物理学咬文嚼字之九十五
紧绷的世界

曹则贤†
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2018－02－02收到
† email: zxcao@iphy.ac.cn
DOI: 10.7693/wl20180207

君子引而不发，跃如也。
——《孟子·尽心上》

In the beginning, God said that the four dimensional divergence of an antisymmetric second rank tensor equals zero and there was light.
——Michio Kaku[1)]

摘　要　由拉丁语动词tendere引入的tension，intensive quantity，extensive quantity，tensor等是极为重要的物理学概念。从协变形式的经典电磁学到广义相对论，tensor是概念基础。

1　引子

上世纪八十年代在中学、大学学物理那会儿，笔者遇到的一个特别有挫折感的问题是滑轮的受力问题。一根绳子搭在滑轮上，绳子一端挂个重物，受重力F向下，重物还受上边绳子给的一个张力T(很久以后我知道了T是tension的首字母)。这张力T可怪异了，在绳子的任一点上都有，还一对一对的方向相反。而且吧，有的书上会让计算滑轮如果有摩擦时，滑轮两端张力T_1和T_2(方向都画的是顺着绳子向外)之间的关系，答案是$T_2=T_1e^{\mu\theta}$，其中θ是绳子在滑轮上的缠绕角度。[2)]我就纳闷了，这绳子上的张力是个咋回事呢，它咋一对一对的方向相反跟歪曲版的牛顿第三定律描述的情形似的？人家重力就不这样！这纳闷儿，因为我在我能有的书里找不到，又因为怕显得自己蠢也不敢问老师，就一直憋在我心里。张力，唉，张力。

初等物理里面有很多令人困惑处。先说压力，不，压强，吧。用手按压一个有些刚性的表面，比如木桌面，能看到按压的效果，手也会有费力、不能随心所欲的感觉。压力，或者压强，pressure(德语Druck，法语pression)，就是来自动词press(drücken，presser)的抽象名词，英法语的词源都是拉丁语的premere，to press。压强的量纲是单位体积的能量，这在热力学主方程$dU=TdS-pdV+\cdots$中明显可见，或单位面积上的受力。压强的国际单位为Pascal(汉译帕斯卡)，符号为Pa，源自研究大气压的法国哲学家Blaise Pascal。标准大气压就是101325 Pa。物理上的压力不是力，但我们日常生活中会把压力、压强混着说，西语科学文献也有这种混淆，不足为奇。但今天，尤其是明白了物理学无须力的概念之后，压力、压强应该不会再带给我们困扰了。

初等物理课本里常会有这样的描述，对桌面施加一个压力F(确实指的是力)，受力面积为S，则压强为F/S，好麻利、好简单的物理，当年我也以为我学得会。我们会看到，事情比这个要复杂。面积是个有方向的量，力也是有方向的量，那除法F/S得到的压强有什么样的性质呢？没有方向？你用手按压一个光滑的刚性球，或者按压一块豆腐，估计会注意到一些让你深思的现象，下面我们会详细讨论。若是两手紧握一个物体，那是compress，to press together，压缩的意思(动词精简，名词止血绷带、打包机，都是其引申义)。一个物体如果被compressed，它的体积会减小，即

1) 加来道雄：“起初，上帝说反对称二阶张量的四维散度为零，于是就有了光。”不明白？学学协变形式的电磁学，一切都会明亮起来的，连广义相对论也算上。

2) 懂了这一题，那么只要见到一根桩子，你就能勒住一头牛。

物质有可压缩性(compressibility)。如果处理流体问题时，可不考虑其受力状态下的体积变化，则称其为不可压缩流体，incompressible fluid。衡量物体compressibility的物理量既可以称为compressibility，也可以进一步具体一点称为the coefficient of compressibility(压缩率)。压缩率的定义为 $\beta=-\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$ 。对于描述物质的抗压能力，人们还是习惯用压缩率的倒数，称为体弹性模量(bulk modulus)。

2 Strain and stress

提到弹性，就会想到弹簧(spring)[3]上挂一质量 m 的体系。将弹簧拉长一段长度，放松，若弹簧能恢复其原状，它就是弹性的。弹簧振动的物理，从简单的胡克定律 $F=-kx$，到简谐振动及其能量二次型 $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$ ，到量子化的谐振子模型 $H=\left(\hat{a}^{+}\hat{a}+1/2\right)\hbar\omega$ ，$\left[\hat{a},\ \hat{a}^{+}\right]=1$，再到以其为基础的量子场论，据说这足已构成物理75%的内容了。我纳闷的是关于弹簧的行为。弹簧就算能回复原状，它在平衡状态两侧的行为也不一样。一根金属丝，微小拉伸和微小压缩，就算是弹性近似，应该也是不一样的。

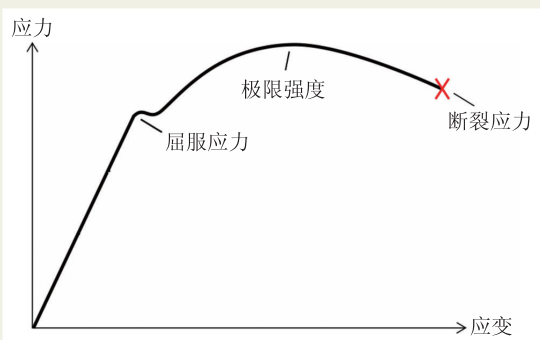

图1 延展性材料的普适应变—应力关系

一个物体被拉、压、拧，外观上会变形(deformed)，内里面也会非常拧巴、不自在(strained)。这就引入了两个非常重要的关于材料的概念，strain 和 stress。Strain 作为动词，来自拉丁语动词stringere，拉紧、绞拧的意思，比如to strain every nerve(绷紧每一根神经)。Stress作为动词来自strictiare，其形容词为strictus，但strictus就是来自动词stringere，也是紧绷的意思。动词strictiare应该有施压的意思，可参校由其而来的名词constriction来理解，见于a constriction in the chest (胸部压迫感)。Stress作为一般英文动词，有加作用力、强调的意思。

Stress和strain在材料力学、连续介质力学(continuum mechanics)中分别被译为应力和应变(形变)，形变是无量纲量，应力和压强的量纲相同，且它们之间有千丝万缕的关系。考虑一个三维物体，其中的应力是由一个3×3的对称矩阵表示的，被称为Cauchy stress tensor(柯西应力张量)，

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z}\end{bmatrix}$$

最后一种表述中另引入了字母 τ_{ij} ，是强调非对角项是剪切应力(shear stress)。在静水压情形下，$\sigma_{ij}=p\delta_{ij}$ 。应力和压强的关系由此可见一斑。

一个物体被strained了，各处都会错位，描述这错位的物理量叫strain。定义如下：考察任一点 $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，位移到 $\vec{x}+\vec{u}$，则 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ 即是strain tensor，$w_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ 是rotation tensor。应力张量和应变张量之间的关系由广义胡克定律给出，$\sigma_{ij}=-C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 或者 $\varepsilon_{ij}=-S_{ijkl}\sigma_{kl}$ ，其中 C_{ijkl} 是elastic constant，elastic stiffness，弹性刚度(劲度)，S_{ijkl} 是elastic compliance tensor(柔度、顺度)[4]。以后我们会看到，刚度张量和顺度张量的当前写法是不太恰当的，它们都是(2，2)-type的张量。Strain和stress之间的关系，是一个共轭的关系。常见有apply a stress(施加一个应力)的说法，恐不易实现。恰当的说法也许应该是subject to an action or external stimulus(置之于一个作用或者外部刺激)。三维情形下应力—形变关系不好理解，那看一维情形下拉伸一个物体(tensile test)所获得的普适性的应力—应变关系：开始时应力和应变成正比，将载荷去除后材料会恢复到原来状态；当形变超过一定程度，材料不再能恢复原状，这时对应的应力为屈服应力(yield stress)；过了这个点材料进入塑性状态，应力在随形变增加而增加到一个最大值(ultimate tensile strength，极限强度)后会变小；材料形变再继续增大到某个值时就会发

3) Spring，来自德语动词spingen，突然冒出来、跳跃。Plants begin to spring from the seeds，植物从种子中萌发，所以在英语中spring作名词还是春天的意思。不过，德语的春天是Frühling，对应中文早春二月的“早”字。

4) 偏偏用 S 代表compliance，用 C 代表stiffness，奇了怪了。

生断裂，断裂时材料的应力为rupture stress(断裂应力)，见图1。

补充一句。Strain有用尽某种资源的意思，a strain on the imagination，那是耗尽了想象力。此外，strain可能还可表示紧绷状态的后果，故muscle strain是肌肉紧张，也可译为肌肉劳损。筋肉劳损加继发性感染炎症，这大概是网球肘一类疾病的机理了。Strained state，难免会遭遇放松过程。放松过程，relaxation process，物理学给译成了弛豫过程。弛豫过程是动力学的过程，涉及一大类物理现象，对它的研究也是物理学的一个重点。此处不论。一个strained体系，让其放松后，一般不会恢复到整体均匀、平衡状态。一个经历过straining过程的塑料板，弛豫后也会留下损伤或者不均性，会在某个物理性质上，比如对光的散射，表现出来(图2)。

3 Tendere

拉伸，英文为to stretch，从对应的拉丁语动词tendere，引申出了一批科学概念，其中一些甚至是数学和物理学灵魂级的概念。法语是拉丁语系的语言，tendere以动词tendre的形式出现，如tendre un arc(拉一张弓)，tendre le esprit(打起精神)，等。动词的过去分词作形容词，有style tendue(僵硬、不自然的文笔)的说法。Tendre un arc，拉弓，那难怪用tension(英法语，张力)来描述a tense rope(一条绷紧的绳子)的状态了(图3)。

英语中tense作动词和形容词用，词组tense up有绷紧、警觉的意思。Tense作为形容词的意思是绷紧的、拉紧的、紧张的。语音学上，发音时要求舌头和上下颚紧张的元音是tense vowel，口腔松弛的是lax vowel。语法书里还会出现另一个意思的tense，汉译时态。注意，此处的名词tense来自拉丁语tempus，就是时间的意思，请勿混淆。

英文中词干为tendere的词汇很多，如pretend，before+to stretch，假装，在人前端着；subtend，under+to stretch，撑开，见于subtends an angle(张开一个角)，the space subtended by the eigenfunctions of a self-adjoint operator(自伴随算符的本征函数张成的空间)；contend，to stretch together，竞争；attend，to stretch forward，注意、警觉；extend，to stretch out，延展、扩展；intend，to stretch for，打算、为……做准备，等等。Tendere的其它形容词形式有tensile(tensible)和tensive，前者见于tensile test(拉伸试验)、tensile property，后者见于tensive rivalry(紧张的竞争)，似乎前者更多体现的是其本义。Tensile用于stress，是tensile stress(张应力)，老年人表皮比其下的真皮面积大很多，其皮肤上积聚的应力就是张应力。与此相反，婴幼儿表皮比真皮面积甚至会显不足，其皮肤上积聚的应力就是compressive stress，压应力。不管是tensile stress还是compressive stress，stress太大了就能把体系给stress out，让体系发生变形甚至断裂。当然，变形或者断裂不是无规的。图4是南极的方糖冰山，重力在浮在水面的积雪中造成的应力使得积雪体发生断裂，断裂几乎呈二维正方格子的花样，俗称方糖冰山。这说明积雪在与大地垂直的二维平面内是各项同性的。巧妙、仔细地引入恰到好处的应力，可以得到自组织的图案，这就是所谓的stress engineering(应力工程)。图5为通过应力工程在微米大小的核—壳体系上获得的应力点阵，精确地再现了相应的汤姆森问题的数学解。

Intend和extend的形容词分别为intensive和extensive。热力学把其关切的物理量分成intensive quantity(强度量)和extensive quantity(广延量)。设想有一个处于平衡态的体系，将之数学地分成两个子体系1和2，则满足关系 $Q_1+Q_2=Q$ 的量是广延量，而满足关系 $q_1=q_2=q$ 的量是强度量。热力学中的强度量和广延量是以成对的方式出现的，是共轭的。具体地说，在热力学主方程 $\mathrm{d}U=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V+\sigma\mathrm{d}A+\mu_i\mathrm{d}N_i+\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{P}+\vec{H}:\mathrm{d}\vec{M}+\cdots$ 中，熵 S，体积 V，表面积 A，粒子数 N，电极矩 $\vec{P}$ 和磁矩

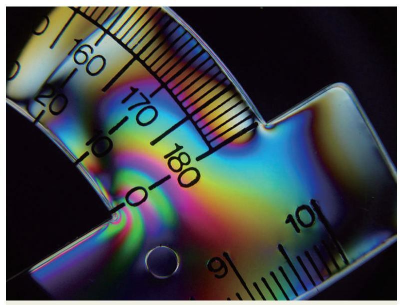

图2 一块抻过或者扭过的塑料板表现出光学性质的不均匀


图3 张弓

图4 南极的方糖冰山

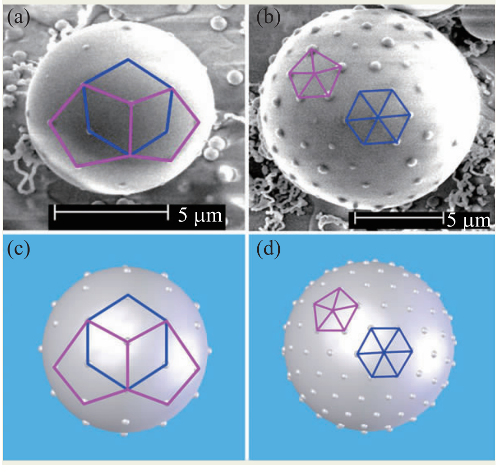

图5 核—壳体系上的应力点阵与相应的汤姆森问题的数学解(李超荣、曹则贤，2005)

$\vec{M}$ 是广延量，而相应共轭的温度 T，压强 p，表面能 σ，化学势 μ，电场强度 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 则是强度量。

4 物理中的tensor

在描述一个strained物体时引入了stress tensor的概念。Tensor，张量，可以说是物理学的一个灵魂级概念。在普通物理课上，另一个我们熟悉的张量是转动惯量，moment of inertia，它还有一个名字叫inertia binor，愚以为可译成惯性二阶矩，这与其字面意义和定义都符合。这个转动惯量是个二阶张量，因为它的任意一个分量都是构建在两个基矢量上的，$I=I_{ij}e_i\otimes e_j$，$I_{ij}=\int_\Omega r_i r_j \mathrm{d}m$。由于这个张量是对称的，所以作为其表示的3×3矩阵是可对角化的，故有所谓三个惯量主轴和主转动惯量的说法(就是线性代数语境中的本征矢量和本征值的具象)。

张量 T 关于它的所有元素都是线性的，一个张量就是一个多线性的映射(a tensor is a multilinear map)[1, 2]。表示张量所需的指标的数目称为张量的阶(degree or rank)[5]，标量是0-阶张量，矢量是1-阶张量，象前述的转动惯量是2-阶张量。考察一个曲线坐标系，将某点的坐标表示为 x^{μ}，临近的一点为 $x^{\mu}+\mathrm{d}x^{\mu}$；在另一个曲线坐标系下，这两点可分别表示为 $x^{\mu'}$ 和 $x^{\mu'}+\mathrm{d}x^{\mu'}$，则有 $\mathrm{d}x^{\mu'}=\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\nu}=x^{\mu'}_{,\nu}\mathrm{d}x^{\nu}$。则若一个量在坐标变换时按照如下方式变换，

$$T^{\alpha'\cdots}_{\beta'\cdots}=x^{\alpha'}_{,\lambda}\cdots x^{\nu}_{,\beta'}\cdots T^{\lambda\cdots}_{\nu\cdots}$$

那就是一个(p，q)-张量，其中 p 是上标数目(指示逆变部分)，q 是下标数目(协变部分)。对于一个矢量空间，两个矢量的内积定义为 $\langle v, w\rangle=g_{ij}v^i w^j$，其中的2-阶逆变张量 g_{ij} 就是著名的度规张量(metric tensor)，空间弯曲的性质都着落在它身上了。用张量的好处是，它在不同曲线坐标下形式是一样的。若一个守恒定律的形式是一个张量表达式等于零，则在坐标变换下其形式不变，仍能被一眼认出来。与张量对应的是nontensor。Tensor的形容词形式是tensorial，关于tensor的数学是tensorial calculus或者tensor analysis(张量分析)。

电磁学有张量表示形式。电磁学的协变张量形式，依然是Euler—Lagrangian形式。保持麦克斯韦波动方程形式不变的时空变换为 $x^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}_{\nu}x^{\nu}$，其中 Λ^{α}_{β} 就是洛伦兹变换张量，是个(1，1)-张量。把相对论从电磁学推广到能包括引力，最后会着落到一个二阶协变张量形式的方程上，主角是那个度规张量和(电磁学已有的)能量—动量张量 $T_{\mu\nu}$ 上。1915年底，爱因斯坦得到了如下形式的引力场方程

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=8\pi GT_{\mu\nu}$$

其中，$R_{\mu\nu}$ 是可由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 导出的里奇曲率张量，描述空间的弯曲[3]。这个方程告诉我们能量—动量张量决定空间如何弯曲。引力场中的测地线方程为 $\dfrac{\mathrm{d}v^{\sigma}}{\mathrm{d}s}+\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}=0$，这个方程告诉我们粒子在弯曲的引力场中如何自由下落。有趣的是，这个方程中的量 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$，第二类Christoffel symbol，是个nontensor。经典电磁学和它的协变形式，才是狭义、广义相对论的基础！

5 结语

仔细地回顾了stress—strain关系，tension的概念，以及如何借助张量的概念从协变的经典电磁学形式走到广义相对论，似乎正应了笔者的一个观点，量子力学和相对论之所以难学，那只是因为我们没学会经典物理的缘故。

参考文献

[1] Schouten J A. Tensor analysis for physicists. Oxford university press, 1951

[2] Frankel T. The geometry of physics: an introduction. Cambridge university press, 2012

[3] Dirac P A M. General theory of relativity. John Wiley & Sons, 1975

5) 关于张量的order or degree or rank or type or valence，西文文献也是很乱的。