

物理学咬文嚼字之七十九

阶级与秩序

曹则贤[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2016-08-31 收到

[†] email: zxcao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20160909

圣谛尚不为，何阶级之有！

——青原行思禅师

Order without liberty and liberty without order are equally destructive.

——Theodore Roosevelt¹⁾

摘要 阶级秩序次第等是数学物理中常见的标签，胡乱地对应英文的 level, order, degree, grade, rank 等词。对使用和翻译上的混乱略加澄清，或可使我们的理解更多一点 order and clarity。

1 引子

笔者来自穷乡僻壤，因此家乡话里就保有一些化石级的文化痕迹。旧时待客，主人会根据客人的阶级层次决定接待规格，俗谓看人下菜碟。对于拥有这种自觉的人，文化点的表述是具有较高的阶级觉悟，俺们老家的土话就说这人“长就一对阶级眼”，属于天赋异禀的一类。阶级繁杂且森严，是中国文化的精髓。历史上不仅是对官员，就连嫔妃、奴才、太监和教授都分成



图1 中山陵的台阶

三六九等，都有系统科学的标识和具体而微的待遇安排。比如，汉朝是个有文化的朝代，帝后初分为皇后、夫人、美人、良人、八子、七子、长使、少使八等，后又引入婕妤、妍娥、容华、充依、五官、顺常和无涓(共和、娱灵、保林、良使和夜者)共十五等。清朝帝后则分为皇后、皇贵妃、贵妃、妃、嫔、贵人、常在和答应，从命名上就能看到文化的缺乏。不同阶级之间，有递补、提拔、贬谪与自甘堕落，但平时一般各以本分，这正应了原子中电子的隧穿、受激向上跃迁、受激向下跃迁和自发向下跃迁，以及大多时间在稳定状态上的无所事事。

用来区分人或物之不同等级的汉语词包括阶-级、秩-序、品(秩)、次(幂)等词，用这些词加以翻译的英文词有 level, order, degree, grade, rank, 等等。这些词在数学物理中频繁出现，且意义多有不同甚至混淆，中西文皆

然。中文的阶级，其中的阶(塔)见于台阶，庭阶寂寂，是实体，而级，见于拾(shè)级而上，由计数(enumeration)而来，有抽象的内容。容易理解，台阶是一种实用的、但也被故意符号化了的存在，许多建筑在面前都筑起多层次的台阶，陡然而出威严(图1)。阶-级、秩-序这种得自自然和日常生活的词必然散布于数学物理的表述，弄不清 level, order, degree, grade, rank 这些词的法，看数学物理和看宫斗剧一样有点稀里糊涂。学物理者，将一双阶级眼用在这里，正得其宜也。

2 Level

谈到汉译为阶级的词，容易想到的一个便是 level，见于 energy level (能级)，但这可能是误解。英语的 level，来自拉丁语的 libra，与平、衡有关。水平的线或者面，即为 level，如 sea level (海平面)，on

1) 没有自由的秩序和没有秩序的自由同样具有破坏性。——西奥多·罗斯福

a level line (水平线上)。牛顿流体在重力场下的静止状态,其表面的法向应该是重力的方向,此即 water seeks its level 之意。利用这个事实,可以制作水平仪(level,见图2),这是工程中必不可少的工具。Level不是级,而是阶、阶之面。在日常用法中,level不仅表示层面,还暗含平衡之意,如 high-level talk,不仅是说会谈的层次高,而且是对等的。Level还有 equally advanced in development & even or uniform in some characters (等间距的、均匀分布的),因此level暗含“equal in importance, rank, degree, etc.”的意思,这也可能是我们愿意拿级来翻译level的原因。但是,把energy level 翻译成能级还好,习惯性地把atomic level, sub-levels中的level也翻译成“能级”这就麻烦了,它掩盖了轨道(也许就是个数学的函数)自身的排列问题,这里的level强调的也许只是轨道可分辨这个事实。在象 levels of consciousness, levels of difficulty这样的概念中,谈论的都是抽象概念的分层次,没有定量的成分。许多时候,把level译成层次、层面也许是更合适的,哪怕是energy level。比如加速器的energy level,如在例句LHC experiments run at the highest energy level中,就应该译成“能量水平”,目前欧洲大型强子对撞机就运行在13 TeV的能量水平上。此外,象the macroscopic level of quantum mechanics^[1]一文,显然讨论的是量子力学的宏观层次。

3 Degree

Degree, 来自拉丁语动词 de-

gradare, 就是英文的degrade, 是一串台阶(steps or stages)的意思,注意它更多强调了降序的排列,这一点从a cousin in the second degree (二度表亲,拥有同一个太爷爷、太奶奶辈分的前辈)一词中很容易看出来。Degree和grade(gradus)意义相同,两者可连用。我们在学校里学习的难易程度也是分级的(同学,你物理是第几grade的?)。如果是沿着不易觉察的台阶或者刻度一点一点向前(向上)推进,这就是一个gradual(逐渐的)过程。达到一定程度就能graduate(毕业、爬到头了),就可以receive a degree(获得一个学位,拿到一个刻度标记)了。常用的摄氏温标(temperature scale)的量度名称为degree Celsius(摄氏度),也称degree centigrade(100刻度制),后一词透露了其是如何被定义的。将标准大气压(维也纳夏季的气压)下冰一水混合物的温度定为0℃,把水的沸点定为100℃。利用稀薄空气在等压条件下体积随温度线性变换的假设,可以根据稀薄气体体积相较于0℃下的增量给0℃到100℃间的任意温度赋值。这就是摄氏温标的定义。注意,对于稀薄空气,在0℃到100℃之间温度每增加1℃,体积增加约1/267。明白了这一点,也就明白了作为对摄氏温标之拓展的绝对温标,其唯一的定标点,水的三相点,为什么会定为273.16 K了。一般中文教科书中论及摄氏温标,只含糊地来一句“标准大气压下冰水混合物的温度定为0℃,水的沸点定为100℃,此为摄氏温标”,显然漏掉了太多的信息。编书者当年囿于条件不能知道细节可以理解,但根本没注意到定义的不完



图2 Level, 水平仪



图3 有可视标度的是真degree, 纯数字的就靠外加符号的提醒了

整就让人不能理解了。早期的来自物质体积变化的、直观的一排刻度,那真是degree,如今的电子式的温度计,显示的就是“一个”数值,则需要符号℃, °F的提醒才会想起degree来(图3)。

Degree 可用作对一般程度的或者干脆就是直观存在的度量。一个圆,其上可以划上刻度,分为360°,那是每年天数的取整,不具有绝对的意义²⁾。在反射光的degree of polarization(偏振度)概念中,degree反映的是程度,其取值在0到100%之间。Degree或者grade还被用来衡量抽象概念的程度,如马克思的《政治经济学批判》一书中有句云:“Der Tauschwert der Waren, so als allgemeine Äquivalenz und zugleich als Grad dieser Äquivalenz in einer spezifischen Ware, oder in einer einzigen Gleichung der Waren mit einer spezifischen Ware ausgedrückt, ist Preis (商品的交换价值,

2) Degree(度)可以往下细分。就角度和小时而言,1 degree=60 minutes(分),1 minute=60 seconds(秒)。钟表盘面一圈分为12大刻度,每个大刻度分为5个小刻度。Minute, small part的意思;second,来自to sever,刺成小段也。

作为一般等价以及在某特定商品中此等价的程度值,或者表达为该商品同某一特定商品的等值关系,是“价格”³⁾。在 degrees of degeneracy (简并度), degrees of freedom (自由度)等概念中, degree 是个正整数。简并度²⁾,即对应同一能量之不同状态的数目,在德语中简并度的说法为 Entartungsgrad,可见 degree 就是 grade。自由度就是描述体系所需的独立变量数。仔细体会这个定义,“描述体系所需的独立变量数”,则自由度的多少取决于如何描述。描述一个粒子在三维空间中的位置需要3个变量,则描述由 $N(N \geq 3)$ 个粒子组成的刚体的构型就需要6个独立变量,或者说刚体运动的自由度为6。在热力学—统计力学中有所谓的能量均分定理,谓每一个自由度对比热的贡献都是一个 $R/2$, R 是气体普通常数。如果不深入了解这个能量均分定理成立的条件,许多人都难以理解水分子 H_2O 何以有18个自由度,而水(蒸汽)的比热也一直是温度的函数。就比热问题而言,自由度是能量表示涉及的自由度,这包括动能涉及的动量自由度和势能涉及的位置自由度。有趣的是,某些晶体的晶格可看作是两套或多套亚格子(sublattice)套构而成的,这也可以看成是一类自由度。炭单层的六角晶格是由两套三角格子构成的,其中电子的波函数可以比照电子自旋写成两分量的形式。

Degree 作为函数或者方程的指标,汉译为次(次幂)或者阶。比如,函数 $P_\ell(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ 是 ℓ -th-degree Legendre polynomial,汉译 ℓ -阶勒让德多项式。The de-

gree of a monomial, 汉译单项式的次幂,是变量指数的和,比如项 $x^2 y^3$ 的 degree 是5。单变量的代数方程(univariate polynomial equation),以变量的最高次幂命名,简称为一元二次方程(a second degree monic polynomial equation)、三次(third degree)方程等等。当然了,这类方程有专门的、简单的称谓 quadratic, cubic, quartic, quintic, sextic polynomial equations, 分别为二次、三次、四次、五次和六次代数方程。五次以上的多项式方程不存在代数解(unsolvable by radicals)⁴⁾,对这个问题的理解带来了群论的诞生。群论对物理学的影响,怎样高度评价都不为过。物理学最深刻的学问,所谓的 the fearful symmetry(了不起的对称性),来自对一元代数方程的摆弄。对一元多项式解的探索,是一场惊心动魄的天才的游戏。与解方程有关的还有 topological degree theory。如果方程有某个容易得到的解, degree theory 可用来证明其它非平凡解的存在。Degree theory 看起来和 fixed-point theory(固定点理论), knot theory(纽结理论)有关,具体内容笔者不懂,此处不论。

4 Order

Order 简直就是一个充斥数学和物理学领域的一个词汇。Order 的西语本意也是“放成一溜儿(straight row, regular series)”的意思,可作为名字和动词使用。Order frequently refers to orderliness, a desire for organization. 存在总是表现出某种意义上的 order, 这让认识世界成为可能。Objects should be ordered in

order to bring in some order and clarity (为了有序和明晰,应该为对象排序),这几乎成了科学家的共识。排序、分类是研究的前期准备。

Order 是个用得太多的词,可以想见它的汉译会花样繁多。Order 在物理语境中一般被译成序,如 order parameter (序参量), topological order(拓扑序), off-diagonal long-range order (非对角长程有序), 等等。过去分词形式 ordered 用作形容词,如晶体就是 ordered structure (有序结构)。Order 的对立面是 disorder, formless, 最无序的存在是 chaos (混沌),指 the disorder of formless matter and infinite space (由无形的物质和无限的空间一起构成的无序)。混沌被当作有序之宇宙出现之前的状态,也就是说当前的有序状态是自完全无序中发生的, order out of chaos⁴⁾, 哈,多哲学。

Order 出现的语境,更多的还是和排序有关,比如 lexicographical ordering (字典编纂采用的排序), electrons are always added in order of increasing energy (电子按照能量递增的顺序被加进来), the order of differentiation or integration (微分、积分的次序), 等。微分、积分以及乘积的顺序有时候没关系(immaterial), 有时候关系重大,结果依赖于顺序的就意味着别样的数学结构和物理,比如非交换代数或者物理里的非对易算符。有时候,有些源自 order 的词从我们的角度来看,会以为排序的意思不明显,比如 coordinates 和 ordinate 就给译成了坐标和纵坐标(vertical ordinate), 但请记住这里的关键是这些数值具有排序的含义在里边。有些地方把笛卡尔坐

3) 本咬文嚼字系列中的外文翻译一般都出自作者本人,请勿以其它翻译为标准褒贬之。

4) I. Prigogine 曾著有 Order out of chaos 一书,汉译《从混沌到有序》。

标系的 x -轴称为 horizontal ordinate (水平坐标), 但其实有时候 x -轴的对象不是可排序的量, 如职工工资分布图, 工资是可排序的, 职工则无所谓序。当我们把 y -轴理解为 ordinate 时 x -轴有专有名词 abscissa, 是个标记(锯痕?)而已。此外, 如 linear dimensions are of the order of L , 汉译为线性尺度在 L 的量级, 字面上可看到的意思是若排列的话, 该尺度应该可与 L 等量齐观的。Order of magnitude, 量之大小在序列中的位置, 汉译干脆就是数量级。

数字的用法分为 ordinal numbers (序数) 和 cardinal number (基数), 前者明显与 order 有关, 而后者也不免和 order 有关。一个集合的元素数目, 是集合的 cardinality (集合的势), 而群的元素数, 当然也是 cardinality, 又被称为 order of group, 汉译“群阶”。与此同时, 群元素 g 的 period (周期), 即使得 $g^m=1$ 成立的最小整数 m , 也称为该群元素的 order。群阶和元素的阶反映了群的内在结构。大致说来, 一个群, 其群阶的因子分解越复杂, 这个群的结构就越复杂。不仅群和群元素有 order 的概念, 群的特征标 (character) 也有 order 的说法。

Order 在许多场合下有排序的意思, 与其连用的数词应是序数词, 如 second-order differential equation (二阶微分方程), third-order recurring sequences (二阶递归序列), first-order approximation (一阶近似), 等等。物理学的方程被限制在(第)二阶(偏)微分方程的层面⁵⁾, 学会了二阶(偏)微分方程, 一个纯数学家也许比许多物理学家更象物理学

家。量子力学以及后继的发展被有些人频繁以革命誉之, 属不通之论, 其 governing equations 模样可以变得复杂可怕, 但属于二阶微分方程却是不变的。

5 Rank

中文的秩, 序也, 次也, 可连用为秩序、秩次(官阶的高下), 还有秩叙(次序)、秩然(秩序井然)、秩如等词。秩既然用来表示官阶的高下, 相应的标识就有秩服(区别官阶的服饰)、秩俸(分级别的俸禄)等委婉语。秩被用来翻译英文数理概念中的 rank, 日常表述的 rank, 如 military rank (军阶)还是用阶级加以翻译。中国古代的官员有华丽花哨的秩服, 今天各国军队的 military rank 则用华丽花哨的徽章 (insignia) 加以标识。

Rank, 与 range, arrange 同源, 意为 to arrange in order, 特别是排成行。作为及物和非及物动词用, rank 一般是排序的意思, 如 to rank third on a list (位列第三), qualitative ranking of various ions toward their ability to precipitate a mixture of hen egg white proteins (根据使得

鸡蛋白沉淀的能力把离子定性地加以排序), Alfred Nobel 在设立诺贝尔奖时将物理学排在第一位 (ranked physics as the first one), 等等。Rank 作为名词表示次序, 汉语的翻译比较随意, 比如 people from all ranks of life (各阶层人民), a poet of the first rank (一流诗人), 等等。Rank 作为排序的意思强调是排成行, 国际象棋棋盘上空格的行与列, 英文用的即是 rank 与 file; 相应地, 对于矩阵的行与列, 英文用的是 row 与 column (图4)。

Rank 作为科学概念我们知道有 rank of a matrix 矩阵的秩的说法。Rank 是矩阵的一个基本特征。把矩阵的行(列)看成一组矢量, 这组矢量中线性无关的矢量的数量即是所谓的 rank, 也即行(列)矢量所张空间的维度。对于一个矩阵, 行和列具有相同的秩, 也就是矩阵的秩⁶⁾。考虑到矩阵同线性方程组和线性变换(算符)相联系, 因此矩阵 A 的秩是线性方程组 $A \cdot x=c$ 非简并性⁶⁾的度量, 也是线性变换 $y=A \cdot x$ 之像空间的维度。

在物理上, 我们知道能量是标量 (scalar), 动量、位置是矢量 (vec-

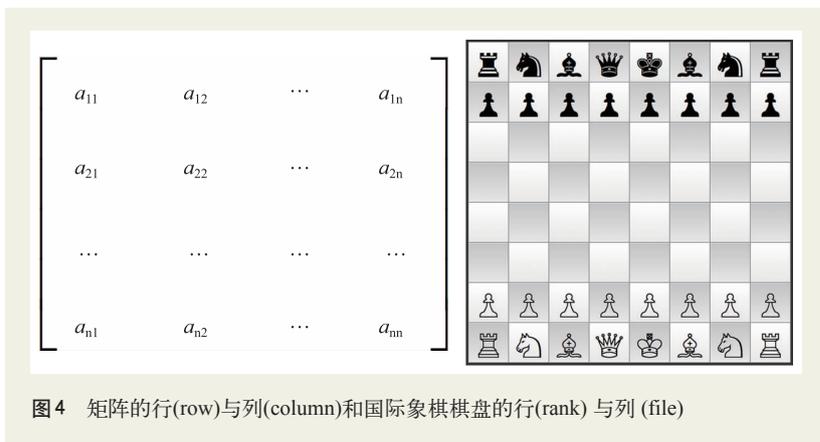


图4 矩阵的行(row)与列(column)和国际象棋棋盘的行(rank)与列(file)

5) 我们把描述各种物理过程的方程限制在二阶(偏)微分方程的层面, 愚以为主要是关于解的难度与多样性不得不做的妥协——三阶微分方程太难了, 也太复杂了。以为大自然必须遵从我们能解的那点二阶微分方程, 那就有点傲慢了。一些由做了很多近似得到的一类特殊二阶微分方程所导出的什么波的概念, 说说就算了, 不必太当真。以为依其能破解自然奥秘的人, 离物理之门远矣。

6) 正确译法应是非退化程度, 见参考文献[2]。

tor), 而角动量 $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ 是赝矢量等等, 这些可以用张量(tensor)的语言统一处理。张量是描述张量之间线性关系的几何对象(有点循环定义的味道哈), 张量的rank(也叫order或者degree)就是用来表示张量的数列的维度, 也即所需指标的个数。由此可知, 能量, 动量(位置)和角动量分别是rank-0, rank-1和rank-2张量。针对某个标量(质量, 电荷)的空间分布定义的四极矩张量, $Q = \int_{\Omega} \rho (3r_i r_j - |r|^2 \delta_{ij}) d^3 r$, 就是无迹的rank-2张量。电位移D(矢量)对应应力张量 σ (rank-2张量)的响应, 或者应变张量 ϵ (rank-2张量)对电场E(矢量)的响应, 相应的系数就是rank-3张量^[5]。

涉及线性行为的代数、变换和算符等概念都会有rank这个特征, 因此有(李)代数的秩, (不可约)张量算符的秩等说法。Module(模式)概念也有秩的说法, 比如rank 2的自

由Z-module不过是 $O_k = Z \oplus \omega Z$ 的一种装酷的说法而已, 其中 $\omega \in O_k$, O_k 为一代数整数集合^[6]。对椭圆曲线 $y^2 = x^3 + Ax + B$ 也有rank这么一个量, 比如椭圆曲线 $y^2 = x^3 - 2$ 和 $y^2 = x^3 - 4$, 其Mordell-Weil rank就是1。这种秩有什么意思, 怎么计算, 笔者不懂。

6 结语

阶级秩序次第等等是数学物理中常见的标签, 是对诸多现象分别知见的基础。然而, 这一切的区别和区别的习惯, 早在有数学、物理之前就进入到人类的文明中去了, 因此不管是中文还是西文, 相关词汇的使用略显混乱是必然的。对付这种情况, 把各个概念纳入其不同意义的具体使用语境下理解是不二法门。毕竟, 数学物理还是有自己的抽象语言表示的。

注: Power 一次在数学中被译为次幂, 但此词有更多更胡乱的物理上的应用, 本篇不加讨论。

参考文献

- [1] George C. Prigogine I. The macroscopic level of quantum mechanics. Nature, 1972, 240:25
- [2] 曹则贤. 物理学咬文嚼字之五十七: 简并. 物理, 2013, 42(9):672
- [3] de Lagrange J L. Réflexions sur la résolution algébrique des équations, (Œuvres complètes, tome 3, 205—421 (拉格朗日全集, 法语)
- [4] Wardlaw W P. Row Rank Equals Column Rank. Mathematics Magazine, 2005, 78(4):316
- [5] Nowick A S. Crystal properties via group theory. Cambridge University Press, 1995
- [6] Lemmermeyer F. Reciprocity laws: from Euler to Eisenstein. Springer, 2000

7) 再次强调, 叉乘只在三维空间中是完好定义的。不要求唯一性也可以出现在七维空间中。

读者和编者

订阅《物理》得好礼

——超值回馈《岁月留痕——<物理>四十年集萃》

为答谢广大读者长期以来的关爱和支持, 《物理》编辑

户名: 中国科学院物理研究所

帐号: 112 501 010 400 056 99

(请注明《物理》编辑部)

咨询电话: 010-82649266; 82649277

Email: physics@iphy.ac.cn

部特推出优惠订阅活动: 向编辑部连续订阅2年《物理》杂志, 将获赠《岁月留痕——<物理>四十年集萃》一本(该书收录了从1972年到2012年在《物理》发表的40篇文章, 476页精美印刷, 定价68元, 值得收藏)。

希望读者们爱上《物理》!

订阅方式(编辑部直接订阅优惠价180元/年)

(1) 邮局汇款

收款人地址: 北京603信箱, 100190

收款人姓名: 《物理》编辑部

(2) 银行汇款

开户行: 农行北京科院南路支行

