

物理学咬文嚼字之九十一 线

曹则贤[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2017-09-30收到

† email: zxcao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20171009

中国所译，又颇难解。……误解不知其数。

——陈寅恪《与妹书》

一言既流通，今古谁言异¹⁾。

——《古尊宿语录》

摘要 线是原始的几何概念，线性(空间、方程)、线积分是数学、物理的基本知识。存在大量汉译为线而原文没有线字的数学物理概念，如 ray, spiral, geodesic, asymptote, envelope, directrix, catenary, isochrone, brachistochrone, 等等，而 field line, line integral, world line, geodesic 等概念是普通物理里的关键内容。

1 线、直线与曲线

作为几何对象，比点略微复杂一点儿的是 line(线)。考虑到点可能是个抽象的、或许根本不存在的概念，线可能就是最简单的物理现实了——它的一维延展性让我们有了感知它的可能。Line 是最简单的几何对象，因此不幸地它竟然几乎是没定义的，几何学上会把线当成原始的概念(primitive concept)。提起线，人们首先想到的是直线。直线，英文的表述有 straight line, right line(法语为 la droite)，等。Rectilinear, 直线的，来自拉丁语 rectu(德语的 recht, 英语 right)，它带有动作的意味，如 reatilinear motion(沿直线的运动)，optical rectilinear

correction(光学直线校正)等。什么是直线？因为 line 的概念是原始的，straight line 也不那么容易定义。直线，若说是不弯的线²⁾，那要有曲率的定义；若说是两点之间最短的线，那要先有空间的度规。后一种意义下还不保证直线的唯一。那个被用来证明广义相对论正确的恒星光线被太阳弯曲的说法，就有了计较的必要——光线的那个给你弯曲印象的路径才是直的。直线是极限，是抽象，曲线(curve, curvy line, curved line)才是更真实的存在。抽象的直线世界比较简单，可以作为出发点³⁾。笛卡尔坐标系是直角坐标系，其坐标轴是直线；它虽然问世比极坐标系晚，但我们在中学先学的是笛卡尔坐标系。平直空间也不妨用曲线坐标系

(curvilinear coordinate system)，比如椭圆—双曲线坐标系；而对于弯曲空间的描述，curvilinear coordinates 简直就是必须的。会一些用曲线坐标表示的微分几何，学广义相对论就容易些。

给定两点，在连续的空间中两点决定一条直线。给定任意的第三点，其几乎肯定会落在线以外，即其和已有两点共线的几率(measure)为零。作为三维空间的存在，线状物卷曲是必然的，植物卷须和蛋白质折叠为此提供了明确的证据。植物的卷须(tendrils, clavicles)，估计是螺旋线(spiral)研究的灵感来源之一(图1)。既然一维的物理存在在高维空间中其存在必然是弯曲的，直线和共线性(collinearity)就具有特别的意义。

1) 忽悟今日中华大地流通之佛经，多是“堪油撕屁嗑英格利息”之语。那数学呢？物理呢？估计也是“俺把你把迷了哄”。

2) 英国人说同性恋者的性取向是 bent(弯的)，则异性恋的男性是 straight(直的)，于是有了直男的说法。

3) 抽象的、不存在的概念，比如质点、点电荷、可逆过程等等，反而是建立物理学体系的出发点，有意思。

线是生活中常见的事物，因此它必然已经渗透到我们的日常表达中。我们读一本书，会先浏览一下书的梗概(outline)，会关注作者写作时的思想脉线(line of thoughts)，有时还会试图于字里行间理解作者的言外之意(to read between lines)⁴⁾。一个非常高明的写作技巧是所谓的“草蛇灰线，伏脉千里”，这里的线、脉，对应德语词 Leitfaden，英文也直接用它，字面意思是导线。图画一个事物时仅仅给出其简略轮廓，这也是 outline。作为动词，outline 和 delineate(给出粗线条的描述)相近。此外，有 lineage(血统，血系)的说法，可能是因为用线条表示血缘关系的缘故。

2 线、线性与非线性

一个空间里的直线都是等价的。如果有别的图形，比如平面上的圆锥曲线，则相对于此图形不同的直线就有了不同的意义，因而就有了分类和命名。这包括外线(exterior lines)，搭线(tangent lines，汉译切线)，切线(secant lines，汉译割线⁵⁾和准线(directrix)。最后一个词字面上没有线字。准线 directrix 是和 generatrix 一起使用的。Generatrix⁶⁾，也称 generator(生成元)，即那个由 directrix 导引着运动的几何对象。比如抛物线，可以定义为到一定点和到 directrix 的距离之比为 1:1 的点(generatrix，模体)的集合。Parabola，字面意思是说的恰好，指 1:1 的距离比，它就没有抛物的意思，也不含线字。同属圆锥曲线的

双曲线，hyperbola，意思是说过头了，字面是既没有双字也没有线字。类似的翻译很多，比如 cycloid，汉译摆线，还有 hypocycloid(内摆线)，epicycloid(外摆线)，其实人家的字面就是一个 cycle 添加了一个另类的名词性词尾，告诉人们它与圆有关而已。因为一不关心物理图像，二不求识其字，数学概念的中文翻译极为不负责任，贻害匪浅。

关于线和线性的问题，是理解物理的初步。牛顿第二定律给出质点运动的方程，接下来玩什么？自然是如数学地描述 3D 空间中质点可能的运动轨迹，以及如何求解特定的力或势场下质点的运动，比较著名的例子包括 catenary(悬链线。来自拉丁语 catenarius，链)，brachistochrone(速降线，字面上是最短时)，isochrones(等时线，字面上是等时)，等等¹⁾。这些汉译中的线字都是额外添加的。再者，功的定义为 $\int \vec{f} \cdot d\vec{s}$ ，这是最简单的微分 1-form，则求沿特定的路径从一点到另一点所做的功就是线积分(line integral)。在热力学语境中，其主方程(cardinal equation)是多变量的微分 1-form，即 Pfaffian form。类似求某个循环过程中熵的变化这类问题，就是线积分。关于线积分的数学知识教得不充分而去纠缠于某个过程中系统和环境各自熵变是多少的问题，无助于对物理学的理解。

若刺激 x 和响应 y 之间满足关系 $y=kx+b$ ，则称此关系是线性的(linear)，其中 y ， b 是同类的物理量，而 x 是另一类物理量， k 则反映研究对象的内禀性质，如在简单的胡克



图1 植物卷须提供了直观的螺旋(spiral)形象

定理 $y=kx$ 中， k 就是物体的弹性系数；在刚体的定轴转动问题中， k 是转动惯量。在初等解析几何中， $y=kx+b$ 的图像就是一条直线。与线性关系相映衬的是非线性关系，非线性(nonlinearity)当然比线性关系复杂的多，花样也多得多。 $y=kx^2$ 这样的含平方项的关系，算是最简单的非线性了，它竟然就搪塞了对于干涉现象的解释。除了少数特例，非线性方程是很难找到严格解析解的。一个做法是将非线性问题在某些限制下作线性化(linearization)。对电磁学问题的线性化导致了有限元算法从而引发了建筑工程上的革命，是无心插柳柳成荫的绝佳案例。线性函数、线性映射的定义是可加性加上一阶齐次性，即 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ ， $f(ax)=af(x)$ 。如果是两变量函数具有这样的线性，那是双线性的(bilinear)。线性关系表示刺激信号之间没有耦合。一个数学对象若是能表示成若干个其它数学对象的线性相加，则称它们是线性相关的(linearly dependent)。若一个空间中的矢量，其线性叠加仍是该空间中的矢量，则该空间是线性空间。流形的切空间，量子力学中

4) 余谓读书有三重境界。一曰识字，能读懂文本之字面；二曰明察，能识破作者于字里行间之藏掖；三曰意会，能体会作者通篇未着一字之真意。第三境界适用之作品稀有，《红楼梦》、《白鹿原》、《笑傲江湖》等可入此列。

5) 显然这里的切、割反映不了 tangent 和 secant 之间的本质区别。Tangent function, secant function 就是我们熟知的三角函数名称。Secant, segment, 都源自 saw。

6) Generatrix, 汉译母点、母线、母面，太乱了。其意义应该是 motif，不如参照 motif 译成模体。

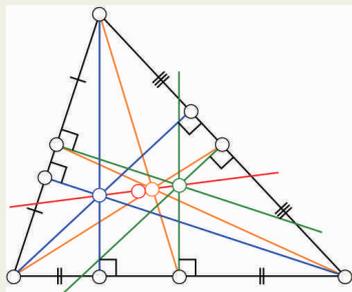


图2 三角形的 Euler line, 线上的四点在三角形的内部

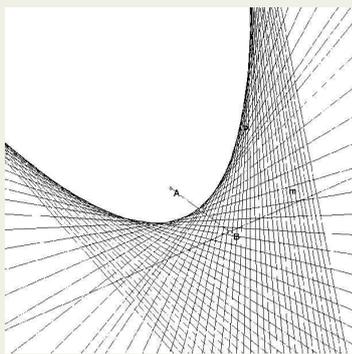


图3 直线簇及作为其 envelope 的曲线

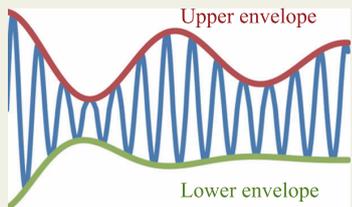


图4 振幅调制的振荡信号及其 envelope

自伴随算符本征矢量所张的希尔伯特空间, 是我们应该熟知的线性空间。线性空间的基, 是线性无关的 (linearly independent)。

3 那些有趣的线与非线

3.1 射线

Ray, 汉译射线, 其拉丁语词源 radius⁷⁾本意是车的辐条, 从中心轴出发, 向外延展。数学上, ray 被定义为从一点起始经过另一点无限

延伸所得到的对象。若从一点起始作一有限的延展, 这就是矢量的形象。Ray, 汉译射线, 物理上用来表示从源头向外 radiate 的东西, 如 rays of light(光线), X-ray, γ -ray, cathode ray (阴极射线, 即电子), 等等。Ray 的形象正好反映描述运动的速度之矢量性质。注意, 直线有矢量定义, 即给定两矢量 \vec{a} , \vec{b} , 参数方程 $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ 描述一条直线。显然, 若 $\lambda \in [0, \infty]$, 这定义的是一条射线。

3.2 欧拉线

此例就想说明共线是多么神奇的事情, 它至少是我个人数学教育中不足的地方。三角形有一些有趣的心 (centers), 比如中心 (centroid, 算数平均), 正心 (orthocenter, 外心 (circumcenter, 外接圆圆心), Exeter point, 以及九点圆的圆心, 都落在一条直线上。这个事实是 1765 年天才的数学家欧拉发现的, 故被称为欧拉线 (Euler line; la droite de Euler)。有趣的是, 内心 (incenter, 内切圆的圆心) 却不在这条线上。类似地, 还有 Simson 线, 即对于三角形, 其外接圆上任意一点到三边的三个垂足, 是共线的。这个 Simon 线簇的包络, 被称为 Steiner deltoid(三角形)。

3.3 包络线

包络线, envelope, 就是英汉字典里信封那个词。Envelope, 动词形式为 envelop, 包围、包裹住的意思。Envelope 常被译成包络线, 这样一来就失去了强调“包络、包裹”的抽象意义了, 二来否认了其高维推广的存在, 不妥。Envelope 也可以是面、体或者更高维的几何

对象, 还可以就是包络这个事实, 因此还是简单地译为包络为好。几何上, 对于给定的一个线簇, 同线簇中所有的线都相切的那条曲线是这个直线簇的 envelope(图 3)。线簇也可以是线段簇, 比如连接点 $(s, 0)$, $(0, t)$, 其中 $s^2 + t^2 = 1$, 的线段簇, 其包络就是四角星形。反过来看, 给定平面内曲线 $y=f(x)$ 上的任意一点, 有切线方程 $y=px+b$, 其中 $p=dy/dx$, $b=y-f(x)$ 。这样, 你会发现这条曲线有了 $y=f(x)$ 以外的另一种表达方式, 即由 $y=px+b$ 表达的直线簇。传统上, 包络上的点可以看作是相邻两曲线的交点, 这样的话, 就可以把包络的概念推广到面甚至更高维的情形。物理学上, 直线簇包络的思想与勒让德变换 (Legendre transformation) 有关。一般意义上的包络是理解几何光学, 特别是和 caustics(焦) 相关的光学内容, 的关键。物理学上还把 envelope 的概念做了意义不是很严谨的推广, 比如对于振荡信号, a smooth curve outlining its extremes (标示极值轮廓的光滑曲线) 被说成是 envelope(图 4)。

3.4 世界线

World line, 世界线, 是闵可夫斯基提出的一个概念, 是对空间中的闭合轨道 (orbit)、轨迹 (trajectory) 概念的推广^[2]。行星绕太阳的轨道是椭圆, 这句话里不含时间的因素; 单位时间内扫过相同的面积才加入了时间的考量, 即添加了时间的维度, 才能谈到时空 (spacetime) 中的曲线。世界线记录了一个物体运动的历史。对于世界线的描述, 即 4-维时空坐标的参数方程, $x^{(a)}(\tau)$, $a=0, 1, 2, 3$, 其中参数 τ

7) Radius 还保留在英语中, 被汉译为半径了, 少了放射状的形象。此外, 它和 radix, 根, root, 是一个词, 由此衍生的重要科学概念是 radical。放射状存在的源头当然是根, 汉语本就有根源的说法。

是世界线的弧长，物理上定义为固有时(proper time)。初学相对论时，对用固有时作为时空的参数的做法不易理解，其实用曲线的弧长(arclength)作为参数来写曲线方程，是微分几何中对曲线的规则化描述的常规做法^[3]，与物理无关。

3.5 测地线

在相对论的语境中，自由落体的 world line 是 geodesic，测地线。Geodesic，来自 geodesy，是一门大地形状和尺寸测量的学问，和 geometry(大地测量术，几何学)同源，前缀 geo 来自大地之母 gaia。Geodesic，汉译测地线，西文字面没有线的内容。

一个表面上的测地线是对平面内直线(straight lines)概念在弯曲表面上的推广。这类线的概念可以从两个角度思考：最短的曲线和最直的曲线。所谓最短的曲线，就是其上任意两点之间的距离都是最短的，物理实践上可以通过把两点间

的弹性连接的绳子给绷紧了而得到；而直线是说其切矢量是不变的(尽管我们的视觉习惯上将其当成弯的)。平面草坪上两点的最短线是我们说的直线；如果中间有个水坑，我们会绕过水坑从而让路径最短。但这似乎不是符合直线的切矢量不变的定义。光永远走直线，那么按说它应该符合弯曲空间中直线的切矢量不变的定义。这应该是构造广义相对论方程必须纳入考量的因素。

3.6 轮廓

Profile, pro+file, 汉译侧面、外形、轮廓等。File, 意思是排成一行行, 比如 walk in a file(排成一对走)或者 rank and file(国际象棋棋盘上空格的行与列), 其它的意思如档案、锉刀等应该都是引申义。File 的拉丁语词源 filum, 本身就是 thread, line 的意思。而 filing, 英文有个意思是锯末, 锯铁块得到的 iron filing 历史上恰好是演示法拉第的伟大概念场线(field lines)存在的东西(图 5)。Profile, 就是线条围成的轮廓。动名词 profiling 就是画出一个事物的轮廓, 与 outline, delineate 相近。表面分析从前有个 depth profiling technique, 即深度(组分)轮廓技术, 笔者的博士论文就证明了数学上这是一个条件不足的逆问题, 将这个技术彻底否定了。Profile, 线条, 引申为体型, 近义词有 figure (德语 die Figur)。葡萄牙语 formosa⁸⁾, 应该也是指线条美。

3.7 渐近线

Asymptote, 汉译渐近线。然而, asymptote 来自希腊语 ἀσύμπτωτος, 意思是 not to fall together, 不要碰

到一起。据说是 Apollonius of Perga 在研究圆锥曲线时引入的这个概念, 指任何不和作为关注对象的曲线相交的线(line)。汉译渐近线符合 asymptote 的当代意义, 但是我们还是应当知道其原意, 以免在阅读某些旧文献时造成误解。另外要注意的, asymptote 也不必然是直线(linear asymptote), 比如对于方程 $(x^3+2x^2+3x+4)/x$ 所决定的曲线, 抛物线 x^2+2x+3 是它的 asymptote。这种情形是渐进曲线(curvilinear asymptote), 见图 6。此外, 数学物理上有渐进展开(asymptotic expansion)、渐进自由度(asymptotic degree of freedom)的说法, 未知其精髓与渐进的说法相符合否。

4 结束语

写作此文期间, 注意到当我们接触到一些物理概念时, 那个物理概念所涉及的数学内容我们常常是略知皮毛, 甚至是闻所未闻的。这样的理解当然是不充分的, 而试图基于这样的对物理的理解对其有所发展, 何其难也哉。可叹!

后记 此文撰写期间, 传来我尊敬的学长、著名植物学家钟扬教授不幸遇难的噩耗, 椎心之痛, 不能自己。此文零乱, 事出有因, 盼读者谅解。

参考文献

- [1] Tent M B W. Leonhard Euler and the Bernoullis. A. K. Peters, Ltd., 2009
- [2] 曹则贤. 物理学咬文嚼字之五十六: 印迹与轨道. 物理, 2013, 42(7): 524
- [3] Pressley A. Elementary Differential Geometry. Springer, 2000

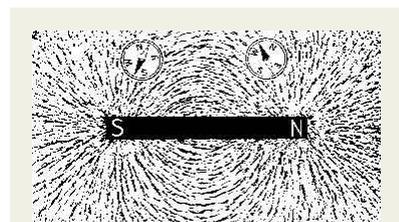


图 5 Iron filing map of the field lines (磁场线的铁屑显示)

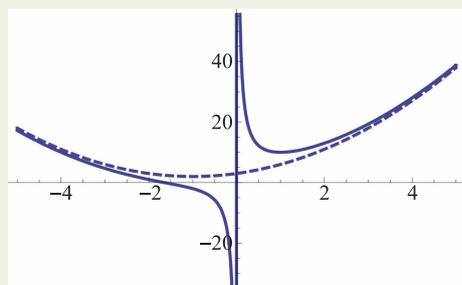


图 6 曲线 $(x^3+2x^2+3x+4)/x$ 的 asymptote 是抛物线(parabola) $y=x^2+2x+3$

8) 葡萄牙殖民者曾用 Formosa 命名台湾岛。