多少我们熟知的公式其表述是不恰当的

曹则贤†
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2016－07－16收到
† email：zxcao@iphy.ac.cn
DOI：10.7693/wl20160810

摘　要　恰当性是赫兹为事物之物理图像所设立的考察标准之最后一项。一些人们熟知的数学物理公式，包括牛顿积分公式、欧拉多面体公式、傅里叶级数表达式、狭义相对论速度相加公式和质能关系，其常见的表述形式依然存在一些不恰当的地方。

1　引子

物理之学，大者有整套的理论体系如严谨缜密的经典力学和四面透风的量子力学，小者有单个的概念和物理量。包含多个物理量以及常数的公式居中，起着承上启下的作用。公式是一门高度压缩的语言，压缩意味着信息的丢失，关于一个公式的具体的、全部的涵义可能要放到大的物理和数学语境中才能理解透彻。物理学的公式是数学表达式，但承载着更多关于我们对物理问题认识方面的内容，包括物理图像、因果关系、量纲等等。物理公式的某个正确表达形式，其等价的数学表示却可能是荒唐的，这一点学物理者不可不知。即便是数学里的公式，其代表的图像或者关切的对象可能也是物理的、现实的。我们接触到的各种公式，其表述形式是由对数学、物理理解到不同层面的人给出的，或者是在不同的形态发展时期被固定下来的，因此难免有是否恰当的问题。恰当性是赫兹为事物之物理图像所设立的考察标准“permissibility，correctness，and appropriateness (允许、正确、恰当)”之最后一项[1]。如果以赫兹的批判眼光考察一些我们常见的公式，会发现它们多少有些不合适的地方，如果不是错误的话。不恰当可能意味着物理图像的歪曲。

这么说并非危言耸听。爱因斯坦的质能关系是二十世纪的符号。这个关系常见的解释为“The mass is equivalent to energy(质量和能量是等价的)”，这和爱因斯坦所说的“The inertial mass of matter is a measure of its energy content(物质的惯性质量是其能量内涵的测度)”，这两种理解就很不一样。这种对质能关系的理解歧义自然会反映到公式表述上。1989年，Okun教授就在一篇文章中考考读者[2]：关于质能关系，下面四个写法 $E=mc^2$，$E=m_0c^2$，$E_0=mc^2$，$E_0=m_0c^2$ 中哪个表达是物理上合理的？(图1)。首先，在现代物理体系内，惯性质量是基本粒子的特征(character)，Poincaré群表示的特征，因此是个内禀的参数，并不随运动速度改变。这就是说没有什么静止质量 m_0 和相对论质量 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 的区别。就一个有惯性质量 m 的粒子其能量内涵的测度来说，公式 $E_0=mc^2$ 是合适的。对于运动粒子，其能量满足关系式 $E^2-p^2c^2=m^2c^4$，可得 $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$。当人们谈论质能转化过程中的质能关系时，类似 $\Delta E=\Delta mc^2$ 形式的表述可能才是合适的(详细内容见后)。

本文将分析几个重要的数学物理公式的表达式，包括牛顿积分公式、欧拉多面体公式、傅里叶级数表达式、狭义相对论速度相加公式和(质能转换语境下的)质能关系，等等。这些公式的常见表达为大家所熟知，但依然可能存在一些不恰当的地方，包括信息缺失、不能推广、容易造成歧义或者误导，以及缺乏可操作性，等等。

The famous Einstein relation between mass and energy is a symbol of our century. Here you have four equations:

$$E_0=mc^2 \quad (1)$$
$$E=mc^2 \quad (2)$$
$$E_0=m_0c^2 \quad (3)$$
$$E=m_0c^2 \quad (4)$$

In these equations c is the velocity of light, E the total energy of a free body, E_0 its rest energy, m_0 its rest mass and m its mass.

图1　关于质能关系的多种表达式

2 牛顿微积分

单变量积分公式常见被写成 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}F=F(b)-F(a)$的形式。笔者会把等式右侧念成$F(b)$减去$F(a)$，甚至会认为这个减号是积分公式内禀的内容，但这是对此公式所要表达之思想的曲解。这个公式正确的表达是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}F=\int_{\{a\}^-\cup\{b\}^+} F=F(b)+\left(-F(a)\right)$，即等式右侧是两项带方向的量之和。积分符号就是summation(求和、加法)一词的首字母。加法，才是积分的本意。此积分公式是说1-形式的函数$f(x)$在区间［a，b］上的积分等于其母函数F在两端点$\{a\}$，$\{b\}$上的积分，因为有方向的分别，所以结果为 $F(b)+\left(-F(a)\right)$ 的形式。只考虑值的计算，$F(b)+\left(-F(a)\right)$就被写成了 $F(b)-F(a)$。

上述积分公式是Stokes定理 $\int_\Omega \mathrm{d}\omega=\oint_{\partial\Omega}\omega$ 的特例。Stokes定理表述如下，如果 ω 是个$(n-1)$-形式，其紧致支撑(compact support)为Ω是一**有取向**的流形，且 $\partial\Omega$ 为该支撑的边界，则有 $\int_\Omega \mathrm{d}\omega=\oint_{\partial\Omega}\omega$ 。明面上的意思是，外微分 dω 在域Ω上的积分等于 ω 在域Ω之边界 $\partial\Omega$ 上的积分。显然这里只涉及求和，而不涉及差。作为对照，巴尔莫线系的频率公式 $\nu\propto 1/2^2-1/n^2$ 中的减号才是真实的减号，由它引出了能级跃迁的概念。最初的Stokes定理联系面积分与线积分，$\int_S \nabla\times F\cdot\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial S}F\cdot\mathrm{d}\ell$，即矢量场$F$之旋量在面$S$上的积分等于该矢量场在面$S$之边界 ∂S 上的线积分，这个积分用于建立麦克斯韦方程组中法拉第感应定律和安培定律之积分形式和微分形式之间的联系。而高斯积分公式 $\int_\Omega \nabla\cdot F\mathrm{d}V=\oint_{\partial\Omega}F\cdot\mathrm{d}S$ 见于麦克斯韦方程组中两个高斯定理之积分形式和微分形式之间的联系。这四个公式的两两分组，正好一组是内积问题，一组是外积问题。

图2 五种规则多面体

3 欧拉多面体公式

欧拉多面体公式 $V-E+F=2$ 是诸多源自欧拉的伟大公式之一，曾被评为最优美公式排行榜次席，稍逊欧拉的另一公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$ 。欧拉公式 $V-E+F=2$ 是关于三维空间中凸多面体一个性质的表述。对于凸多面体，其顶点数V(vertex)，边数E(edge)，和面数F(face)满足关系 $V-E+F=2$ 。图2中是五种所谓的柏拉图多面体(Platonic solids)，即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体，容易验证它们都满足欧拉公式。

这个公式的表述形式有什么问题吗？有，而且问题很大！注意公式 $V-E+F=2$ 中的重要信息，顶点、边和面都是几何对象，其维度分别是0，1和2。这三个几何对象的个数V，E和F，随着维度的增加，在公式中是以正负号交替的形式出现的。可是，我们在谈论的是三维凸多面体的性质，怎可忽略掉三维的结构呢？欧拉公式应该还包含三维几何对象的数目，且其符号应为负号。实际上，欧拉公式的正确写法应该是 $V-E+F-S=1$，其中S(solid)是体的数目。由于论及三维空间中的某个凸多面体有 $S\equiv 1$，因此欧拉公式才被写成了 $V-E+F=2$ 的样子。

把欧拉公式写成正确形式 $V-E+F-S=1$ 的好处是，你可以正确理解它的真正含义。欧拉公式告诉我们，对于一个凸多面体，其各个维度上的几何对象的数目，按照从零维开始正负交替的形式赋予正负号，则其和总为1。注意，此时我们谈论的凸多面体就不局限于三维情形了，它可以推广到任意维的空间。比如，对于二维情形，二维凸多面体即凸多边形，其包含的几何对象为顶点、边和面，且面的数目 $F\equiv 1$，因此其欧拉公式应为 $V-E+F=1$，进一步地可写为 $V-E=0$ ，即顶点数与边数同，这是一个我们容易验证的、平凡的结论。对于四维情形，四维凸多面体包含的几何对象包括顶点、边、面、体和四维polytope，且polytope的数目 $P\equiv 1$，因此其欧拉公式应为 $V-E+F-S+P=1$，进一步地可写为 $V-E+F-S=0$ 。

重复一遍，我们熟知的欧拉公式 $V-E+F=2$ 是关于三维凸多面体的一个几何性质的描述，其正确形式应该是 $V-E+F-S=1$，其中 $S\equiv 1$ 是体的个数。知道三维情形欧拉公式所代表的几何意义及其正确表述，容易将之推广到其它维度。

4 傅里叶级数

傅里叶级数是法国人傅里叶(Jean-Baptiste Joseph Fourier，1768—1830)在研究热传导问题时引入的。一般教科书中，傅里叶级数被表示为 $f(x)=a_0/2+\sum_{n=1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中 $f(x)$ 是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数，系数为 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$。许多人在初学时就注意到，此级数表达式中有 a_0 项但没有 b_0 项。当然了，即便有 b_0 项，$b_0\sin(0\cdot x)$ 也没有贡献。但问题是，到底有没有 $b_0\sin(0\cdot x)$ 这一项呢? 一般教科书几乎懒得理会这个问题。

为了回答这个问题，我们来考察二阶微分算符 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ (在量子力学中，此算符 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 对应粒子的动能)的本征值问题，$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+n^2\psi=0$。此方程的形式解为 $\cos(nx)$，$\sin(nx)$，其中 $x\in(x_0,x_0+2\pi)$。因为算符 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 是一个自伴随算符，其所有本征函数构成一个完备正交集，即是说对于任何定义区间 $(x_0,x_0+2\pi)$ 上的函数 $f(x)$，有 $f(x)=\sum_{n=0}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，此处的 $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(0\cdot x)\mathrm{d}x$。与此同时，$b_0$ 是不确定的；且对于任意有限的 b_0，$b_0\sin(0\cdot x)$ 这一项为零，这也是为什么一般介绍傅里叶级数时不包括这一项的原因。不过，笔者以为在适当的地方把它加入还是有意义的：$\sin(0\cdot x)$ 虽然恒为零，但它也代表**一个完备函数空间的一个维度**。再说了，即是对具体问题的计算没用，它也是讲解退化(简并)概念的好例子。

5 速度相加公式

狭义相对论中有速度相加公式，一般表示为 $v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$，且可被诠释为若某物体A在某观察者眼中速度为 v_1，若物体B相对于物体A的速度为 v_2，则物体B在该观察者眼中的速度为 $v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$。由此公式可推知，对于 $v_1\leqslant c$，$v_2\leqslant c$，有 $v\leqslant c$，即光速 c 是运动速度的上限。

狭义相对论的速度相加公式是洛伦兹变换的结果，洛伦兹变换 $x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，$t'=\frac{t-xv/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 是使得麦克斯韦波动方程 $\partial^2\varphi/\partial x^2=\partial^2\varphi/c^2\partial t^2$ 形式不变的变换，是由Woldemar Voigt于1887年率先提出来的。洛伦兹变换是关于时空的线性变换，变换中的参数为 v(或者说是 v/c)。以参数 v_1 表征的变换接着以 v_2 为参数的变换相当于一次性地以 $v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$ 为参数的变换。这个速度相加公式中各项的关系不清爽，仅从这个形式来看似乎损失了不少内容。相当多的修习者会死记这个速度相加公式，它背后的几何意义——相对论是关于时空几何的变换——却被忽略了。

回到问题的原点，即麦克斯韦波动方程 $\partial^2\varphi/\partial x^2=\partial^2\varphi/c^2\partial t^2$ 形式不变的变换问题，这等价于找到 $\mathrm{d}x^2-(c\mathrm{d}t)^2$ 不变的变换。先看看大家熟悉的使得 x^2+y^2 不变的变换。在二维平面几何中，x^2+y^2 对应从原点到点 (x,y) 之矢量的模平方。坐标系转动 θ 引起的变换 $x'=x\cos\theta+y\sin\theta$，$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$ 满足要求，连续变换参数之间有关系 $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$。相应地，欲使 $\mathrm{d}x^2-(c\mathrm{d}t)^2$ 形式不变，考虑相对原点的情形其等价于考察 $x^2-c^2t^2$。显然，线性变换 $x'=x\cosh\theta+ct\sinh\theta$, $(ct)'=x\sinh\theta+ct\cosh\theta$ 满足这个要求。变换参数 θ 是个无量纲数，且 $\tanh\theta$ 取值在 $[-1,+1]$ 之间。记 $\tanh\theta=v/c$，由关系 $\tanh(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tanh\theta_1\tanh\theta_2}{1+\tanh\theta_1\tanh\theta_2}$ 可得速度相加公式。这么做的好处是，可把狭义相对论的洛伦兹变换当成时空间距定义为 $\mathrm{d}x^2-(c\mathrm{d}t)^2$ 的时空中的转动处理，变换的参数由转动角给出。熟悉了对具有不同距离定义的空间中的等距映射，可以很容易由狭义相对论进入广义相对论。此外，由 $\tanh\theta=v/c$ 和函数 $\tanh\theta$ 的性质，无需从相加公式就可推知光速 c 是速度上限——**光速 c 是速度上限隐含在麦克斯韦波动方程中，它不是速度相加公式的推论**。此外，这个相对论时空的转动与平常欧几里得空间中的转动从形式上可以放到一起理解，$\tanh\theta=\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}\theta)$，而公式 $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$ 可是我们初中时就学了的，它可以让我们容易地记住速度相加公式。

6 爱因斯坦质能公式

如果说欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$ 占据所有公式排行榜第

一位的话，公式 $E=mc^2$ 应该出现在物理公式排行榜第一、二位的位置上。公式 $E=mc^2$ 简直成了物理学的符号，至少是相对论的符号。

为了谈论公式 $E=mc^2$ 之不甚恰当的地方，先谈论一下关于光速不变性表述的不恰当处。一般文献中都会说光速不变性指光相对任何参照系都是恒定值。这话有问题吗？这种表述看似没问题，实际上却缺乏可操作性。爱因斯坦1905年的原文中是这样表述的：对来自任何发射体的光，观察者测到的光速是同样的一个值[3, 4]。基于这个认识，爱因斯坦考察了原子同时发出两个方向相反、能量相同的光子的问题。假设原子与您作为观察者相对静止不动，写出此过程的能量守恒和动量守恒；再假设原子相对您以速度 v 运动，再写出此情形下的能量守恒和动量守恒，两种情形下得到的公式相减可得 $E=\Delta mc^2$ 。不过必须说明，其中 E 是两个光子的能量，而 Δm 是原子在发射前后的质量差。也就是说，这个公式两侧的物理量各有所属。

质能关系两边的物理量各有所属是这个公式应用时的普遍状况。比如，关于正负电子对湮灭过程 $e^+ + e^- \to 2\gamma$ ，有方程 $E=mc^2$ ，其中 m 是电子的惯性质量，因为湮灭故有 $\Delta m=m$ ，而 E (=511 MeV)是 γ 光子的能量。在中子轰击 ^{235}U原子核的反应中， $^{235}_{92}\mathrm{U}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}\to{}^{90}_{38}\mathrm{Sr}+{}^{144}_{54}\mathrm{Xe}+2{}^{1}_{0}\mathrm{n}$ ，质能关系的正确形式应为 $\Delta E=\Delta mc^2$ ，其中 ΔE 是方程右侧三项动能之和与左侧两项动能之和的差，而 Δm 是方程左侧两项质量之和与右侧三项质量之和的差。在谈论质量来源的语境中，对有质量粒子结合成拥有更大质量的粒子的情形，质能关系为 $E=\Delta mc^2$ ，其中 E 是下一层面粒子间的结合能，而 Δm 是上一层面粒子质量与下一层面粒子质量和之间的差值。在终极情形，无质量粒子结合成有质量粒子，无质量粒子间的结合能表现为有质量粒子的惯性质量 m，此时有质能关系 $E=mc^2$ 。也许此两处的能量写成 $E_{\mathrm{coh.}}$ 以表明其结合能的身份才是更合适的。

7 结语

本文讨论了一些人们熟知的数学物理公式，包括牛顿积分公式、欧拉多面体公式、傅里叶级数表达式、狭义相对论速度相加公式和质能关系等，其常见的表述形式所存在的不恰当处。这里的不恰当处，包括信息缺失、不能推广、容易造成歧义或者误导，以及缺乏可操作性等。但是，这些不恰当处可能只不过是笔者个人学习过程中遭遇的困惑与误解而已，不具有一般性，读者请自行斟酌、批判。倘若有读者朋友也曾遭遇过与我一样的困惑与误解，并经由此文多少得到一些澄清，那无疑会是一件令人欣慰的事。

参考文献

[1] Hertz H. The Principle of Mechanics. Dover Publications, INC., 1956

[2] Okun L B. The Concept of Mass. Physics Today, 1989, 42(6): 31

[3] Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen der Physik, 1905, 322(10): 891

[4] Einstein A. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Annalen der Physik, 1905, 323(13): 639