

# Majorana 费米子与拓扑量子计算\*

朱国毅 王瑞蕊 张广铭<sup>†</sup>

(清华大学物理系 低维量子物理国家重点实验室 北京 100084)

2016-08-23 收到

<sup>†</sup> email: gmzhang@tsinghua.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20170303

## Majorana fermions and topological quantum computation

ZHU Guo-Yi WANG Rui-Rui ZHANG Guang-Ming<sup>†</sup>

(State Key Laboratory for Low-Dimensional Quantum Physics and Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**摘要** 1937年, Majorana发现Dirac所提出的相对论性协变的电子波动方程, 在另一个表象下所得解可以描述不带电荷的费米子, 具有与Dirac费米子不同的性质。在基本粒子领域, 对这种Majorana费米子的寻找至今一直在进行中; 而在凝聚态物理领域, 对拓扑超导体和分数量子霍尔态的研究, 人们已经发现了与Majorana费米子有相同行为的准粒子。特别是在二维拓扑超导体中出现的涡旋元激发包含了零能量的Majorana准粒子, 它们在交换操作下表现出非阿贝尔的统计性质, 因而有望借以实现拓扑量子计算。文章系统地介绍了凝聚态物质系统中获得Majorana费米子的理论模型和物理实现, 并进一步介绍了与之相关的拓扑量子计算的实现方法。

**关键词** Majorana 费米子, 超导电性, 量子计算

**Abstract** In 1937, Majorana noticed that in a different representation the relativistic wave equation for electrons proposed by Dirac has a solution describing chargeless neutral fermions, which have completely different properties from Dirac fermions. In particle physics, the search for such Majorana fermions is still being pursued, while in condensed matter physics it has already been found that certain kinds of quasiparticles in the low-energy excitations of topological superconductors and fractional quantum Hall effects share a similar behavior to Majorana fermions. In particular, the vortex excitations in two-dimensional topological superconductors include zero-energy Majorana fermion modes, which exhibit non-abelian anyonic statistical properties under exchange operations, leading to the possibility of topological quantum computation. In this article we will review the physical models and realization of Majorana fermions, and then discuss the corresponding implementation of topological quantum computation.

**Keywords** Majorana fermions, superconductivity, quantum computation

\* 国家自然科学基金(批准号: 20121302227)资助项目

## 1 引言

70多年前, Ettore Majorana 在另一套表象下求解了 Dirac 相对论协变的电子运动方程, 发现了一种不带电荷的费米子, 它的反粒子正是自身。从此, 这种以 Majorana 命名的中性费米子便一直是人们寻找的物质粒子。在基本粒子领域, 幽灵般的中微子曾一度被认为很可能是 Majorana 费米子, 至今在世界上仍然有许多实验组在坚持不懈地探测中微子作为 Majorana 费米子的可能性。超对称理论预言所有的玻色子与费米子都存在其超对称伴侣, 而玻色子的超对称伴侣即是 Majorana 费米子。在暗物质被发现后, 关于暗物质组成也有很多设想, 其中相当引人注目的弱相互作用有质量粒子(WIMP)便很可能是这种 Majorana 费米子<sup>[1]</sup>。

在另一个尺度上, 凝聚态物理领域的科学家们也同样致力于寻找 Majorana 费米子。虽然凝聚态系统的基本组分只包含电子与离子, 所涉及到的基本相互作用只有电磁相互作用; 然而从演生论的观点来看, 复杂的凝聚态系统可以演生出十分丰富的物理现象和低能元激发准粒子。例如, 在超导体中, 电子规范对称性的破缺提供了产生 Majorana 费米子的可能性。Majorana 费米子不带电荷, 所以超导体中的电子和空穴叠加后的准粒子类似于 Majorana 型粒子。通常的  $s$  波超导体是自旋相反电子的配对, 自旋的存在使得这样的准粒子并不等同于其反粒子。为了“冻结”电子的自旋自由度, 可以通过破坏其宇称或者时间反演对称性来解除能带的自旋简并, 等效地得到“无自旋”的费米子。由于费米统计, 这样得到的无自旋费米子的配对必须服从奇宇称, 这意味着它们必须以非平庸的形式配对, 其中最简单的就是一维  $p$  波和二维  $p+ip$  超导配对。这样, 最终得到的无自旋费米子的超导态具有非平庸的拓扑性质, 通常称为拓扑超导, 而 Majorana 费米子可以出现在拓扑超导体系的缺陷附近或边缘上。

凝聚态物理领域的科学家们对 Majorana 费米子的寻找, 除了出于基础理论的研究外, 还有另一重重大的意义: 关于拓扑量子计算的物理实

现。在  $2+1$  维时空中, 粒子按照相互交换所导致的效应不仅仅分为玻色子与费米子两类, 还有介于两类之间的任意子。而任意子又分为两大类, 阿贝尔与非阿贝尔任意子, 前者在相互交换下波函数只改变一个任意相位, 后者在相互交换下会导致量子态的改变。由于低维拓扑超导体系中产生的零能量 Majorana 费米子(简称 MZM)总是伴随着拓扑缺陷(比如涡旋), 所以 MZM 之间的交换呈现出任意子的统计性质; 而 MZM 作为“半个电子”, 其交换会改变由成对 MZM 构成的量子态。因此, 一个包含  $2N$  个 MZM 的物理体系具有  $2^{N-1}$  维基态空间, 可以用作  $N-1$  个量子比特来存储信息; 通过交换 MZM, 可以实现量子态在基态空间中的转换, 即改变量子比特的状态, 可实现拓扑量子计算。同时, 任意子的存在受拓扑保护, 局域的环境干扰无法湮灭掉一个任意子。另一方面, 用做量子比特的基态空间受到超导能隙的保护, 并且用于存储信息的 MZM 在空间上是分隔开的, 这意味着信息的编码是非局域的。由于环境噪声以局域的形式作用于体系, 只有高阶微扰才能改变基态空间中量子比特的状态, 这使得环境噪声对量子态的干扰极大地被抑制。因此, 拓扑量子计算可以在硬件层面具有容错特性, 并且能有效地抵挡环境的退相干效应。

本文的第一部分从相对论协变的电子的运动方程出发, 简述 Majorana 费米子的由来和基本性质。然后, 分别介绍一维和二维的拓扑超导体系, 从中可以看到 MZM 如何在这些体系中产生, 如何通过常规  $s$  波超导来实现拓扑超导体系, 以及如何探测 MZM 存在的实验方案。在第三部分, 简要介绍了拓扑量子计算的基本概念, 并以 MZM 为例说明如何通过交换非阿贝尔任意子来构造量子门操作, 进而实现拓扑量子计算。

## 2 Majorana 费米子

### 2.1 Majorana 费米子的提出

Schrödinger 方程是描述微观粒子运动的非相

对论性量子力学方程，由经典的能动量关系： $E = p^2/2m$  (其中  $E$  为能量， $p$  为动量， $m$  为物体的质量)。运用算符分别对应下列关系式：

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\nabla, \quad (1)$$

并将其代入能动量关系式中，可得 Schrödinger 方程：

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi. \quad (2)$$

同理可推广到相对论情形，由相对论的能动量关系： $E^2 = p^2 + m^2$ ，用算符对应式代入，得 Klein—Gordon 方程：

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2\right)\Psi = 0. \quad (3)$$

然而该方程所引导出的守恒流可能出现负几率，这是由 Klein—Gordon 方程中波函数对时间的两次微分导致的。于是 Dirac 提出了一个对时间和空间都只作一次微分的线性方程：

$$i\frac{\partial\Psi(x)}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi(x), \quad (4)$$

其中  $x = x^\mu = (t, \mathbf{x})$  表示 4 维的时空坐标， $\mathbf{x}$  表示 3 维的空间坐标， $\alpha_i, \beta (i=1, 2, 3)$  为待定的系数矩阵。将(4)式对时间微分并与(3)式比较，得到  $\alpha_i, \beta$  满足如下关系：

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \delta_{ij}, \quad \alpha_i^2 = 1, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1, \quad (5)$$

这正是 Clifford 代数所满足的性质。在 3+1 维时空中，满足此代数的  $\alpha_i, \beta$  是 4 维的矩阵。Dirac 给出了一组满足此关系的 4×4 矩阵。在这个方程里，4×4 矩阵意味着 Dirac 引入了一个不同于 3+1 维时空的 4 维线性空间，波函数作为其运动方程的解可以看成是该空间中的矢量，称为旋量，对应的空间称为旋量空间。为了将 Dirac 方程(4)式写为 Lorentz 协变的形式，(4)式两边同时左乘  $\beta$  并引入  $\gamma$  矩阵  $\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha_i)$ ，得

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = (\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0, \quad (6)$$

其中  $p_\mu = (i\partial_t, -\mathbf{p})$ ， $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ 。

在 Dirac 表象下，

$$\bar{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中  $\sigma_0$  是二阶单位矩阵， $\sigma_i$  是泡利矩阵：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

后来，Weyl 和 Majorana 分别给出不同的矩阵选择方式，它们分别描述不同的物质粒子。在 Weyl 表象下，

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

在 Majorana 表象下，

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^0 &= i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^1 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\gamma}^2 &= i \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^3 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

注意(10)式所示的矩阵  $\bar{\gamma}^i (i=0, 1, 2, 3)$  为纯虚数矩阵，则对应的 Majorana 表象下的 Dirac 方程式(6)为纯实的方程，因此 Majorana 表象下方程和解都是实的。由于 Dirac 旋量是 4 分量复数的，这等于说，一个 Dirac 旋量等价于两个相同质量的 Majorana 旋量(全实的 Majorana 旋量可分别充当 Dirac 旋量的实部或虚部)。

从另一个角度看，Majorana 费米子也可以用 Dirac 费米子来构成<sup>[2]</sup>：在 Weyl 表象下，Dirac 方程的解可以写为  $\Psi = (\psi_R, \psi_L)^\top$ ，将解代入(6)式，有

$$\begin{cases} (i\partial_t - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\psi_R - m\psi_L = 0, \\ (i\partial_t + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\psi_L - m\psi_R = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Majorana 所要寻找的是一个正反粒子等同的粒子，即

$$\Psi^c(x) = \Psi(x), \quad (12)$$

从而得到两个独立的方程：

$$\begin{cases} (i\partial_t - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\psi_R - im_R\sigma_2\psi_R^* = 0, \\ (i\partial_t + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\psi_L + im_L\sigma_2\psi_L^* = 0. \end{cases} \quad (13)$$

求解上述方程可以发现，只有当  $E=0$  时，Majorana 费米子方程的解是定态的波函数。

## 2.2 凝聚态中的 Majorana 费米子

凝聚态体系中的基本研究对象是电子，所涉及的基本相互作用是电磁相互作用。作为一个量子多体系统，其低能集体激发会演生出许多重要

的基本元激发准粒子。另外，金属系统都存在一个费米面，费米面以下是填满了电子的费米海，这恰好是 Dirac 曾经所提出的试图用来解释反粒子的物理图像。在上文中我们已经看到 Majorana 费米子不具备 Dirac 费米子所拥有的  $U(1)$  规范对称性，正是这种规范对称性保证了 Dirac 费米子的电荷守恒。也就是说，要在凝聚态里寻求 Majorana 费米子，首先我们需要一个破缺  $U(1)$  对称性的费米系统。超导或超流态正符合这个要求。超导体具有电子、空穴对称性，其准粒子由电子、空穴线性叠加构成，这些特征都暗示着 Majorana 费米子在超导系统中存在的可能性，并且只有零能量的 Majorana 费米子是能量本征态。MZM 的存在导致了一个简并的基态空间，并被单粒子激发能隙保护，从而有望用于拓扑量子计算，本文后面会对这一点做详细介绍。事实上，严格推导可发现，在具有电子、空穴对称性的超导体中，只要存在零能量的激发模式，该激发模式就能满足正反粒子相同的条件，可以被确定为 MZM，所以我们接下来介绍的寻找 Majorana 费米子的目标都成为寻找超导体中的零能激发模式。

在介绍可产生 MZM 的模型之前，我们根据 (13) 式，将一个电子的产生或湮灭算符分解成“实部”和“虚部”的叠加，其实部和虚部各对应于两个独立且局域在空间同一点上的 Majorana 费米子：

$$c_j = \frac{1}{2}(\gamma_{j1} + i\gamma_{j2}), c_j^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{j1} - i\gamma_{j2}), \quad (14)$$

$$\gamma_{j1} = c_j^\dagger + c_j, \gamma_{j2} = i(c_j^\dagger - c_j). \quad (15)$$

湮灭算符  $\gamma_{\alpha}$ ， $\gamma_{\beta}$  满足费米子的反对易关系：

$$\{\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}\} = 2\delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}. \quad (16)$$

费米系统的粒子数算符为

$$n_j = c_j^\dagger c_j = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_{j1}\gamma_{j2}). \quad (17)$$

由费米子的泡利不相容原理， $n_j$  取值为 0 或 1，则对应 MZM 对的取值  $i\gamma_{j1}\gamma_{j2}$  为 -1 和 1。两个 MZM 等价于一个 Dirac 电子，因此，在由电子作为基本组元所构成的凝聚态体系中，MZM 一定成对出现。一般来说，Majorana 费米子只是电子的一个等价表象，通常的电子都可以等价地看成

一对 Majorana 费米子的线性组合，而我们需要去寻找的是局域在空间不同点上的 Majorana 费米子。

### 3 Majorana 费米子的物理实现

#### 3.1 一维无自旋费米子 $p$ 波超导态

一维无自旋费米子体系的非平庸拓扑超导态中就存在零能隙边缘激发 MZM。由于费米统计，无自旋的费米子体系其配对机制必定具有奇宇称，最简单的形式即由 Kitaev 给出的  $p$  波超导模型<sup>[3]</sup>：

$$H = \sum_j \left[ -t(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j) - \mu \left( c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2} \right) + (\Delta c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger + \Delta^* c_{j+1} c_j) \right], \quad (18)$$

式中  $j$  标记一维链上的格点，共  $N$  个格点，第一项表示最近邻格点间电子的跃迁， $t$  为跃迁概率幅，第二项表示化学势，第三项表示最近邻格点间的配对，其中  $\Delta$  为平均场近似下超导配对序参量。不难看出该配对形式具有奇宇称(在宇称反演下，左右反转，那么由于费米子算符的反对易性会导致一个负号的出现)。该配对项在连续极限下相当于  $c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger \approx c^\dagger(x) \partial_x c^\dagger(x)$ ，因而称为  $p$  波超导。事实上，对于无自旋费米子超导体来说，该配对的奇宇称是无法回避的，这是因为费米子的泡利不相容原理。该  $p$  波超导的拓扑属性可以从动量空间中得到体现。取周期性连界条件，进行傅里叶变换，得到动量空间的哈密顿量为

$$H = \sum_q \left[ (-2t \cos q - \mu) c_q^\dagger c_q + i\Delta (\sin q) c_q^\dagger c_{-q}^\dagger + i\Delta^* (\sin q) c_q c_{-q} \right]. \quad (19)$$

利用 Bogliubov 变换，得到准粒子激发谱为

$$E(q) = \pm \sqrt{(2t \cos q + \mu)^2 + (2|\Delta| |\sin q|)^2}. \quad (20)$$

当化学势处在  $|\mu| = 2t$  时，能隙关闭，这对应于一个二级相变，分隔开两个相，分别对应于拓扑超导相和平庸相。这两个相的性质可以通过如下两种极限情形显示出来。

利用(14)式将(18)式改写成用 Majorana 费米子表示的公式：

$$H = \frac{i}{2} \sum_j [-\mu \gamma_{j,1} \gamma_{j,2} + (t + |\Delta|) \gamma_{j,2} \gamma_{j+1,1} + (-t + |\Delta|) \gamma_{j,1} \gamma_{j+1,2}] \quad (21)$$

(i) 当参数选择  $|\Delta| = t = 0$  时, 有

$$H = -\mu \sum_j \left( c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2} \right), \quad (22)$$

这时超导消失, 对应于一个平庸态。

(ii) 当选择参数  $|\Delta| = t, \mu = 0$  时, 有

$$H = it \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{j,2} \gamma_{j+1,1} \quad (23)$$

哈密顿量只包含相邻格点的交叉项, 为寻找其基态, 重新定义一组 Dirac 费米子:

$$a_j = \frac{1}{2}(\gamma_{j,2} + i\gamma_{j+1,1}), \quad a_j = \frac{1}{2}(\gamma_{j,2} - i\gamma_{j+1,1}) \quad (24)$$

(23)式可写为

$$H = 2t \sum_{j=1}^{N-1} \left( a_j a_j - \frac{1}{2} \right), \quad (25)$$

其基态由重新定义的费米子  $a_j$  的占有数决定。注意到哈密顿量公式(23)中不包含  $\gamma_{1,1}$  和  $\gamma_{N,2}$ , 它们为 MZM 且位于一维链的两端(1 和  $N$  格点上), 这是非平庸的拓扑态。

Kitaev 链给出了两个态——拓扑态和平庸态。当体系的体激发谱中存在能隙且基态简并时, 出现拓扑态。当  $|\Delta| = t = 0$  时, 存在激发能隙, 但基态无简并, 为平庸态; 当  $|\Delta| = t, \mu = 0$  时, 存在无能隙边缘态激发, 因此为非平庸的拓扑态。以上两相的示意图和相图见图 1。

Kitaev 模型成功地说明了在无自旋费米子的  $p$  波拓扑超导相中存在 MZM。然而材料中的电子都是带有自旋的, 一般常规金属体系都具有自旋简并, 由宇称和时间反演对称性所保护。为了得到“无自旋”的费米子, 可以设法打破二者之一的对称性, 得到一个无自旋简并的能带, 则该能带对应的准粒子等效于无自旋的费米子。在凝聚态中实现这一点的最自然方式就是借助自旋轨道耦合。比如,  $s$  波超导体上的一维量子导线借助自旋轨道耦合效应可以实现 Kitaev 模型<sup>[4]</sup>, 体系的哈密顿量可表示为

$$H = \int dx \left[ \psi^\dagger \left( -\frac{1}{2m} \partial_x^2 - \mu + i\alpha \sigma_2 \partial_x + V_x \sigma_1 \right) \psi + (\Delta \psi_1 \psi_1 + h.c.) \right], \quad (26)$$

其中  $\psi^\dagger i\alpha \sigma_2 \partial_x \psi$  描述自旋轨道耦合, 它解除了能带的自旋简并;  $\psi^\dagger V_x \sigma_1 \psi$  描述外加的横向磁场 ( $V_x = g\mu_B B$ ), 它进一步劈裂能带, 得到两支自旋杂化的无简并能带; 超导的配对项 ( $\Delta \psi_1 \psi_1 + h.c.$ ) 将相反自旋的电子进行配对, 诱导出自旋杂化能带的带内准粒子之间的配对, 从而等效于无自旋的费米子  $p$  波配对, 见图 2。当

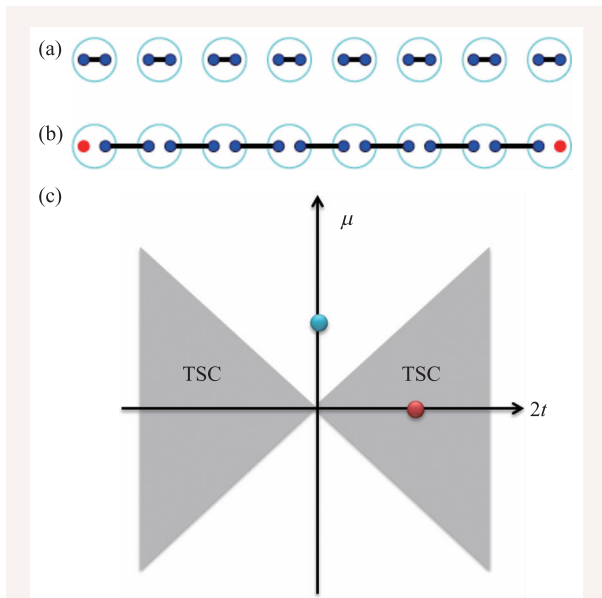


图 1 Kitaev 链具有的平庸态和拓扑超导态 (a)  $|\Delta| = t = 0$  时的基态示意图, 每一格点上的两个 Majorana 费米子形成 Dirac 费米子; (b)  $|\Delta| = t, \mu = 0$  时的基态示意图, 相邻两格点上的两个 Majorana 费米子形成 Dirac 费米子; (c) 参数空间  $\mu-2t$  中系统的基态相图, 2 个点分别表示(a)和(b)的参数选取

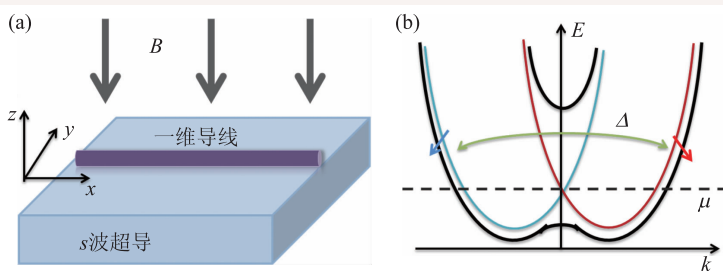


图 2 一维  $p$  波拓扑超导态的实现 (a) 一维纳米导线利用自旋-轨道耦合效应和超导近邻效应, 在有外磁场情形下可以制备出  $p$  波超导并产生 MZM; (b) 体系的能带结构: 自旋轨道耦合使能带劈裂为红色、蓝色两支, 加磁场后可进一步把能带劈裂成上、下两支, 用黑色表示。当化学势位于能隙中间时, 该体系的低能激发为等效的无自旋激发

$\sqrt{|\Delta|^2 + \mu^2} < V_x$  时, 体系处于拓扑超导态, 链两端应该出现 MZM。实验中用 InSb 或 InAs 半导体纳米线与超导体接触来制备出一维  $p$  波超导链<sup>[5, 6]</sup>, 由于它们具有较大的朗德  $g$  因子, 在较小的磁场下就可进入拓扑相。

实验上, 普通金属在费米面附近有连续的电子态, 费米面以下为占有态, 费米面以上为空态; 超导体在费米面附近打开一个超导能隙, 而拓扑超导体则会在超导能隙中间位置产生局域的边缘电子态, 可以导致零偏压电导峰的出现。图 3 为 Delft 组的实验结果, 图中显示了 InSb 在 70 mK 下处于不同大小外磁场下的电导曲线, 磁场区间从 0 mT 到 490 mT, 以 10 mT 为间隔。从 100 mT 开始出现零偏压电导尖峰。当然, 这只能表明超导能隙内存在零能的局域电子态, 这是第一个表明 MZM 可能存在的实验证据<sup>[4]</sup>。

### 3.2 二维无自旋 $p+ip$ 拓扑超导态

从一维推广到二维, 我们期待在二维的非平庸拓扑超导相同样存在无能隙的边缘激发, 可以产生 MZM。对于二维无自旋的费米子体系, 其配对同样需要服从奇宇称, 最简单的配对形式就是  $p_x + ip_y$  或者  $p_x - ip_y$ , 它们都带有一个单位的角动量, 破坏时间反演对称性。下面我们重点讨论  $p+ip$  型拓扑超导, 其哈密顿量可写成:

$$H = \int d^2r \left\{ \psi^\dagger \left( -\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi + \frac{1}{2} \Delta_0 \left[ e^{i\phi} \psi (\partial_x + i\partial_y) \psi + h.c. \right] \right\} \quad (27)$$

该体系的拓扑性质可以在动量空间体现出来:

$$H = \int \frac{d^2k}{4\pi^2} \left\{ \psi_k^\dagger \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \psi_k + \frac{1}{2} \Delta_0 \left[ i e^{i\phi} \psi_k (k_x + i k_y) \psi_{-k} + h.c. \right] \right\} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^2k}{4\pi^2} \left( \psi_k^\dagger \quad \psi_{-k} \right) \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \psi_k \\ \psi_{-k}^\dagger \end{pmatrix},$$

其中  $h_k^x = -\Delta_0 (k_y \cos \phi + k_x \sin \phi)$ ,  $h_k^y = \Delta_0 (k_x \cos \phi - k_y \sin \phi)$ ,  $h_k^z = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$ , 于是, 该系统的哈密顿量对应于一个作用在 Nambu 旋量上的赝磁场, 该

赝磁场的方向定义了一个映射, 如图 4 所示。

从该变换还可以定义一个拓扑不变量:

$$C = \int \frac{dk_x dk_y}{4\pi} \hat{\mathbf{h}} \cdot (\partial_{k_x} \hat{\mathbf{h}} \times \partial_{k_y} \hat{\mathbf{h}}) \quad (29)$$

式中  $\hat{\mathbf{h}}$  是赝磁场的方向矢量。我们可以形象地把这个映射看成是把二维动量空间包裹到二维的单位球面上, 拓扑不变量即为包裹球面的次数。在不允许剪切和粘合的前提下, 拉长伸缩等任意连续平滑的变化都无法改变该拓扑数。不同的拓扑数对应于不同的拓扑物相, 它们之间无法连续平滑地过渡, 除非经历二级相变, 即能隙闭合。这是因为在能隙闭合的动量处, 赝磁场为 0, 没有方向, 上述的同伦变换映射不再成立。一般而言, 同伦变换映射对应的拓扑数可以是任意整数, 然而在这里所讨论的  $p+ip$  超导体系中, 拓扑数只能取 0 或 1, 其中 0 对应于平庸相, 1 则是非平庸拓扑的。要想获得具有更高的拓扑数的物相, 需要更复杂的哈密顿量, 比如  $f$  波超导的哈密顿量。

在实际的体系中, 如果存在一个分隔不同拓扑相的畴壁, 在畴壁上将会出现零能激发。这可

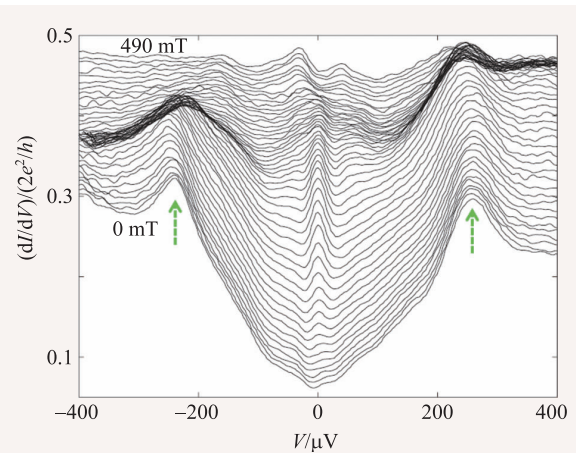


图 3 电导与偏压关系<sup>[5]</sup>, 零偏压电导尖峰的出现表明 MZM 存在的可能性

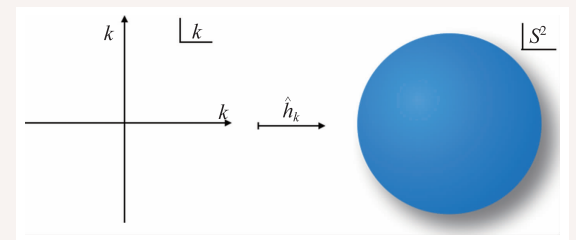


图 4 由赝磁场方向定义的从二维平面到球面的同伦变换映射

以简单地理解为：从畴壁的一侧到另一侧可以看成是以空间位置为参量的拓扑“相变”，那么在二者之间必定跨越过能隙闭合的状态，于是在畴壁上有可能获得MZM。另外，非平庸拓扑超导体系的边缘也是一种特殊的畴壁，所以在非平庸拓扑超导相的边缘上也可望出现MZM。

下面我们考虑一个简单的圆环状 $p+ip$ 超导体系，通过调节化学势使圆盘体系处在非平庸拓扑超导相，并往圆环中心加入 $n$ 个磁通量子，求解其边缘态的激发谱和波函数。如果忽略在边缘上缓慢变化的动能项，则其哈密顿量可简化成

$$H_{\text{edge}} = \int d^2r \left\{ -\mu \psi^\dagger \psi + \frac{1}{2} \Delta_0 \left[ e^{i[(n+1)\theta + \phi]} \psi \left( \partial_r + i \frac{\partial_\theta}{r} \right) \psi + h.c. \right] \right\}. \quad (30)$$

一般来说， $n$ 个磁通量子可以导致一个带拓扑荷为 $n$ 的Abrikosov涡旋，涡旋中心在坐标原点处。涡旋的存在体现为超导序参量的一个局域相位变

化，任意围绕原点一圈的路径，都会导致波函数相位转过 $n$ 个周期。另外，注意到配对项中的 $p+ip$ 携带了一个单位的角动量，表现为一个随着极角变化的相位。当极角转动一圈时，该相位正好转一个周期。这一个相位可以与序参量合并，其效应相当于在坐标原点再增加了一个单位的涡旋。这个效应可以通过下面的规范变换公式清楚地表述：

$$\psi = e^{-\frac{i(n+1)\theta}{2}} \psi', \quad \psi^\dagger = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} (\psi')^\dagger. \quad (31)$$

于是，涡旋的作用转嫁成为电子场算符在极角方向的周期边界条件，会对电子波函数的角动量有所限制。

对于 $n$ 个外加磁通涡旋，若 $n$ 是偶数，电子场算符为反周期边界条件，则得到的电子波函数角动量只能为半整数；若 $n$ 为奇数，电子场算符为周期边界条件，则电子波函数角动量只能为整数。通常的轨道角动量不可能取半整数，因为波

函数的单值性导致电子波函数在极角方向必须满足周期边界条件。在这里，半整数轨道角动量的出现从根源上说是由涡旋的存在所导致。由于体系具有旋转对称性，轨道角动量是好量子数，所以可以得到以角动量 $m$ 来标记的能量本征边缘态。具体求解Schrödinger方程(30)式，得到体系低能激发的两支模式，分别对应于内边缘态和外边缘态。它们的能谱分别为

$$E_m^{\text{in}} = -\frac{m\Delta_0}{R}, \quad E_m^{\text{out}} = \frac{m\Delta_0}{R}, \quad (32)$$

分别对应的波函数为

$$\chi_m^{\text{in}} = e^{im\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} e^{-\int_{R_{\text{in}}}^r \frac{\mu}{A_0} dr}, \quad \chi_m^{\text{out}} = e^{im\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ -e^{+i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} e^{\int_{R_{\text{out}}}^r \frac{\mu}{A_0} dr}. \quad (33)$$

由图5可见，激发能谱随角动量呈线性关系，相同能量的内外边缘激发模式具有相反的角动量，离散的激发能谱在热力学极限下趋于连续的无能隙能谱。然而要获得零能量激发模式(即MZM)，需要角动量严格取为0，外加磁通量子数 $n$ 必须为奇数。当 $n$ 取为偶数时，不会存在

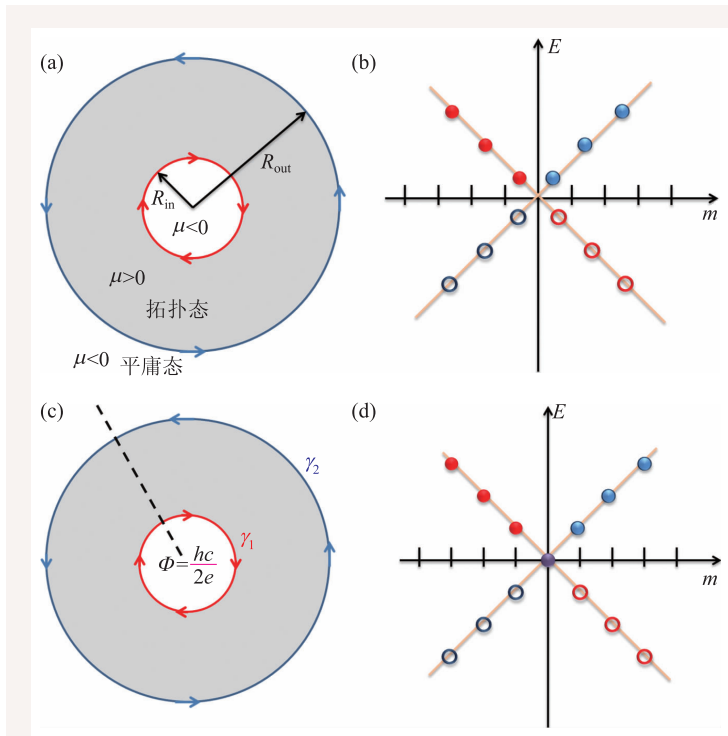


图5  $p+ip$  超导体的边缘激发示意图 (a)在带偶数拓扑荷涡旋的情况下得到的体系内外边界上的手征边缘激发态，其中红色为内边缘，蓝色代表外边缘；(b)在涡旋拓扑数为偶数的情况下得到的体系内外边缘的激发能谱，其横坐标为对应的角动量量子数；(c)在存在奇数拓扑荷的涡旋的情况下得到的体系的内外边缘激发模式；(d)在涡旋拓扑数为奇数的情况下得到的体系内外边缘的激发能谱。内外边缘都存在严格的零能量模式，即MZM

MZM。这种外加磁通量子数的奇偶效应用于在实验上直接探测 MZM 的存在具有重要意义。实际上，上述的角动量直接对应体系一维边缘上的动量，所以边缘激发谱可以看成是能量随动量的变化关系。

虽然上面的分析都是基于一个特殊对称的圆盘状体系所得到的，更一般的情形不一定能得到这样一个完美线性的激发能谱。我们可以把上面的特殊的圆盘构型做连续变形，这会导致能带发生扭曲，但由于受到拓扑保护，体系边缘态上不会打开能隙，而体能隙也不会闭合。因此，以上的分析对一般的情形也成立。

类似于利用自旋—轨道耦合与  $s$  波超导来实现一维  $p$  波超导，二维  $p+ip$  拓扑超导态在实验上有如下的实现方案<sup>[7]</sup>：三维拓扑绝缘体的表面态是由自旋—轨道锁定的螺旋电子态，它破坏了宇称，解除了能带自旋简并。通过调节化学势，使得费米面远高于能带交叉点，费米面附近为一个无自旋简并的杂化能带。在拓扑绝缘体表面覆盖  $s$  波超导，近邻效应导致费米面附近的电子配对，从而实现  $p+ip$  拓扑超导。Fu 指出，在三维拓扑绝缘体表面覆盖  $s$  波超导体，其界面处若存在带奇数拓扑荷的涡旋，则可在涡旋上捕获 Majorana 费米子。

### 3.3 Majorana 费米子的统计性质

MZM 的重要性在于其特殊的非阿贝尔统计性质。为什么零能量的 Majorana 费米子会呈现出非阿贝尔统计性质，而不是简单的费米统计呢？为了说明这一点，我们回顾一下如何从  $p+ip$  拓导体系获得 MZM：MZM 只在带奇数拓扑荷的涡旋上产生，即 MZM 总是与一个奇数拓扑荷的涡旋绑在一起，所以对 MZM 对的交换是通过绝热地交换涡旋来实现的。这意味着交换过程不是单纯的两个 Majorana 费米子激发模式的交换，还必须考虑涡旋的效应。拓扑荷为  $n$  的涡旋，其本质效应是导致超导序参量相位的变化，可以等效于一条从涡旋中心延伸到无穷远处(或者延伸到另一个带有相反拓扑荷的涡旋中心)的割线。在割线以外的区域，序参量不发生相位变化，只有当跨

越割线时，序参量的相位跳变  $n$  个周期。在这个跳变下，序参量没有实质性改变，但这对电子波函数的影响巨大：通过规范变换让电子吸收掉序参量的相位涡旋，电子只吸收了一半的涡旋相位。也就是说，当跨越割线的时候，电子的波函数相位要跳变  $n/2$  个周期。如果  $n$  是奇数，这将导致波函数获得一个  $\pi$  相位。同理，空穴在跨越切割线的时候也会获得  $\pi$  相位。MZM 作为电子、空穴的线性叠加，自然也获得  $\pi$  相位。MZM 交换如图 6 所示，交换两个 MZM 意味着其中一个 MZM 会跨越另一个涡旋的相位割线，出现一个负号。

因此，MZM 交换可用算符来表达，交换操作应该导致

$$\gamma_i \mapsto -\gamma_j, \gamma_j \mapsto \gamma_i, \gamma_k \mapsto \gamma_k, (k \neq i, j). \quad (34)$$

可以得到实现交换的算符为

$$U_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_i \gamma_j). \quad (35)$$

对  $2N$  个 MZM  $\gamma_k$ ， $\gamma_i$  与  $\gamma_j$  交换可表示为么正变换：

$$\gamma_k \rightarrow U_{ij} \gamma_k U_{ij}^\dagger, \quad (36)$$

由交换算符  $U$  直接计算，可得到

$$[U_{12}, U_{23}] = \gamma_1 \gamma_3, \quad (37)$$

因此，交换操作不可对易。

下面我们用一个简单的例子说明交换操作对量子态的影响。假设系统有 4 个 MZM  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ，如图 7 所示。4 个 MZM 可等价于两个“非局域”的 Dirac 费米子  $c_a$  和  $c_b$ ：

$$c_a = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2), c_b = \frac{1}{2}(\gamma_3 + i\gamma_4). \quad (38)$$

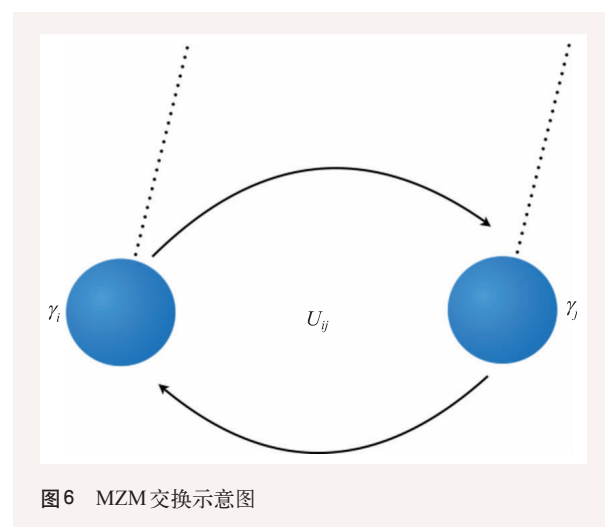


图6 MZM 交换示意图



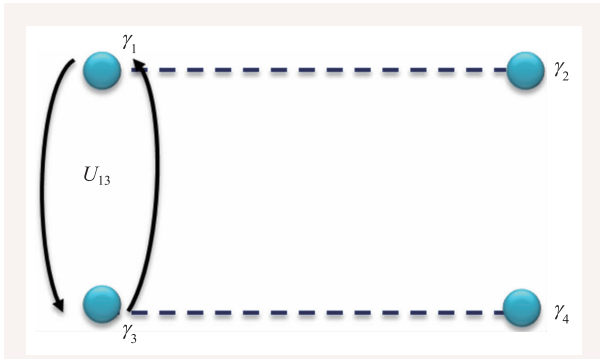


图7 4个MZM交换的示意图(图中虚线表示配对)

用该Dirac费米子的占据数  $n_a$  和  $n_b$  来标记量子态： $|n_a, n_b\rangle, (n_a, n_b = 0, 1)$ 。 $\gamma_1$  绕  $\gamma_3$  一圈可由幺正变换  $U_{31}^2 = \gamma_3 \gamma_1 = (c_a + c_a^\dagger)(c_b + c_b^\dagger)$  实现，在此操作下，量子态的变化为

$$|n_a, n_b\rangle \mapsto U_{31}^2 |n_a, n_b\rangle = (-1)^{n_a} |\bar{n}_a, \bar{n}_b\rangle, \quad (39)$$

其中  $\bar{n} = 1 - n$ ，即不同Dirac费米子中的MZM环绕一圈可以制备出占有数相反的态。MZM的交换算符  $U$  对量子态的影响如下：

$$\begin{aligned} |n_a, n_b\rangle \mapsto U_{12} |n_a, n_b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_1 \gamma_2) |n_a, n_b\rangle \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}(1-2n_a)} |n_a, n_b\rangle, \\ |n_a, n_b\rangle \mapsto U_{31} |n_a, n_b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_3 \gamma_1) |n_a, n_b\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_a, n_b\rangle + (-1)^{n_a} |\bar{n}_a, \bar{n}_b\rangle), \end{aligned} \quad (40)$$

即交换同一Dirac费米子中的一对MZM，只是导致一个相因子的出现，而交换不同Dirac费米子中的MZM，会制备出新的纠缠态。上述分析表明，MZM是满足非阿贝尔统计的任意子。

## 4 拓扑量子计算

### 4.1 拓扑量子计算的提出

信息化时代对计算效率的要求与日俱增，基于经典计算方式的硬件和算法在不断得到发展的同时，计算效率上升的空间也日益局限。过去一个世纪，人类对量子世界的基本规律进行了大规模的探索，自80年代开始，基于量子原理的计算方式的构想开始形成，其后逐渐演变成了两条研

究主线，一条是研究基于量子原理的算法，另一条是研究基于量子系统的硬件实现。容错性和抵御退相干是实现量子计算亟需解决的问题，而具有拓扑性质的体系天然地具有这种优势。在这些材料中，受拓扑保护的非阿贝尔准粒子一方面具有抗环境干扰的鲁棒性，另一方面能通过交换彼此来改变量子态。拓扑量子计算的实现正是利用这些非阿贝尔任意子之间的交换来编码信息，并且通过系列的交换操作来实现任意的幺正变换，改变量子比特的状态。

量子态作为希尔伯特空间中的一个矢量，在特定坐标基矢下的投影即为波函数，而波函数的演化则由幺正变换来描述。与经典计算机利用0和1两个不同状态存储信息不同，量子计算的基本储存单元是一个二维的希尔伯特空间，称作一个量子比特。量子态的线性叠加，为量子体系提供了巨大的可利用的信息存储和计算资源。然而，实现量子计算的瓶颈在于量子态的退相干。环境会导致体系发生退相干，即环境干扰造成的波函数坍缩。量子计算过程中的误差也有与经典计算不同的特点：一方面无法直接通过测量检测误差是否发生，另一方面量子态存在连续的相位误差，如  $a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle + be^{i\theta}|1\rangle$  (相位  $\theta$  可以是任意的)。因此，控制误差也是量子计算的关键。

退相干和误差问题都可以通过利用体系的拓扑性质从根本上予以解决<sup>[8]</sup>。什么是体系的拓扑性质呢？在数学中，拓扑主要研究几何对象在平滑变换下的不变性，比如进行拉伸、收缩等连续形变，但不对表面进行剪切或粘合，如此变换前后的几何对象被认为是拓扑等价的，存在一个拓扑不变量。因此，拓扑并不关注长度和角度等局域性质，只关注全局的性质，而全局的拓扑性质不会受局域的微扰而改变。在物理体系中，由于环境的干扰主要是以局域的相互作用形式来发生，所以拓扑的物理体系可免受环境的影响，这样环境所引起的退相干问题便迎刃而解。因此，拓扑量子计算作为一种容错的量子计算被人们在2003年前后正式提出<sup>[9]</sup>。

然而，拓扑不变性并非哈密顿量的对称性，

它是系统在低能极限下演生出的一种整体对称性，对于拓扑量子计算，寻找拥有拓扑准粒子的实际物理体系也是很重要的一个方面。拓扑量子计算是解决量子退相干的一种很好方案，拓扑性质隔绝了外界环境的影响。试想我们制备出了拓扑保护的初态，计算过程需要对量子态进行么正演化，这可以通过对非阿贝尔任意子进行特定的交换操作来实现。

## 4.2 交换任意子

任意子是二维拓扑系统中的激发准粒子。如图8所示，在3+1维时空中，一个粒子围绕另一个粒子转动一圈，拓扑等价于平庸演化(两个粒子的世界线不发生缠绕)，故量子态不发生实质的改变，这等价于对两粒子进行两次交换操作。因此，进行一次交换操作时，量子态波函数的相位可允许的改变值是0和 $\pi$ ，分别对应于玻色子和费米子。然而，在2+1维时空中，一个粒子围绕另一个粒子转动一圈是无法连续变换到平庸演化的(两个粒子的世界线发生缠绕)，因而允许有任意可能的相位产生，从而对交换操作所导致的相位也可以是任意的，所以在2+1维时空中的粒子(准粒子)，从统计意义上来说可有别于玻色子和费米子，被称为阿贝尔任意子。比如， $\nu=1/3$ 的分数量子霍尔态，它的准粒子为阿贝尔任意子，两个准粒子交换产生 $e^{i\pi/3}$ 的相位，并且这一相位不依赖于速度、路径形状等细节，受拓扑保护。

更一般地说，对于有基态简并的物理体系，其任意子的交换还有可能导物理态的转化，从而对多个粒子进行交换的结果可能取决于交换的顺序，这样的任意子被称为非阿贝尔任意子。对这些非阿贝尔任意子的系列交换操作在一定程度上实现了对量子比特的么正变换。一系列的交换操作在准粒子的世界

线(在时空中演化的轨迹)上来看相当于对世界线进行缠绕，并且这种缠绕操作完整地构成了一个群结构，常被形象地称为辫子群(braiding group)。事实上，对任意子的交换操作不仅可以用来实现么正变换，而且还可以进行无破坏测量。

实验上如何实现任意子的交换呢？以MZM为例，对于存在于一维拓扑超导导线和普通超导导线的畴壁上的MZM，可以通过调节局域的化学势或磁场使畴壁移动，在如图9(a)中的T形结上实现交换MZM。图中所示为3个超导导线组成的T形结，首先调节化学势，使左壁上的 $\gamma_1$ 移动到T形节的下壁处，将右壁上的 $\gamma_2$ 移动到T形节的左壁处，最后将 $\gamma_1$ 移动到T形节的右壁处，实现 $\gamma_1$ 与 $\gamma_2$ 的交换<sup>[10]</sup>。对于二维的拓扑超导体系，Fu和Kane<sup>[7]</sup>

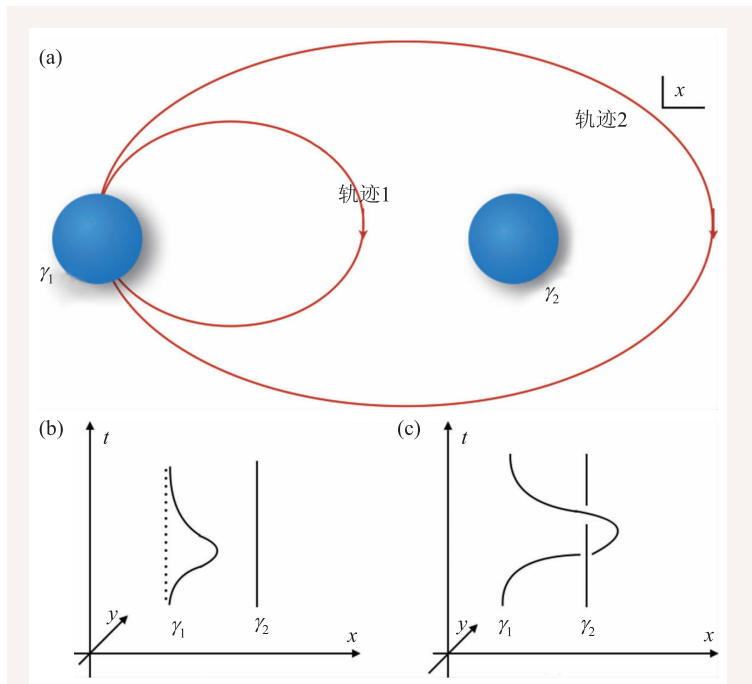


图8 考虑两个粒子(准粒子)的交换操作。粒子1(即 $\gamma_1$ )可以按(a)图两种可能的轨迹行走，最后返回初始的地点。如果该过程发生在3+1维时空中，则轨迹1可以连续地变换到轨迹2而无须经过任何奇点，因此二者是拓扑等价的，而轨迹1可以进一步连续地收缩，拓扑等价地变换到平庸的路径，即完全没有移动。从粒子演化的世界线来看，无论是走哪条轨迹，粒子1和粒子2的世界线都没有发生缠绕，如图(b)所描述，拓扑等价于虚线所代表的平庸演化，其中横坐标示意三维空间。因此在粒子1围绕粒子2转了一圈(即轨迹2)回到初始点，该过程拓扑等价于什么都没有发生过，不存在记忆。然而该过程若是发生在2+1维时空中，则轨迹2无法连续地变换到轨迹1(除非轨迹跨过粒子2，而这是不被允许的)，因此轨迹2并不等价于平庸演化，粒子1回到初始点可以携带一个任意的相位作为记忆，其世界线如图(c)所描述，两粒子的世界线发生一次缠绕

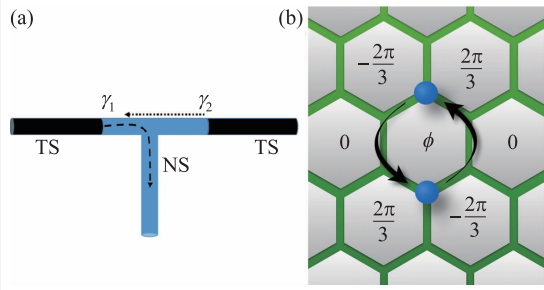


图9 MZM交换的示意图 (a)在一维拓扑超导体(TS)和普通超导体(NS)的畴壁处的MZM<sup>[10]</sup>,通过调节化学势实现MZM的移动,进一步完成两个MZM的交换;(b)二维Fu—Kane模型利用S—TI—S约瑟夫森结进行交换的示意图,当 $\phi=0$ 时,只有上下两个结点形成了约瑟夫森涡旋,俘获一对MZM,通过调控 $\phi$ 相位从0到 $2\pi$ 的变化,可使这对涡旋顺时针移动(当 $\phi=2\pi/3$ 以及 $-2\pi/3$ 时,这对涡旋发生移动,以中心岛为原点沿顺时针方向移动到下一对结点处),当 $\phi$ 重新回到 $2\pi$ 时,这对涡旋以及所携带的MZM发生了一次交换

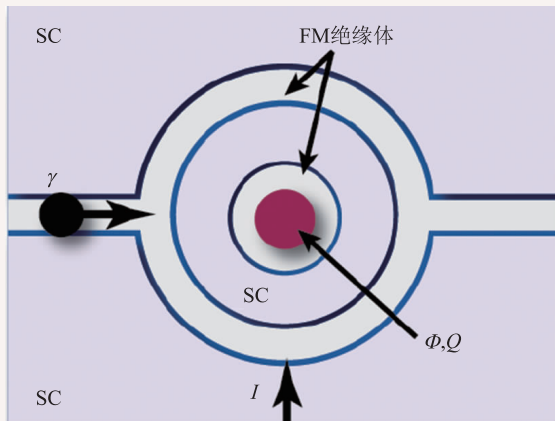


图10 MZM干涉测量装置示意图<sup>[11]</sup>(在约瑟夫森结中,不同路径的MZM可发生干涉)

提出在三维拓扑绝缘体表面覆盖s波超导体来实现 $p+ip$ 超导。同时,他们建议在拓扑绝缘体表面覆盖多块不衔接的s波超导的小岛,岛间形成特殊的约瑟夫森结(S—TI—S结);通过调节各个小岛的超导相位,使得只有特定的结点上形成等效的约瑟夫森涡旋,俘获MZM;进一步地可以通过调节每个小岛的超导相位来操纵约瑟夫森涡旋。在此过程中,由于MZM总是局域在涡旋上,这等价于对MZM进行操纵,见图9(b)。

对MZM的交换不仅可以进行么正变换,还可以用于进行无破坏性的干涉测量。如图10所示,在三维拓扑绝缘体表面覆盖s波超导体(SC)

和铁磁(FM)的绝缘体,构成了约瑟夫森结,在约瑟夫森结中心有一电荷 $Q$ 和磁通 $\Phi$ 的区域。约瑟夫森结中可形成约瑟夫森涡旋,它与Abrikosov涡旋的相同点是中心都存在着MZM,不同点是约瑟夫森涡旋的运动遵循量子力学的规律,它们可以干涉。因此,当约瑟夫森结左臂中的约瑟夫森涡旋带着MZM从左向右运动时,上下两个路径即可形成干涉。涡旋的磁通为 $\frac{hc}{2e}$ ,由Aharonov—Casher效应,当磁通为 $\frac{hc}{2e}$ ,环绕电荷为 $Q$ 时,干涉的相位因子为 $\phi_{AC} = \frac{hc}{2e} \frac{Q}{\hbar c} = \frac{\pi Q}{e}$ 。由此,当约瑟夫森结中心的 $\Phi=0$ 时,约瑟夫森涡旋电流 $I_v$ 随电荷 $Q$ 振荡<sup>[11]</sup>

$$I_v = I_v^0 [1 + A \cos(\pi Q/e)] \quad (41)$$

变化电荷 $Q$ 就可以观察到电流的振荡。而当 $\Phi = \frac{hc}{2e}$ 时,干涉所产生的相位因子,除Aharonov—Casher效应的 $\phi_{AC} = \frac{\pi Q}{e}$ 外,还有约瑟夫森结中心 $\Phi = \frac{hc}{2e}$ 涡旋的相位割线对入射MZM $\gamma$ 的影响,使得(41)式中 $A=0$ ,从而破坏振荡。因此,可从约瑟夫森涡旋电流 $I_v$ 有无振荡来判断约瑟夫森结的中心是否有磁通 $\Phi$ ,进一步判断是否有MZM。

### 4.3 交换MZM以实现量子门操作

一对MZM组成的厄米算符 $i\gamma_{j1}\gamma_{j2}$ 的本征值为 $\pm 1$ ,因此每对MZM可构成一个量子比特,作为量子计算的基本单元。对于一个包含 $2N$ 个MZM的体系,我们可以选择任意两个MZM配对作为一个量子比特,总共可以有 $N$ 个量子比特,而不同的MZM配对方案只是更换了不同的希尔伯特空间基矢,总体上仍然构成了相同的希尔伯特空间。另外,费米子系统的总费米数字称守恒:对 $2N$ 个MZM体系,费米数字称算符为

$$P = \prod_{j=1}^N (-i\gamma_{2j-1}\gamma_{2j}) \quad (42)$$

其中 $P^2=1$ ,所以 $P=1$ 和 $P=-1$ 对应体系总的电子

数分别为偶数和奇数。由此，尽管  $2N$  个 MZMs 形成了  $N$  个量子比特，费米数字守恒的约束使得真正独立的量子比特数目变成  $N-1$ 。

利用 MZM 存储信息，有两种编码方式：密集编码和稀疏编码<sup>[4]</sup>。在密集编码中， $2n+2$  个 MZM 形成  $n$  个独立量子比特，第  $k$  个量子比特是  $i\gamma_{2k-1}\gamma_{2k} = \pm 1$  的本征态，最后一对 MZM 保证系统费米数的奇偶性守恒，因此它与整个体系的其他部分都发生纠缠。这种编码方式的优点是易于实现么正门操作，缺点是最后一对 MZM 的误差会影响所有的量子比特。而在稀疏编码中，利用  $4n$  个 MZM，每 4 个 MZM 作为一组形成一个计算的子空间，对每一组内的 4 个 MZM 要求满足  $\gamma_{4k-3}\gamma_{4k-2}\gamma_{4k-1}\gamma_{4k} = -1$ ，也就是说，一个组里的两个量子比特并不独立，二者的状态保持一致，从而使得费米子必成对出现，这样就能使每一组 MZM 都保证了体系的费米数字守恒。每组存在一个自由的量子比特，所以一共有  $n$  个独立量子比特。

量子计算以一系列基本门操作作为基础，这些门操作的组合可以生成任意的么正变换。单比特的基本门操作有：Hadamard 门，泡利 X 门，泡利 Y 门，泡利 Z 门， $\pi/8$  相移门等<sup>[12, 13]</sup>。在费米子占据数表象下，以  $|0\rangle, |1\rangle$  为基矢，这些门操作的矩阵分别表示为

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

双比特的基本门操作有 SWAP 门和控制门操作等。在控制门操作中，一个比特为控制比特，另一个比特为目标比特，只有当控制比特取值为 1 时，相应的门操作才会施加到目标比特上。在 Dirac 费米子占据数表象下，以  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  为基矢，SWAP 门、控制非门(CNOT)和控制 Z 门(CZ)的矩阵表示分别为(控制门中以第一个比特为控制比特)

$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{CZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

除此之外，还有多比特门操作。这些基本的门操作构成了量子计算的基础。

在二维的拓扑超导体中，带奇数拓扑荷的涡旋会俘获一个 MZM，于是通过对涡旋的操纵可以实现 MZM 的交换，从而改变由成对 MZM 构成的量子态。以稀疏编码为例，4 个 MZM 构成一个独立的量子比特，其中偶费米数要求使得 MZM 粒子  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  构成的量子比特其状态与  $\gamma_3$  和  $\gamma_4$  所构成的量子比特状态一致，从而可以只用  $i\gamma_1\gamma_2$  的本征值来标记量子比特状态。具体计算得到各交换操作的矩阵表示为

$$U_{12} = U_{34} = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, U_{23} = e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

容易看出， $U_{12}U_{23}U_{12}$  可以生成 Hadamard 门：

$$U_{12}U_{23}U_{12} = e^{i\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim H. \quad (46)$$

同理，有 Pauli 门操作：

$$(U_{12})^2 = e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \sim Z, \quad (47)$$

$$(U_{23})^2 = e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sim X. \quad (48)$$

单比特门操作的示意图见图 11。

对于双比特操作，可以从稀疏编码通过一定

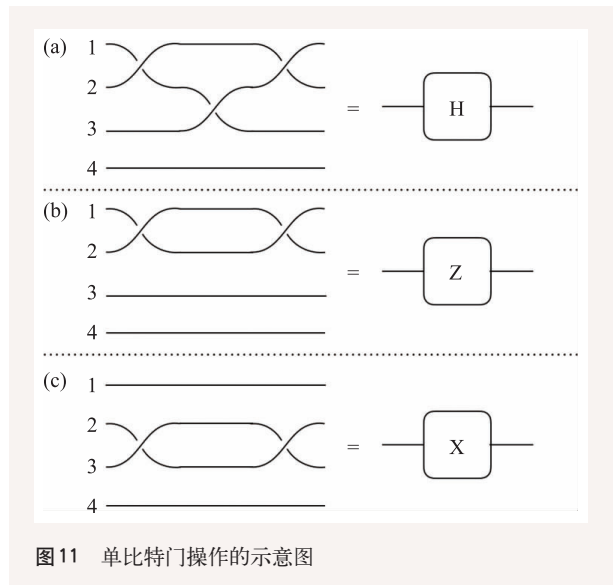


图 11 单比特门操作的示意图

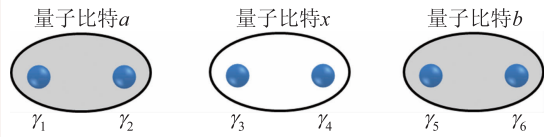


图12 密集编码下, 6个MZM形成3个比特的示意图(其中以量子比特a, b的占据数为基矢)

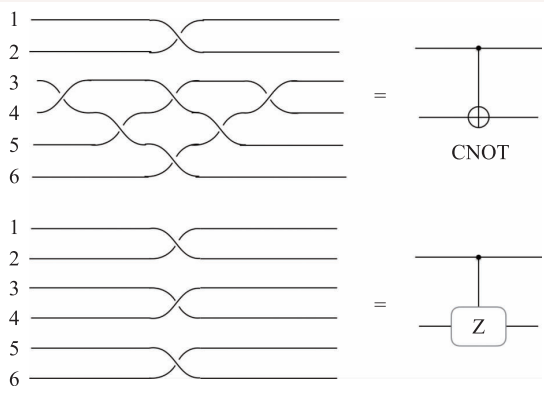


图13 双比特门操作的示意图

的测量手段转化为密集编码, 在密集编码上进行操作, 其后可以再次转换到稀疏编码。两个量子比特的密集编码需要6个MZM ( $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ ), 形成3组费米子( $n_a, n_x, n_b$ ):

$$n_a = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_1\gamma_2), \quad n_x = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_3\gamma_4), \quad n_b = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5\gamma_6), \quad (49)$$

如图12所示。

我们选择

$$|n_a, n_b\rangle = |00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle \quad (50)$$

为基矢( $n_x$ 由 $n_a, n_b$ 唯一确定, 用来保证体系的费米数奇偶性守恒。一般地, 我们假定6个MZM体系的总费米数为偶数), 具体计算得到各交换操作的矩阵表示为

$$\begin{aligned} U_{12}^{(6)} &= e^{i\frac{\pi}{4}} \text{diag}(1, 1, -i, -i), \\ U_{34}^{(6)} &= e^{i\frac{\pi}{4}} \text{diag}(1, -i, -i, 1), \\ U_{56}^{(6)} &= e^{i\frac{\pi}{4}} \text{diag}(1, -i, 1, -i), \\ U_{23}^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U_{45}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (51)$$

式中 $U$ 的上标(6)表示这些矩阵所作用的空间为6

个MZM以密集编码形式构成的2个量子比特。容易看出, CZ门操作和CNOT门操作分别为

$$U_{34}U_{12}^{-1}U_{56}^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{diag}(1, 1, 1, -1) \sim \text{CZ}, \quad (52)$$

$$U_{34}U_{54}U_{43}U_{21}U_{65}U_{54}U_{34} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \text{CNOT}. \quad (53)$$

双比特门操作的示意图见图13。

以上是关于MZM编码信息和实现门操作的简单介绍, 然而利用MZM难以实现 $\pi/8$ 相移的门操作, 无法实现普适的拓扑量子计算, 但最近已有新的方案提出, 克服了困难<sup>[14]</sup>。

## 5 总结和展望

通过以上的介绍, 我们已经看到了如何从拓扑超导体中产生Majorana费米子, 而且为什么MZM服从非阿贝尔统计。这一切的根源始于非平庸的费米子配对形式: 无自旋费米子的配对必须服从奇宇称, 最简单的是 $p+ip$ 配对, 导致了超导态的拓扑性质, 而不同拓扑区域之间的畴壁孕育了零能量的Majorana模式。另一方面, 描述费米子配对的序参量场的单值性要求其相位在围绕单个磁通一圈时的改变量只能是 $2\pi$ , 而单个费米子的波函数只有一半的相位改变, 所以费米子在跨越相位割线的时候只积累 $\pi$ 的相位。于是作为电子与空穴线性叠加的MZM在彼此围绕一圈的时候, 会积累 $\pi$ 的相位, 从而使MZM成为任意子。此外, 两个MZM相当于一个Dirac费米子, 所以一个MZM可以看成是分数化的Dirac粒子——“半个电子”。MZM在交换时积累的非平庸相位将会改变由MZM两两配对得到的量子态, 这便导致了MZM的非阿贝尔统计性质。

一百多年前, Onnes发现了超导, 半个世纪以前, Cooper提出了费米子配对, 用来解释超导现象。如今, 人们发现, 费米子配对的意义不仅仅是产生零电阻和迈斯纳效应以及约瑟夫森效应, 而且还提供了形成Majorana费米子的物理体系。在二维 $p+ip$ 拓扑超导中, 通过约瑟夫森涡旋俘获MZM, 调控超导相位操纵MZM, 实现对其

进行移动、交换和湮灭。可以预见，在不远的未来，凝聚态中的MZM探测与拓扑量子计算的实现将会取得重大突破，让我们看到了实现量子计算的曙光。

## 参考文献

- [1] Wilczek F. *Nature Physics*, 2009, 5(9):614
- [2] Elliott S R, Franz M. *Reviews of Modern Physics*, 2015, 87(1): 137
- [3] Kitaev A Y. *Physics-Uspexhi*, 2001, 44(10S): 131
- [4] Sarma S D, Freedman M, Nayak C. Majorana Zero Modes and Topological Quantum Computation. arXiv: 1501.02813, 2015
- [5] Mourik V, Zuo K, Frolov S M *et al.* *Science*, 2012, 336(6084): 1003
- [6] Deng M T, Yu C L, Huang G Y *et al.* Observation of Majorana Fermions in a Nb-InSb Nanowire-Nb Hybrid Quantum Device. arXiv: 1204.4130, 2012
- [7] Fu L, Kane C L. *Physical Review Letters*, 2008, 100(9):096407
- [8] Sarma S D, Freedman M, Nayak C. *Physics Today*, 2006, 59(7): 32
- [9] Kitaev A Y. *Annals of Physics*, 2003, 303(1):2
- [10] Alicea J, Oreg Y, Refael G *et al.* *Nature Physics*, 2011, 7(5):412
- [11] Alicea J. *Reports on Progress in Physics*, 2012, 75(7):076501
- [12] Georgiev L S. *Physical Review B*, 2006, 74(23):235112
- [13] Bravyi S, Kitaev A. *Physical Review A*, 2005, 71(2):022316
- [14] Karzig T, Oreg Y, Refael G *et al.* arXiv: 1511.05161

致谢 感谢中国科学院物理研究所吕力研究员有益的讨论。

## 读者和编者

## 订阅《物理》得好礼

——超值回馈《岁月留痕——<物理>四十年集萃》

为答谢广大读者长期以来的关爱和支持，《物理》编辑部特推出优惠订阅活动：向编辑部连续订阅2年《物理》杂志，将获赠《岁月留痕——<物理>四十年集萃》一本(该书收录了从1972年到2012年在《物理》发表的40篇文章，476页精美印刷，定价68元，值得收藏)。

希望读者们爱上《物理》!

订阅方式(编辑部直接订阅优惠价180元/年)

### (1) 邮局汇款

收款人地址：北京603信箱，100190

收款人姓名：《物理》编辑部

### (2) 银行汇款

开户行：农行北京科院南路支行

为答谢广大读者长期以来的关爱和支持，《物理》编辑部

户名：中国科学院物理研究所

帐号：112 501 010 400 056 99

(请注明《物理》编辑部)

咨询电话：010-82649266；82649277

Email: physics@iphy.ac.cn

