物理学咬文嚼字之八十一
物理学中的括号文化

曹则贤†
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2016－11－24收到
† email：zxcao@iphy.ac.cn
DOI：10.7693/wl20161209

思想的准确会造成语言的准确。
——福楼拜[1)]

摘　要　　形状各异的括号提升了文字的表达能力。在物理表述中，恰当定义的括号让复杂的内容变得清晰明澈。

1　漫说括号

在语文和算术课上我们曾遇到过形状各异的括号。汉语的括是两手相对叉开的形象(此为摸鱼的标准动作)，作动词有捆束、结扎的意思，见于囊括、概括、括约等词。括号包括小括号( )，英文为round brackets或者parentheses；中(方)括号[ ]，英文为square bracket；尖括号〈 〉，英文为angled bracket；大(花)括号{ }，英文为curly brackets or braces。这几个西文词里面，parenthesis，原意是to put aside，意思是说它是用来强调附加内容的，parenthesis单指 (或者)，复数形式parentheses才是( )。Brace，来自希腊语的brachys[2)]，形容词，短；brace指代人的上臂，作动词用则to brace，to embrace就是抱的意思，( )就是这个动作的形象。那个可以对应所有括号的英文词是bracket，作为名词其本意为弯角状托架、支架(any angle-shaped support，especially one in the form of a right triangle)，例如壁突式烛台(sconce)就是a **bracket** attached to a wall for holding candles。Bracket被引申为括号，是因为“对称地加上弯曲的支撑”就是〈 〉或者[ ]的形象。相应地，bracket也就有了“归为一类”和“一路货色”的意思，比如bracketed in history(在历史上被归为一类)，in the super-smart bracket (跻身于巨颖者流)，等等。

括号可是人类文化史上的重大发明。一开始人们只发明了字符，一堆字符连在一起，时间长了就弄不清楚如何断句了。语言作为文明的载体，文明的进步要求载体的升级。新的词语不断被造出来，辅助性的符号也逐步被加入到文字当中。据说远在甲骨文、青铜器铭文时代，中国就已有标点符号的萌芽了。清章学诚《丙辰札记》考证：“点句之法，汉以前已有之。”如今通用的西文标点符号，是在清末输入中国的。括号突出强调解释某些内容，不同的括号有稍显不同的功用。当作者想添加内容而又不想改变句子的意思或结构的时候，就会用到括号。括号提升了文字的表达能力，也为数学、物理带来了简洁的记号。夸张点说，数学、物理中存在着独特的括号文化，谁要是不引入一个括号都不好意思说自己是大物理学家。本文论及的括号，英文文献一般都是用的bracket一词。

2　数学括号

数学中引入括号的基本功能是要强调括号里的内容。小时候背算法口诀，清楚记得有句“先做括号里，后做括号外”，而且是按照( )，[ ]，{ }的顺序。再稍后些学了点初等数学，知道bracket还真是括号，它把一些具有某种性质的对象给约束到一起，构成集合(set)或矩阵(matrix)之类更复杂的数学对象。括号在数学里特别重要的一个用法是

1) 据说是法国作家Gustav Flaubert说的，未见原文。

2) 那个我总也记不住的brachystochrone curve明明是最短时间曲线，却偏偏被人给译成了速降线。Brachystos+chrone是希腊语 βράχιστος χρόνος 的拉丁语转写。

作为某些算法的简记，这些括号有不少，笔者基本不懂甚至会选择主动回避，但有些括号可是学物理的人不得不面对的。比如矢量空间上的内积，空间及其对偶空间(dual space)之间元素的配对(pairing)，其算法常可以表示成括号。比如，空间V中的一个元素x和其对偶空间V^*中一个函数φ的配对，就可以表示成括号的形式$\varphi(x)=[\varphi, x]$。这样的括号比较简单，只具有记号的功能。

一个随处可见却让我等学物理者感到畏惧的括号是矢量场的李括号(Lie[3] bracket)。对于一个n-维流形M上的任意两矢量场(假设在某个局域坐标系下) $X=a^i(x^1, \cdots x^n)\partial_{x^i}$，$Y=b^i(x^1, \cdots x^n)\partial_{x^i}$，可定义李括号$[X, Y]=XY-YX$[4]，也即对于定义于流形$M$上的任意函数$f$，有$[X, Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$。从定义上看，李括号$[X, Y]=XY-YX$是个二阶微分算符，但是这里的减号使得它实际上仍是一阶微分算符，即结果还是一个矢量场。不过，必须指出，如果不是单看数学的形式而是从一开始就加入物理的量纲作为指标的话，则X，Y是一阶的，李括号$[X, Y]$总是二阶的，不可(轻易)混淆。李括号的这些性质，可以用量子力学中角动量的对易关系$[J_i, J_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$加以参详。李括号，又叫commutator[5]，它把流型上的矢量场的集合给变成了李代数(Lie algebra)。注意，对于$[X, Y]=XY-YX$这样的表示，其中涉及的算法各有不同。对于一个矩阵李群，其李代数的元素也都是矩阵，则李括号$[X, Y]=X*Y-Y*X$，涉及的就是矩阵乘法。

对李括号的一个推广是Frölicher—Nijenhuis括号，其对象是取值为矢量的微分形式。

3 经典力学中的泊松括号

在哈密顿力学中，有一个重要的二元操作(binary operation)就是泊松括号(Poisson[6] bracket)。哈密顿力学采用正则坐标系(canonical coordinate system)，即由正则坐标q_i及其对应的正则动量p_i所组成，它们满足正则方程(Hamilton's canonical equation)

$$\dot{q}_i=\partial H/\partial p_i,$$
$$\dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i.$$

这样，对于任意的定义在扩展相空间上的函数$f(q_i, p_i; t)$，其哈密顿运动方程为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f=\{f, H\}+\frac{\partial}{\partial t}f$，这其中的括号{ }定义为，对函数$f$，$g$，有$\{f, g\}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$，这就是泊松括号。泊松括号是正则不变量，是相空间之几何性质symplectic[7] structure (辛结构)的代数对应，相空间上的函数构成的矢量空间是关于泊松括号的李代数。泊松括号通向量子化之路，量子化将泊松括号变形为Moyal括号。

4 量子力学里的狄拉克括号

1925年，年轻的海森堡试图找出决定原子谱线强度的物理。他从谐振子模型[8]出发，结果得到了两个表达式

$$\sqrt{2}\,x(0)=\sqrt{h/2\pi}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ & & 0 & & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{2}\,p(0)=$$
$$\sqrt{h/2\pi}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sqrt{1} & 0 & 0 & \\ -\mathrm{i}\sqrt{1} & 0 & \mathrm{i}\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & -\mathrm{i}\sqrt{2} & 0 & \mathrm{i}\sqrt{3} & \\ & 0 & -\mathrm{i}\sqrt{3} & 0 & \\ & & 0 & & \cdots \end{pmatrix}.$$

这是什么东西，怎么往下继续？海森堡没主意了，他把这些初步结果往玻恩教授的桌上一扔，去英国开会去了。玻恩发现，由这两个无穷阶矩阵可得到关系式$xp-px=\mathrm{i}\hbar$[9]。这样的非对易的(non-commutative)关系，即$xp-px\neq 0$，让x，p不再

3) Sophus Lie(1842—1899)，挪威数学家。

4) $AB-BA$这样的表述，英语的读法可以是AB minus the flipped term(减去调换顺序得到的项)。

5) 动词commute的字面意思是共变、来回变。Commutator在电磁学中是换向器，改换电流的方向；在量子力学被翻译为对易子。$AB-BA=0$，不管具体算法是如何定义的，则A，B两者commutate。有人宣称commutator $[A, B]=AB-BA$可衡量关于可对易性的缺失(lack of commutativity)，但事情没那么简单，许多时候，比如在角动量的情形，它带来新的代数。另，$[A, B]=AB+BA$称为anti-commutator，反对易子。

6) Siméon Denis Poisson(1781—1840)，法国数学家。Poisson的发音应是普瓦松，如果记不住拼法，请记住这个法语词的意思是鱼。

7) Symplectic被按照sym-的发音给译成了“辛”，反映了我国科学家把科学严肃认真地不当一回事的悠久历史。Symplectic，是Hermann Weyl 1939年根据complex一词仿造的，词干相同，而前缀sym-和com-都有一起的意思，其本意为编织到一起(braided together)。想想复数有按照一定算法联系到一起的两个部分，而symplectic geometry和哈密顿正则方程(两个)有关，就容易记住了。

8) 谐振子啊谐振子，有人说谐振子模型撑起了理论物理75%的天下，绝不为过。笔者注意到，谐振子包含着深刻的矛盾，它的势能是绝对的，但又会把势能的相对性表现出来。

9) 在后来的矩阵力学语境中，考虑到这里的x，p被当成矩阵或者算符，则正确的表达应该是$xp-px=\mathrm{i}\hbar I$，其中I是单位矩阵或者恒等算符。

图1 Ernst Pascual Jordan (1902—1980)，其对量子力学的贡献未获充分的认可

是经典意义下的物理量，它们后来被称为 q-numbers。进一步地，约当(图1)发现若 $xp-px=\mathrm{i}\hbar$ 成立，则有 $\left[p, x^n\right]=-\mathrm{i}\hbar n x^{n-1}$，这相当于说可将 p 当成算符，记为 $\hat{p}$，$\hat{p}\mapsto-\mathrm{i}\hbar\partial_x$ (Commutation is analogous to differentiation)[10]。这个动量算符相当于对坐标 x 求一阶微分的等价关系使得来年出现的薛定谔方程自然而然是一个二阶微分方程，这和由构造包含 $(\partial_x)^2$ 项的拉格朗日量从而经过 Euler—Lagrange 方程来得到一个二阶微分方程形式的运动方程，有异曲同工之妙。哪能不异曲同工呢，本来都是冲着构造一个二阶微分方程去的。物理学，还能有啥？

玻恩、海森堡和约当引入了 x 和 p 在量子力学下的对易关系 $[x, p]=\mathrm{i}\hbar$ 后，接下来的问题是，对于任意两个物理观测量来说，这个对易关系是什么样的？1926年，狄拉克天才地从两对算符乘积的泊松括号出发得到了这个关系式。由泊松括号 $\{u_1u_2, v_1v_2\}$ 出发，可得 $\dfrac{u_1v_1-v_1u_1}{\{u_1, v_1\}}=\dfrac{u_2v_2-v_2u_2}{\{u_2, v_2\}}$，这说明 $[u, v]=uv-vu=k\{u, v\}$，其中 k 是个普适的常数。注意到 $[x, p]=\mathrm{i}\hbar\{x, p\}=\mathrm{i}\hbar$，因此可认定 $k=\mathrm{i}\hbar$，从而对任意的算符对，其量子对易式和经典泊松括号间有关系 $[u, v]=\mathrm{i}\hbar\{u, v\}$。这段内容从数学的角度看，没有什么正确性的保证，但它却是构造物理理论的典范。这个量子力学中的对易式 $[u, v]=uv-vu$ 被称为狄拉克括号。狄拉克得到这些结果与他熟悉经典力学的内容有关[11]。根据哈密顿力学中对时间微分(假设 f 不显含 t)的 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=-\{H, f\}$，可导出对空间的微分应该是 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}q=\{p, f\}$。将泊松括号 $\{\,\}$ 换成狄拉克括号，则得到 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=[H, f]/\mathrm{i}\hbar$；$\mathrm{d}f/\mathrm{d}q=-[p, f]/\mathrm{i}\hbar$[1]。从这两个括号的角度来看，经典力学与量子力学之间是类比的关系[2]，哪里有什么革命之说！

泊松括号和正则对易子，即狄拉克括号，是量子化的形式基础。不过，1946年Groenewold指出，量子对易关系和泊松括号之间一般性的系统的对应关系并不成立[3]。考虑到正则动量定义带来的对相空间的约束以及其它约束条件的存在，别说狄拉克括号，实际上泊松括号就不是个简单的问题，此处不论。

5 量子力学之狄拉克bra—ket记号

聪明的狄拉克继续拓展符号的用途。他把量子力学波函数的内积 $\int_\Omega\varphi^*\psi\mathrm{d}V$ 简记成 $\langle\varphi|\psi\rangle$，把积分 $\int_\Omega\varphi^*A\psi\mathrm{d}V$ 简记成 $\langle\varphi|A|\psi\rangle$，其中 $|\psi\rangle$ 可理解为波函数 ψ 的另一种写法，$\langle\psi|$ 为波函数 ψ 之复共轭 ψ^*。进一步地，利用这个括号加上量子数可看作是对波函数的简记，比如对应量子数 n，l，m 的电子波函数可以直接写成 $|n, l, m\rangle$，这让量子力学的推导省力多了。实际上，这个括号里可以加入任何关于状态的标签，比如 $|\downarrow\rangle$ (自旋向下态)，$|\uparrow\rangle$ (自旋向上态)，$|\mathrm{ground}\rangle$ (基态)，$|n\rangle$ (粒子数为 n 的状态)，等等。把 $|\;\rangle$ 理解为一列($1\times n$ 矩阵)，$\langle\;|$ 理解为一行($n\times1$ 矩阵)，$|A\rangle\langle B|$ 则可当作一个线性算符。把 $|A\rangle\langle B|$ 作用到一个右矢量 $|P\rangle$ 上，假设结合律成立的话，则有 $|A\rangle\langle B\|P\rangle=c|A\rangle$，结果为右矢量 $|A\rangle$。量子力学中的归一化条件则是 $\langle\psi|\psi\rangle=1$，而用本征态表示单位算符，形式则为 $\sum_n|n\rangle\langle n|=I$。

Dirac的这套记号非常方便，给量子力学的数学推导带来了清新的风格。狄拉克把英文的括号一词，bracket，拆分开来分别命名 $\langle\;|$ (bra) 和 $|\;\rangle$ (ket)，风格轻灵还带点儿谐谑。Bra 是 bracket 的前半部分，它也是名词 brassiere[12] 的前半部分，而 bra-ket 的图示 $\langle\;|-|\;\rangle$ 正好是 bra 的形象。为了这一对词的翻译，中

10) 细节请参阅著名的矩阵力学创立三篇，即署名为海森堡、玻恩+约当和玻恩+海森堡+约当的 trilogy of matrix mechanics。

11) 笔者在获得博士学位之前习得的经典力学知识，恐只是刚触到经典力学的毛发梢。

12) Brassiere 一词1907年首次出现在 *Vogue* 杂志上。Brassiere，an undergarment worn by women to support the breasts or give a desired contour to the bust(一种女性用来支撑乳房或者给胸部塑形的小衣)。

国学者可是伤透了脑筋。通行的译法为左矢、右矢，此前有一个译法为包矢、括矢，这两种译法都明确地告诉我们它们代表的是〈｜和｜〉中的哪一个，但形象上偏离较远。为了考虑〈｜和｜〉的左右对称性，愚以为孑、孓和爿、片也是不错的选择。还有人建议用彳和亍，我看也许“行”。一些文献中将〈｜和｜〉译成刀矢、刃矢，不知是出于什么考虑。个人观点，用左矢、右矢的译法凑合就挺好。

6 量子力学之南部括号

1973年，南部阳一郎[13)]针对奇数维相空间的哈密顿力学，提出了一个推广的哈密顿演化方程 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial(H_1,\ H_2,\ F)}{\partial(x,\ y,\ z)}$，此方程的右侧为函数 H_1，H_2，F 关于相空间坐标 x，y，z 的雅可比行列式[4]。它可以改写成 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\{H_1,\ H_2,\ F\}$ 的形式，右侧的括号即为南部括号，定义为 $\{A,\ B,\ C\}\equiv\varepsilon_{ijk}\partial_i A\partial_j B\partial_k C$。这样的括号满足 skew-symmetry[14)]，即 $\{A_1,\ A_2,\ A_3\}=(-1)^{\varepsilon(p)}\{A_{p(1)},\ A_{p(2)},\ A_{p(3)}\}$，其中的 $(p(1),\ p(2),\ p(3))$ 是 $(1,\ 2,\ 3)$ 的一个置换。南部括号及其量子化的内容，笔者不懂，此处不论。

7 雅可比恒等式

对于前述的括号表示的二元操作如泊松括号、李括号、狄拉克括号等，都满足雅可比恒等式(Jacobi identity)，即对于 $(a,\ b)=ab-ba$ 一类的括号，括号 $(a,\ (b,\ c))$ 的各偶交换项之和为零，即 $(a,\ (b,\ c))+(b,\ (c,\ a))+(c,\ (a,\ b))=0$。从泊松括号、李括号的反对称性出发，容易证明它们都满足雅可比恒等式。

在论述类似反对易括号的各类文献中，一般都会提及该括号满足雅可比恒等式。但是，满足雅可比恒等式有什么意义，却未见提及。笔者想不通雅可比恒等式有什么意义，就更想不通各类作者为什么总是提那么一句而没有下文。不过，笔者最近终于看到了数学家阿诺德给出的雅可比恒等式的一个几何意义：“因为存在雅可比恒等式，所以三角形的三个高交于一点。”

8 结语

物理学的目的是试图理解这个世界，因此它说到底也是一门语言。物理研究的过程，一定意义上是一个构造一门通用语言的过程。这门语言的字词和部分语法是数学的，但物理学要费心构造自己的文法和最终文本。狄拉克说，物理学的进步需要理论表述越来越先进的数学[5]。实际上不仅是更先进的，狄拉克还强调它应该是更抽象的。各种括号的引入，就是物理学语言中的一个惯用结构模式。

顺便说一句，括号的泛滥是物理学“二”的表现。本篇中涉及的关键概念，如乘积，对易，二元算符或者操作，双线性(bilinearity)，里面贯穿的一个词都是“二”。

13) 南部阳一郎(1921—2015)，日本物理学家，2008年度诺贝尔物理学奖得主。

14) Skew是有歪的、斜的等意思。Skew-symmetry被译成斜对称性、反对称性都没能说出它真正的意思。Skew，原意有altered的意思，指的是 ε_{ijk} 的值随着 (ijk) 的重排交替地为1和－1。个人建议将skew-symmetry译成交替对称，反对称应该留给anti-symmetry一词。

参考文献

[1] Coutinho S C. The many avatars of a simple algebra. Amer. Math. Monthly，1997，104：593

[2] Dirac P A M. On the analogy between classical and quantum mechanics. Review of Modern Physics，1945，17 (2-3)：195

[3] Groenewold H J. On the principles of elementary quantum mechanics. Physica，1946，12(7)：405

[4] Nambu Y. Generalized hamiltonian dynamics. Phys. Rev. D，1973，7：2405

[5] Goddard P. Magnetic Monopoles. In：Taylor J G (ed.). Tributes to Paul Dirac. Adam Hilger，1987