

# 物理学咬文嚼字之九十六 推之成广义

曹则贤<sup>†</sup>

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2018-02-14收到

† email: zxcao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20180309

Generally speaking, every rule has an exception.

——Proverb<sup>1)</sup>

**摘要** 总想 generalizing 点儿什么简直是数学和物理的通病。知道都 generalized 了哪些内容, 才能理解 general relativity 到底是怎么个广义法儿。

## 1 General generality

生物学家给生物分类, 弄出了个层次分明的分类结构, 即所谓的域(domain)、界(kingdom)、门(phylum)、纲(class)、目(order)、科(family)、属(genus)、种(species)。其中, genus, 拉丁语名词, 复数为 genera, 与生产后代有关, 一些与其相关联的词汇如 generate, generator 等, 此前已讨论过<sup>[1]</sup>。在数学上, 一个带取向的面的 genus (此语境下被译为亏格数) 是其所拥有的洞洞的数目 (number of holes, 这可以当作分类的特征), 无穷大平面和轮胎面 (torus) 都是 genus 为 1 的面。Genus 的拉丁语同源词有 generabilis, 对应的英文为 generable, 意思是 that can be generated (可产生的、可生成的), 见于 heat-generable mold (热成型模具), regenerable energy<sup>2)</sup> 等

词。与 generable 同源的形容词有 generative, 即有生产、创造能力的, 见于 generative organ (生殖器官), generative artist (有产出的艺术家), generative grammar 等等。Generative grammar 是一种语言学理论, 认为 grammar 是一个规则体系, 其可以产生字词之组合以形成句子。中国的语言学家们将 generative grammar 汉译为生成语法, 一个“成”字让这个译法显得实在不妥。

本篇关切的是与 generable 同源的另一形容词, general。General, 意思是 of, for, or from the whole or all; 或者是 of, for, or applying to a whole genus, kind, class, order, or race。故此, in general, generally speaking, 那意思是一概而论, 不指向特定的对象, 也不纠缠于细节, 而且可能还允许一点儿模糊。General physics, 普通物理, 或者物

理通识, 大概是说不就单一主题深入探讨。比如谈论抛体轨迹的问题时, 给个抛物线方程就凑合了。至于抛体是球形还是锥形的, 飞行速度是高于声速还是低于声速的, 那就管不着了。General 一词的汉译很多, 包括总的、通用的、一般的、全体的、普遍的, 等等, 见于比如 general belief (大伙儿的信条), general rule (通用规则), general principles (总的、全的原则) of reality, 具体的意思都需要细细揣摩。至于象 general theory of 19<sup>th</sup> century physics 中的 general, 光凭字面还真猜不出来它到底说的啥。印象中 general premise 是被汉译成“大前提”的, 例如如 “Arithmetic and some geometry existed among the Egyptians and Babylonians, but mainly in the form of rules of thumb. Deductive reasoning from general premises was a Greek innovation (算术以及一些几

1) 此句谚语大意是, 一般来说, 规则都有例外。不过在某些地方, 规则有太多的例外以至于人们根本不相信那儿还有规则, 比如俄语语法。

2) Regenerable energy, 汉译可再生资源。以笔者的物理和文字水平, 这个英文和它的汉译我一概完全都不懂! Energy as a quantity, 能量作为一个量 (可阅读 Roger Penrose 的 *The road to reality* 以方便理解), 它是如何可以 regenerate 的? 而能源不该是对 energy source 的翻译吗? 物理学花了约 2600 年才多少有一丁点儿科学的味道。众多以为给自己贴上科学的标签就能成为科学的学科, 要想成为真正的科学, 恐怕还有漫长的——也许是无尽的——路要走。

何知识早已为埃及人和巴比伦人所掌握，但主要是以傻瓜定理的形式。从大前提出发进行演绎推理是希腊人的发明”。而象 physical matter might be conceived as a curved ripple on a generally flat plane (物质可以看成是大体上平的面上的弯曲涟漪。这个想法是数学家 William Kingdon Clifford 在相对论诞生之前 40 年说的)一句中, generally flat plane 那就是大体上平的面, 局部允许是弯曲的。

由 general 进一步衍生的词汇包括 generality, generalize, generalization 等。Generality, 即一般性, a generality is a kind of whole, comprehending many things within it, like parts. Generality 有个可并肩的伙伴儿叫 universality, 普适性, 那可是对理论的极高肯定。据说是在关于对称性、简单性和一般性(generality)的感觉指引下, 物理学家开展工作。而真正具有 generality 和极大简单性的能描述自然的方程又必定是非常优雅、细腻的(elegant and subtle)。Generality 有多重要? 数学家 Saharon Shelah 说道 “I love mathematics because I love generality!” 顺便说一下, 英文有短语 without loss of generality, 意思是不失一般性, 数学物理文献中常作为欲以特例阐述问题时的导入语, 有点此地无银的味道。

把结论或猜想或者别的什么东西作推广(generalize)是数学的习惯, 说是本能都不过分, 这种推广可以从实数域到复数、四元数域(domain), 从有限维到无穷维, 或者是从群扩展到域(field), 从二元运算扩展到  $n$ -ary operation (带入  $n$  个变元的操作)。因此, 在数学书中到处可见 generalized 的概念, 比

如 generalized displacement operators (广义位移算符), generalized vector field (广义矢量场), generalized symmetry (扩展的对称性), generalized functions (广义函数), generalized convexity (广义凸性), 等等。我们甚至可以说, 几乎所有的数学概念都不能幸免。

## 2 Special species

有趣的是, 生物分类中和属(genus)紧挨着的、也是最后一个的层次是种, 西文为 species。与 species 同源的词, 包括 special, specific, specialized, 正好是 general, generalized 等的反义词。Species, 词源为拉丁语动词 specere, to watch close, 即仔细打量, 那是另眼相待的意思了。由 specere 而来的词汇包括 spy, spectrum, spectroscopy 等, 此前已有论述<sup>[2]</sup>。据说数学家 Stein 的调和分析(harmonic analysis)和 Shelah's 的集合论(set theory)研究, 代表了关于数学的完全对立的心理态度, 其可归于 specific vs. general 的对照。作为 specific vs. general 的例子, 数学上还有 general linear group, 简记为  $GL(n; R)$ , 那就是由所有的非奇(nonsingular, 即矩阵值不为零)的实  $n \times n$  矩阵构成的群; 相应地, 有 special orthogonal group  $SO(n)$ , 这是由矩阵值为 1 的正交矩阵组成的群, 可以描述  $n$ -维空间中的纯转动。

与 generally speaking 对应的有 specifically speaking, 那就是有针对性地或者拿特例讲话了。

## 3 广义坐标与广义动量

学物理的, generalized coordi-

nate 是迟至大一时就躲不过去的概念。所谓的 generalized coordinate, 广义坐标, 意思是有别于传统的笛卡尔坐标或者别的正交坐标(图 1)。在研究沿圆周运动时, 广义坐标可以选相对圆心所张的角; 而传统的笛卡尔坐标给出圆上点的位置, 用的是圆所在平面上所规定的坐标  $(x, y)$ 。广义坐标的选择很多, 但选择的原则是尽可能多地使用独立坐标, 使得运动方程容易解, 以及更多地体现体系的不变性(与对称性相联系)。举例来说, 沿曲线的运动只需要一个广义坐标, 可以选择弧长或者相对(外部)某点所张的角。用弧长作为参数描述曲线本身是微分几何的常规做法, 也是理解相对论的基础——测地线是相对论的关键概念。广义坐标  $q_i$  的时间微分是广义速度 (generalized velocity)。因为可以自由地 specify 广义坐标和广义速度的初始值, 因此可以把广义坐标和广义速度当作独立变量处理(为什么? 盼有识之士指教)。一个体系的独立变量的最大数目是系统的自由度, 这就难免

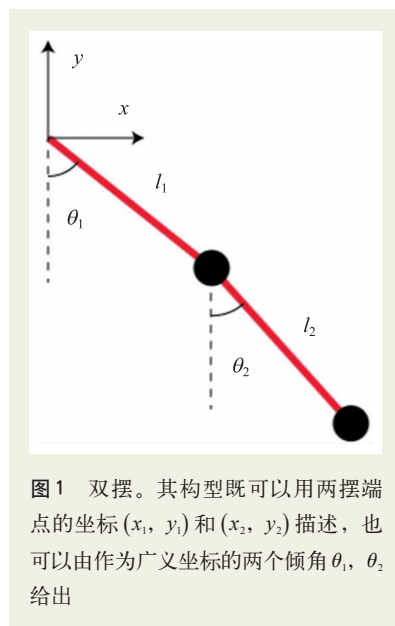


图 1 双摆。其构型既可以用两摆端点的坐标  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  描述, 也可以由作为广义坐标的两个倾角  $\theta_1, \theta_2$  给出

要扯到约束上面。处理约束下的力学，就是拉格朗日力学，拉格朗日乘子法就是求约束下极值的计算方法。由拉格朗日量  $L=T(q_i, \dot{q}_i, t)-V(q, t)$ ，可得广义动量  $p_i=\partial L/\partial \dot{q}_i$ 。注意，广义动量是广义速度的关于拉格朗日量的共轭量，不是广义速度乘上质量。

有了拉格朗日力学，可顺势进入哈密顿力学。哈密顿正则方程才是物理学中最美的方程之一，如何赞美它我还没想好。先有了经典力学运动方程的一般性(generality of motion equation)，然后通过泊松括号可推广到量子力学(generalization to quantum mechanics through Poisson bracket)。广义坐标，拉格朗日力学，哈密顿力学，泊松代数(Poisson algebra)，协变形式电磁学，加上黎曼流形(Riemannian manifold)的语言，有了这些铺垫然后让思绪滑入量子力学和相对论就是自然而然的事儿了。有generality的理论，那才高。

#### 4 狭义相对论与广义相对论

众所周知，相对论分狭义相对论和广义相对论。狭义相对论，special relativity，或者special theory of relativity，也有英译为restricted relativity的，意思是该理论局限于处理(is restricted to)惯性系相对作匀速运动的电动力学问题。狭义相对论的对象和缘起是电动力学，处理的是平直时空的变换，其要点是洛伦兹变换和洛伦兹变换下不变的麦克斯韦波动方程。洛伦兹变换的参数是惯性系之间的相对速度。

麦克斯韦波动方程和牛顿引力

方程具有不同的对称性。爱因斯坦希望电动力学的洛伦兹变换也适用于引力问题，因此他在1907—1915年的这段时间里要把狭义相对论推广(generalize)到引力问题上，即要求引力场方程也满足局部时空洛伦兹变换下的对称性。为此，首先要采用广义坐标系，方程要弄成协变张量的形式，从而使得理论是general的，即形式上不依赖于坐标系的选择(there be no preferred coordinates)。牛顿的引力理论是一个标量理论，电磁学(电动力学)是矢量势理论，为了让它们有同一套对称性，爱因斯坦选择把相对论性的引力理论表示为二阶张量理论形式，为此要采用广义微分(generalized derivative)把矢量的微分弄成二阶张量，最后得到的引力场方程是一个关于对称协变二阶张量的方程<sup>[3]</sup>(图2)。在一个弯曲空间中，对一个矢量  $A_\mu$  的协变微分为  $A_{\mu;\nu}=A_{\mu,\nu}-\Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma$ ，其中  $A_{\mu,\nu}$  是常规意义下的微分， $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$  是Christoffel符号，由空间的度规张量  $g_{\mu\nu}$  给出。度规张量  $g_{\mu\nu}$  是一个二阶协变张量，定义了空间的性质。张量方程的特点是，作坐标变换，方程形式不变，也就是那方程的形式具有一般性(of generality)。这就是所谓的广义相对论的广义协变原理(principle of general covariance)，彭罗斯谓“保持记号不依赖于坐标系的选择是爱因斯坦理论之精髓(To my way of thinking it is essential for the spirit of Einstein's theory that this notion of coordinate independence be maintained)”<sup>[4]</sup>。当然了，广义相对论的最终目标是构造对任何相对运动的坐标系都成立的引力场方程。广义相对论，英文为

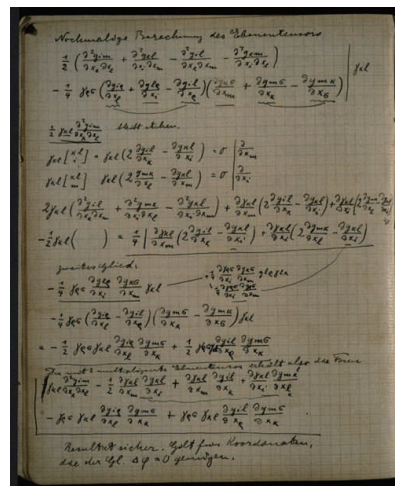


图2 爱因斯坦的笔记。把方程写成 absolute differential calculus 的形式对他来说也是挑战

general relativity，或者general theory of relativity，也有称为generalized theory of relativity的。广义相对论的德文说法为allgemeine Relativitätstheorie。Allgemeine，特别普通的一个形容词，字面意思是all meant, all concerned，可理解为“全涉及的”。对于David Hilbert, Tulio Levi-Civita这样的对相对论感兴趣的数学家，以及狄拉克这样的学数学出身的物理学家，广义相对论还真是general theory of physics而已。

#### 参考文献

- [1] 曹则贤. 物理学咬文嚼字之三: 万物衍生于母的科学隐喻. 物理, 2007, 36(9): 726
- [2] 曹则贤. 物理学咬文嚼字之五: 谱学: 关于看的魔幻艺术. 物理, 2007, 36(11): 886
- [3] Frankel T. The geometry of physics: an introduction. 3rd edition. Cambridge university press, 2016
- [4] Penrose R. The road to reality. Vintage Books, 2004. p. 458