作为驱动方式的reciprocal motion)”中，reciprocal motion似应译为反冲运动5)。

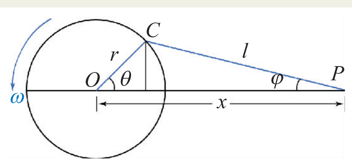

图4 若 CP 是硬连接，C 点在圆上的转动造成 P 点在水平轴上的往复运动

7 傅里叶分析、倒空间与倒格子

物理学中最重要的函数就是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ (所谓的振荡)和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ (波)了，其中 k 称为波矢，it has dimension of reciprocal length(量纲为长度的倒数)。The space of wave vectors is called reciprocal space(波矢所在的空间称为倒空间)。物理学研究物理量随时空的变化，将任意的函数 $f(\vec{r}, t)$ 作变换 $G(\vec{k}; \omega) = \int_V \mathrm{d}\vec{r} \int_0^\infty f(\vec{r}; t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\mathrm{d}t$，得到函数 $G(\vec{k}, \omega)$，ω 反映的是时间周期，所谓的波矢 $\vec{k}$ 反映的是空间周期。在空间任意一点上测量波动现象，得到的只是振动信号，表现为一个时间序列(time-series)。如何从测量到的时间序列构造出远处波源的信息，需要很多的理论、假设和计算，其可信度令人生疑。

法国人傅里叶(Joseph Fourier，1768—1830)在研究热传导时发现函数可以写成三角函数无穷级数和的形式，从而引出了傅里叶分析这门数学分支。函数 $f(x)$ 的傅里叶变换的形式为 $g(\vec{k}) = \int_\Omega f(\vec{r})\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^n r$，其逆变换为 $f(\vec{r}) = \int_{\Omega'} g(\vec{k})\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^n k$，$n$ 是空间的维度。傅里叶分析是知识的宝藏，包含太多的内容。比如，函数 $f(\vec{r})$ 的 support，即不为零的区域，同函数 $g(\vec{k})$ 的 support 之间存在互逆关系，这个互逆关系在物理中被演绎成了不确定性原理(uncertainty principle)，而高斯分布被拿来举例说明不确定性原理的正确性不过是因为高斯分布具有在傅里叶变换下形式不变的性质。物理学拿着个简单的数学内容反复刺激自己的想象力，想来也是可怜。

如果函数 $f(\vec{r})$ 是周期性分布的狄拉克 $\delta-$ 函数，这可以用来理想化对晶体中原子分布的描述，则函数 $g(\vec{k})$ 也是周期性分布的狄拉克 $\delta-$ 函数，也即构成一个晶格，称为倒格子(reciprocal lattice)，此乃对偶空间中的点阵。在物理学中，晶体对一束粒子的散射作为一级近似被当作傅里叶变换处理，透射电镜中获得的晶体电子衍射花样证明了这种近似的合理性。对于三维情形，设晶格结构的基矢为 $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$，即若在位置 $\vec{r}_0$ 上有晶体基元(motif)的话，则 $r = \vec{r}_0 + n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$ 的位置上也必有基元。倒格子的基矢由下式给出：$\vec{b}_1 = \dfrac{2\pi\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3}$，$\vec{b}_2 = \dfrac{2\pi\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3}$，$\vec{b}_3 = \dfrac{2\pi\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3}$。面心立

4) 洋人也闹不清 reciprocating motion 和 oscillating motion 之间该有啥区别。笔者猜测前者强调空间上的变化，后者更强调随时间的变化。——笔者注

5) 反冲常被用来翻译recoil，recoil=back+cul(culus，屁股)，译为后座力似乎更合适。——笔者注

方结构的倒格子是体心立方结构，而体心立方结构的倒格子是面心立方结构，简单立方或方格子的倒格子还是简单立方或方格子，这也是一种reciprocal relation。注意，一些教科书上把格子及其倒格子画到一起(图5)，是会引起误解的。倒格子和格子，它们不在一个空间里——倒格子定义在格子所在空间的对偶空间(dual space)里。虽然有$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$和$\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$，但其中涉及的算法不是一回事——一般的固体物理教科书弄不清这一点，所以常造成误解。Duality(对偶)，又是一个和reciprocity相关的概念。

8 电磁学、相对论中的reciprocity

Reciprocity关系在电磁学中表现最多、最震撼，那里充斥着耦合(coupling)，互感(mutual inductance)，交换(exchange)等容易联想到reciprocity的词。奥斯特发现电能产生磁。法拉第，中了牛顿的“作用等于反作用”的魔咒，坚信磁也能产生电，而且还真产生了电。

电磁学中很多形式的reciprocity基于角色互换而关系不变的意义上。比如，在静电学中有Green's reciprocity：设有电荷分布ρ_1和ρ_2，其产生的电势分布分别为ϕ_1和ϕ_2，分别满足方程$\nabla^2\phi_1 = -\rho_1/\varepsilon_0$，$\nabla^2\phi_2 = -\rho_2/\varepsilon_0$，则有互反关系$\int \rho_1\phi_2 \mathrm{d}v = \int \rho_2\phi_1 \mathrm{d}V$。此互反关系成立，是因为算符$\nabla^2$是厄密算符，$\int \phi_1(\nabla^2\phi_2)\mathrm{d}v = \int \phi_2(\nabla^2\phi_1)\mathrm{d}V$。对于内积空间，算符厄密性由关系$(\varphi, \hat{O}\psi) = (\hat{O}\varphi, \psi)$定义。

在电路层面，reciprocity存在于某处的振荡电流和另一处测量到的电场之间。一个天线既可以用于发射，也可以用作接收电磁波，其辐射和接收样式(radiation and receiving patterns)是相同的，这也是很酷的reciprocity。赫兹实现电磁波发射和验证的实验装置中，发射部分是和电路连起来的两个锌球，接收器则是简单地用一根导线连起来的两个锌球。在光学层面，最容易理解的reciprocity是对于光学系统的Helmholtz reciprocity：“你能看到我(的眼睛)，我也能看到你(的眼睛)”。

麦克斯韦方程组中的reciprocality，即变换的电场产生磁场，变换的磁场产生电场，意味着电磁波的存在。有人认为“Maxwell equation does not possess the symmetry expected of the reciprocity between magnetism and electricity(麦克斯韦方程不具有从电磁之间的reciprocity所期望的那种对称性)”，从而引入了磁荷(磁单极)的概念去把方程组弄成视觉效果上的对称，实在不是好物理。麦克斯韦方程组中方程所含项数不同(第四个方程多了位移电流一项)并不妨碍电磁之间的reciprocity，就像辐射场中电子跃迁的速率方程，项数不同不妨碍受激辐射和光吸收之间的reciprocity。Reciprocity is symmetry over symmetry，此为一例。

研究麦克斯韦波动方程的变换不变性，会得到洛伦兹变换。“This remarkable **reciprocity** of Lorentz transformation”，是感叹其逆变换也是洛伦兹变换。这是相对性的本意，也正是(变换)群的特征之一。洛伦兹变换构成群，群元素的乘法就能得到所谓的速度相加公式，进一步可得出光速c是(洛伦兹变换中)速度v的上限的结论。其实，光速c是这个变换里的一个标量常数，速度是表示相对运动的一

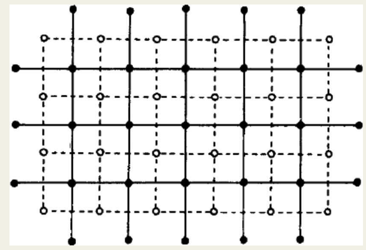

图5 方格子和它的倒格子

个矢量，虽然(作为矢量的)速度之值的上限是光速c，但把标量的光速c同相对运动速度放在一起讨论可能真有不合适的地方。

在狭义相对论的语境中，reciprocal出现的频率很高。如讨论孪生子佯谬时，两参照系间的时间比较应该是互逆的，“this situation is reciprocal for two frames”。又，在B点的钟与在A点的钟调同时了，则在A点的钟与在B点的钟也就同时了。This is reciprocality[7]。

9 理论物理中的互反定理

考察谐振子的哈密顿量$H=q^2+p^2$，其在$q \to p$，$p \to -q$变换或者$q \to p$，$p \to -q$变换下形式均不变。但是，在$q \to p$，$p \to -q$变换下哈密顿运动方程$\dot{q} = \partial H/\partial p$，$\dot{p} = -\partial H/\partial q$形式也不变(这变换同时让泊松括号不变)。对称变换就是一类特殊的保守运动方程的变换：它不只保守运动方程的形式，它还保守哈密顿量本身的形式。自这一个性质可得出一个引人注目的结果：一个对称变换的生成元，可称其为S，是一个守恒量。这是期待已久的对称性和守恒律之间的联系，这个联系是由女数学家Emmy Noether(1882—1935)证明的。这个对称性与守恒律联系的根源是一个漂亮的互反定理(theorem of reciprocity)：哈密顿量H是在生成元S产生的变换下的不变

量，此一事实意味着生成元S是在哈密顿量H产生的变换下的不变量：两个性质有同样的数学表述。但是哈密顿量H产生的变换是系统的时间演化，因此生成元S是一个不随时间变化的运动常数[8]。

在量子力学中，还有个简单的互反关系也被称为theorem of reciprocity，关系式$\left|\langle\xi'_1\ldots|\eta'_1\ldots\rangle\right|^2=\left|\langle\eta'_1\ldots|\xi'_1\ldots\rangle\right|^2$被诠释为：(一组)力学量$\xi$在(一组)力学量$\eta$具有本征值$\eta'$的状态中，其具有本征值$\xi'$的几率与(一组)力学量$\eta$在(一组)力学量$\xi$具有本征值$\xi'$的状态中具有本征值$\eta'$的几率相同。这其实是内积空间的基本性质[9]。

玻恩也试图基于reciprocity发展物理学，故有Born reciprocity的说法。上节中提及，对于经典的哈密顿方程$\dot{x}=\partial H/\partial p$，$\dot{p}=-\partial H/\partial x$，其在变换$x\to p$；$p\to -x$下是不变的。玻恩在上世纪四十年代注意到对自由粒子波函数的表述在变换$x\to p$；$p\to -x$下也是不变的。玻恩假设这样的对称性对于狭义相对论的四矢量也是成立的，即在变换$t\to -E$；$E\to t$下也是不变的。玻恩还参照狭义相对论的不变度规算符$x_k x^k$构造了八维“相空间”中的不变度规算符$x_k x^k+p_k p^k$ [10，11]。度规$x_k x^k+p_k p^k$在group of quaplectic transformations是不变的。玻恩的这套principle of reciprocity在经典力学和量子力学中并不总是成立，且由于数学层面上的困难，所以并没能走多远6)。在量子力学的视角下，还有这八个坐标中只有七个为算符的尴尬。

10 AB效应与AC效应

在AB(Aharonov—Bohm)效应中，绕通电线圈运动的带电粒子，其波函数获得一个与磁通量成正比的额外相位；在AC(Aharonov—Casher)效应中，带磁偶极矩的粒子绕带电粒子运动，其波函数获得一个正比于电荷的相位。这两种效应正好反着，表现出某种意义上的reciprocity。

11 昂萨格倒易关系

昂萨格(Lars Onsager，1903—1976)1931年因为发现了reciprocal relations而获得1968年的诺贝尔化学奖7)。昂萨格的互反关系式乃是不可逆过程热力学的基础，被誉为“热力学第四定律”。在偏离平衡态的系统中，考察同时出现的多种流与驱动力之间的比例关系。以热流和质量流为例，内能和粒子数各自关于熵的共轭强度量是$1/T$和$-\mu/T$，即$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}\mathrm{d}U+\left(-\frac{\mu}{T}\right)\mathrm{d}N$。热流和质量流单独出现时，或者说按定义，有$J_\mathrm{u}=kT^2\nabla(1/T)$；$J_\mathrm{n}=D'\nabla(-\mu/T)$；当两种驱动力同时出现时，形式上有

$$J_\mathrm{u}=L_\mathrm{uu}\nabla(1/T)+L_\mathrm{un}\nabla(-\mu/T),$$

$$J_\mathrm{n}=L_\mathrm{nu}\nabla(1/T)+L_\mathrm{nn}\nabla(-\mu/T).$$

方程右侧的系数是positive semi-definite and symmetric，即矩阵元不为负且矩阵是对称的，有等式$L_\mathrm{un}=L_\mathrm{nu}$。这就是所谓的昂萨格倒易关系[12]。昂萨格倒易关系是微观动力学可逆性的结果：平衡时任何类型的微观运动，其逆过程都有同样机会发生。昂萨格倒易关系的前驱包括开尔文爵士1854年得到的公式$\Pi=T\sigma$，其中σ是Seebeck系数，Π是Peltier系数[13]。Seebeck效应是温差引起电流的现象，而Peltier是电压差引起热流的现象。

人们早就注意到，物体的弹性、电、磁和热性质之间可以是耦合的。除了我们熟知的热电效应以外，还有比如磁电效应，指外加磁场引起电极化或者电场引起磁化[14]。此效应是居里于1894年在对称性这里特指(reciprocity)基础上提出的，而磁电是德拜1926年造的词[15]。一种外场引起非共轭的其它物性变化是一种普遍的现象，可以一般地加以考察。在一阶近似下，关于物性与驱动力之间有线性的本构关系$J=\sigma E$，若是多种驱动力同时作用激励多种流，则流与力之间由一个线性的输运系数矩阵相联系。一般地，此矩阵是对称的，此即前述的Onsager reciprocal relations。

可以作如下推导。从热力学主方程(cardinal equation)出发，把熵S也归入一般的力学广延量，则主方程的形式为$\mathrm{d}U=X_i\mathrm{d}Y_i$。力学广延量如电偶极矩对电场、压力和温度等刺激因素的线性响应可记为$Y_i=K_{ij}X_j$ 8)，系数K_{ij}反映物质的性质。由Legendre变换得到新的热力学势函数$\Phi=U-X_iY_i$，可得$\mathrm{d}\Phi=$

6) a)由粒子坐标和动量构成的空间是相空间，phase space；再加上一维的时间t则构成扩展的相空间。玻恩的这个相空间还要加上能量维度。b)所谓的quaplectic，是根据symplectic构造的。symplectic group是关于哈密顿方程的对称性。c)把一个新想法纳入一个理论体系，是非常困难的。在狭义相对论中，也许可以把$x_k x^k+p_k p^k$中的八个量同等对待，但在量子力学语境中，这八个坐标中却有七个是算符。玻恩的野心是unifying quantum theory and relativity，但是如何在相对论和量子力学的语境中平等地看待这八个量就是没解决的问题。在量子力学中，坐标是算符而时间是参数，在量子场论中它们都是参数。在狄拉克的相对论量子力学中，坐标也失去了算符的角色。相对论和量子力学哪一天能实现图像和语言的统一？——笔者注

7) 对称性与守恒律之间联系这样的伟大发现，却没得奖，幸好不妨碍其伟大。——笔者注

8) 此处的下标只是不同种类驱动力，或者强度量，的指标。驱动力本身可以是不同阶的张量。——笔者注

$-Y_i \mathrm{d}X_i$，由全微分的性质，有$\partial Y_i/\partial X_j = \partial Y_j/\partial X_i = -\partial^2 \Phi/\partial X_i \partial X_j$，故此有$K_{ij} = K_{ji}$，这是热力学层面的内在对称性，与具体物质本身的对称性无关(物质自身的对称性表现在诸如$J=\sigma E$这样的关系中)。它是reciprocal relation的基础。举例来说，考察恒温条件下电位移(矢量)、磁感应(赝矢量)和形变(二阶张量)对电场、磁场和应力的耦合响应，应有方程$D_i = k_{ij}E_j + \lambda_{ij}H_j + d_{ijk}\sigma_{jk}$；$B_i = \lambda'_{ij}E_j + \mu_{ij}H_j + Q_{ijk}\sigma_{jk}$，$\varepsilon_{ij} = d'_{ijk}E_k + Q'_{ijk}H_k + s_{ijkl}\sigma_{kl}$，由此可得两个reciprocal relations：$\lambda'_{ji} = \lambda_{ij}$；$d'_{pqr} = d_{rpq}$。[16]

另外，线性响应的关系中还有一类anti-reciprocal关系，即$x = gy$，$y = -hx$。

12 受激辐射的reciprocity基础

1853年Anders Jonas Ångström指出炙热气体发射的光线与其吸收的光线具有同样的折射度(refangibility)，即有相同的频率。也就是说，如果一个元素能发射某些特定波长的光，也就一定会吸收那些特定波长的光；此论断反过来也成立。斯托克斯和开尔文爵士也注意到此现象。据信基尔霍夫是基于热力学考虑得出了吸收谱线在发射谱线处的结论的[17]。

白炽灯泡选择炭作为灯丝材料是因为低温下越黑的材料在高温下越亮。这个reciprocity反应了光的吸收和发射是两个能级之间的事情，它和巴尔莫公式的形式(两项差)是吻合的。玻尔据此给出跃迁的概念，原子的光吸收或者发射是同带电子的两个状态而非一个状态相联系的。既然是两个状态，就有reciprocity，光的吸收是光发射的逆过程，存在某些reciprocal relation，也就可以理解了。

Reciprocality作为一种对称性之上的对称性指导物理学的研究，体现在受激辐射此一概念的提出上。爱因斯坦研究原子中电子跃迁与发光和光吸收之间的关系，如同麦克斯韦研究电磁定律一样，发现少了点什么。一个光子能被吸收，应该也影响发射过程，于是就有了辐射定律中的受激辐射这项。光吸收和受激辐射是相反的过程。这个吸收和发射的本领只和这两个能级的性质有关。考察两能级体系，对光的吸收几率$\propto B_{12}\rho(\nu)N_1$，而受激发射的几率$\propto B_{21}\rho(\nu)N_2$。Reciprocity就反映在关系$B_{12} = B_{21}$上。此关系得到的方式，人谓之“deduce by reciprocation(从reciprocation导出)”。在受激辐射概念的基础上，人类才有了激光。

与爱因斯坦研究光场与原子作用时同时考虑光被吸收和诱发辐射类似，印度人萨哈(Meghnad Saha，1893—1956)在处理分子离解和原子离化过程时同时考虑分离和复合过程，从而得到了Saha公式，很好地理解了气体密度对电离度的影响，而这是理解恒星光谱强度分布的关键。此也可看作是deduce by reciprocation之一例。

13 Reciprocality——物理学和做物理的原则

Reciprocity的表现形式是多样的。本文介绍了许多在数学、物理领域中常见的reciprocal relations，但只能讨论少数的例子。具有reciprocity的现象比比皆是，比如水与乙二醇可互为溶质—溶剂，也是一种reciprocity，这在这两种物质混合物之玻璃化行为随组分的变化中会表现出来。加速器物理的出现也是基于reciprocity：原子核反应事件伴随有高能粒子的发射，反过来高能粒子可以进入到原子核的内部。

Reciprocity是一种强的联系，reciprocity is a symmetry over symmetry。principle of reciprocity如同热力学的原则，其可靠到足以用来检验实验是否正确，而非通常情形下的是用实验来验证某些定律。基于reciprocity的考虑还可极大地减少计算量，比如关于固体响应行为的计算就是这样。考虑reciprocity的存在不妨成为研究自然现象的一种自觉9)。康德的哲学三要素包括substance(本体，物质，存在)，cause(原因)，和reciprocity，其中的reciprocity是被理解为relation of being的，其重要性可见一般。哲学可以指导科学，这话就principle of reciprocity来说，确实没错。这句话之所以在此地广受怀疑，是因为那些本地产的趾高气昂的所谓哲学家既没有掌握任何可指导科学的哲学，也未曾掌握任何可供哲学指导的待发展的科学。

退一步说，reciprocity作为习惯性的带哲学味的表述方式，也是很有表现力的。东方的哲学家庄子，他弄不清是他梦到自己是蝴蝶。还是醒来的他只不过是一只在做梦的蝴蝶。西方的哲学家蒙田(Michel de Montaigne，1533—1592)，他弄不清当他跟小猫一起玩耍的时候，是他在玩小猫还是小猫在玩他。王国维论诗人的自由，云“诗人必有轻视外物之意，故能以奴仆命风月。又能重视外物之意，故能与花鸟共忧乐”，物理学家对于实际和理论的态度，亦当如此！如果从

9) 也应注意到一种现象(phenomenon)，其看似因为另一现象的发生而发生但又不见相互间的影响(reciprocal effect)，人谓之epiphenomenon。——笔者注

理论深处着手，必须从实验研究中着眼；而如果从实验研究中着手时，又必须从理论深处着眼。只执一端，都远离物理真趣味。物理学家也喜欢用 reciprocal 的句式，比如有一本科普书就叫《不可能性：科学的极限与极限的科学》[18]。赫兹在其《力学原理》第一页上写道："We form for ourselves (internal) images or symbols of external objects; and the form which we give them is such that the necessary consequents of the images in thought are always the images of the necessary consequents in nature of the things pictured (关于外在事物我们形成了(内在的)图像或者符号；我们赋予外在事物的形式应该是这样的：我们思想中之图像的必然后果总是我们所图形之事物之必然后果的图像)。"[19]莫说他证实了电磁波的存在，仅凭这一句，我就愿意相信赫兹是一位了不起的有思想的物理学家10)。

一直想说说自然与物理学之间的关系，苦于不知如何 reciprocally 去表达。木心有句云："美术是宿命地不胜任再现自然的。自然是宿命地不让美术再现它的。"仿此，我要说"物理学是宿命地不胜任再现自然的。自然是宿命地不让物理学再现它的。"这 reciprocal impossibility 让真正试图理解自然的物理学家们不愁没活干，想来好不令人感到欣慰。

10) 在证实引力波的喧闹中，我倾向于相信那只表明某些人"思想的苍白"。电磁波的证实只需要在用金属丝连接的两个锌球缝隙间看到火花，即便是最富嫉妒心的文盲也无法否认它的可信。——笔者注

参考文献

[1] Coopersmith J. Energy：the subtle concept. Oxford，2010. p.37

[2] Shlain L. Art & Physics. Harper Perennial，2007. p.23

[3] Bateman H. The Transformation of the Electrodynamical Equations. Proceedings of the London Mathematical Society，1910，8：223

[4] 原文为法文，英文译文照录如下：Here the gas passes successively，but in an inverse order，through all the states of temperature and pressure through which it had passed in the first series of operations; consequently the dilatations become compressions，and reciprocally，but they follow the same law. Further，the quantities of action developed in the first case are absorbed in the second，and reciprocally; but they retain the same numerical values，for the elements of the integrals which compose them are the same. —— Clapeyron E. Puissance motrice de la chaleur. Journal de l'École Royale Polytechnique，Vingt-troisième cahier，Tome XIV，153-190 (1834)

[5] Manin Y I. Mathematics as Metaphor. American mathematical society，2007. p.207

[6] Bayes T，Price R. Philosophical Transactions of the Royal Society of London，1763，53(0)：370

[7] Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper [On the Electrodynamics of Moving Bodies]，Annalen der Physik，1905，322(10)：891

[8] 曹则贤 译. 至美无相. 中国科学技术大学出版社，2013. p.153

[9] Dirac P. The principles of Quantum mechanics (4^{th} edition). Oxford University Press，1958. p.76

[10] Born M. A suggestion for unifying quantum theory and relativity. Proceedings of the Royal Society London A，1938，165：291

[11] Born M. Reciprocity Theory of Elementary Particles. Review of Modern Physics，1949，21(3)：463

[12] Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. Phys. Rev.，1931，37：405

[13] Flood R，McCartney M，Whitaker A (Eds.). Kelvin：life，labours and legacy. Oxford university press，2008

[14] Curie P. J. Physique，1894，3：393

[15] Debye P. Z. Phys.，1926，36：300

[16] Nowick A S. Crystal properties via group theory. Cambridge university press，1995

[17] Sternberg S. Group theory and physics，appendix F. Cambridge university press，1994. p.390

[18] Barrow J D. Impossibility：The Limits of Science and the Science of Limits. Oxford university press，1998

[19] Hertz H. The principle of mechanics presented in a new form. Dover publications，Inc.，1956. p.1