

物理学咬文嚼字之九十八

Phase: a phenomenon

曹则贤[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2018-04-14收到

† email: zxcao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20180506

陈山川位象。
——[晋]张华《博物志》
月有阴晴圆缺……
——[宋]苏轼《水调歌头》
万象皆宾客。
——[宋]张孝祥《西江月·过洞庭》
一切诸相，即是非相。
——《金刚经》
成一切相即心，离一切相即佛。
——六祖惠能《坛经》

摘要 汉语相、象、像的用法很混乱。对应相的英文词 phase 与 phenomenon, phantom, fancy, fantasy 等有着千丝万缕的联系，此外还有 phase factor, phasor, phason and phaser 这些令人眼花缭乱的衍生概念。Phase 是二十世纪物理学的主旋律之一，其所关联的数学与物理艰深得让人胆怯。记住 phase 可理解为“现象、阶段”或许有益。

1 相、象、像

这些年作为一个半吊子作家，在下时常会遭遇因相、象、像三字的用法而来的恼火。当颀预携着权威居高临下地指手画脚时，无助的作者除了哀怨自己不是权威之外，便只有黯然落泪的份了。不过，话说回来，相、象、像这三字之用法确实历来混乱不堪，文字“权”威们除了蛮横地来个惯常的一刀切，倒也想不出啥别的招数。

相(xiàng)，从木，从目，视也。所谓伯乐相马，风水先生相宅，年轻男女相亲¹⁾，都是 to look upon, to inspect carefully and technically, circumspect and expect。相这个动作关注的对象是外貌，即相貌 (appearance) 也。相首先是面相，脸上表现出来的应该与相有关，如卖相、吃相，《西游记》就对猪八戒的吃相多有褒贬。人之面相，就是其内在之表象(你看，相、象是相通的)。根据 Stokes' theorem, $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$ ，或者鄙人的“内涵都

在表面上”定理，表象(表现)包含着全面的内在信息。“相由心生”(出自佛教经典《无常经》)，就是这个定理的通俗表达。所谓“非人臣之相”，“岂吾相不当侯邪?(见《史记·李将军列传》)”，谈论的都是人之面相同其内在与前途的关联。推测吉凶祸福、贵贱夭寿的相面之术，在中国历史上一直是显学，《麻衣神相》的印数大概能和人类共同的经典《几何原本》²⁾相比拟。

把光(photo, φως)影给画下来 (graphein, γράφω)，就得到了相片

1) 相(xiàng) 亲是看异性还可意否，相(xiàng)是动词；相(xiàng)亲相爱，to love reciprocally，相(xiāng)是副词。

2) 全世界各种语言版本的总和。汉语的《几何原本》估计没多少人读，一来谁会喜欢真学问，二来难见让人放心的中文译本。

(photograph), 那个照相片的装置叫照相机。到照相馆里去照相片的年代, 相机是稀罕物, 记录影像的材料也是稀罕物, 因此照相是尽可能照脸的, 只为了求得能和人联系起来的面相, 故那时人的 photograph 是相片。到了纪录影象、映象(image)不差钱的年代, 相片——或者叫照片更合适——里面, 其他部位才冠冕堂皇地也占有一席之地(图1)。等到 CCD (charge coupled device) 成为了记录影象的器材, 连续的、偷偷的、根本不管被照对象是啥姿态、啥表情、愿不愿意的照相——嗯, 该叫监控——就成为可能了, 这些都是拜科学与技术的进步所赐。

象, 除了指那种大鼻子、大块头的动物以外, 还指 appearance, phenomenon, character, 如象征、象兆、现象、形象、印象、假象、天象、险象、脉象等词语中的象字, 皆为此意。象作动词, 有描述、描绘之意, 见于随色象类、赫赫可象、因势象形等成语。

像, 从人, 从象, 这决定了它既是和象同义, 又可能专指人, 见于画像、雕像、塑像等词, 似乎和英文的 image, imaging 相对应, 所谓“影之像形也”。据说段玉裁注《说文》, 言“然韩非之前或只有象字, 无像字。韩非以后小篆即作像。”如此说成立, 则像字的用法应多有限制。即以人像(image, picture)之义而言, 用象亦可。古人“上瞻兮遗象, 下临兮泉壤”中的遗象, 可能真的只是生者脑海里的印象(impression), 倘自作主张给改成遗像, 却到哪里去寻一幅画像或者相片去。至于说到两个人相貌相似, 长得像(similar), 这没问题。延伸

用于比喻的场合, 说雪花像柳絮一样纷纷扬扬, 似也问题不大。但是, 倘用作“如同, as, being similar to”之义, 硬装作“好像”不认识一样, 坚持说“好像”是错的, 那就有点不象话了。象与像字用法的混乱, 除了历史渊源以外, 近代简化字方案的几番来回折腾也功不可没。象一度被误认为是像的简化字(去掉了人旁), 这就有点颠倒历史了。

相也和象(similar, looking like)相通。《西游记》有句云“几树青松常带雨, 浑然相个人家”, 就是例证。比较一下相貌和象貌, 看似是同一个词, 却也有细微的差别: 前者强调一个人在他者眼中的视觉效果, 而后者强调一个人(物)自身的表现。对待相似的——其实是有内在联系的——不同字词, 认真体会其细微差别力求正确使用但又容许模糊地带的存在, 才是科学的态度, 楞充专家非要给个硬性的标准不过是假托权力的傲慢。说到这里, 笔者想到了连接、联接、联结、连结、链接这一组词, 硬性地给出个使用标准恐怕是徒劳的。它们之间有区别也有联系, 那联系是微妙的, 那区别也就不易明确划定。

这一篇, 单说一个与相字有关的物理概念, phase, 汉译相、相位、位相、阶段等。Phase 的字面上的多面性以及所含物理内容的深刻程度, 鲜有其匹。



图1 笔者在不同 phases 的相片(左, 1980)与照片(右, 1992)



图2 一个周期内的月相

2 Phase and phenomenon

Phase, 来自希腊语的 phainesthai, 现代希腊语就写成 φάση, 同源词有 fantasy (φαντασία), phantom (φάντασμα)等。它的第一重意思是指月亮或者行星之照度及形状之不断再现的变化各阶段; 发展的任意阶段或者形式; 事物可以被观察或者考虑的任何方式; 非均匀体系中存在的任何可区分的部分; 振荡周期的一部分, 等等。有时, phase 不过就是强调某个时刻或者时段, 如 heroic phase 就是个逞英雄的时刻, the history enters a new phase 的意思是历史进入新阶段³⁾。

月亮绕地球运动的周期约为 29.5 天。在一个周期里, 可观察到月亮被照亮部分形状的变化(图2), 或者说月亮被照明因而呈现出

3) 也许理解成“展现了新面貌”会更确切些。

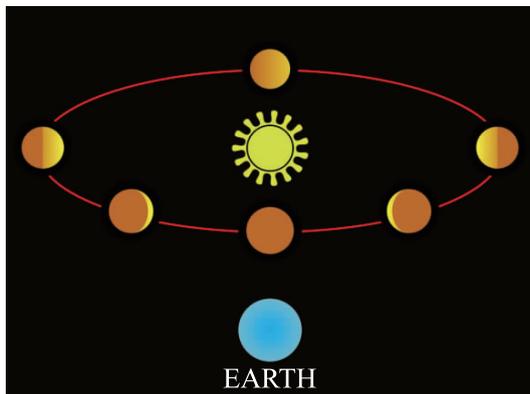


图3 金星的相



图4 在月球上看过去，地球也存在相的变化

来的相是周期性变化的。Phase of moon or lunar phase, 汉译月相, 此处的相就是相貌、象貌的意思, 所谓 phase is a phenomenon (德语为 *Erscheinung*), 就是这个意思。Phase 在中文物理文献中被译为相位, 是位相的颠倒, 此位相就是“陈山川位象”中的位象。位象, 本意是位置(position)和表象(appearance)。笔者猜测, 把 phase 译成相位, 是想表达因“位”之不同带来的“相”的变化, 不知确否? 当然, 人们谈论 phase of moon 时, 谈论的是作为时间函数的月亮外观。朔、上弦月、满月和下弦月, 大致对应英文的 new moon, waxing crescent, full moon and waning crescent。“正月到十五, 十五的月儿圆”, 事物的外观, 以及运动的节律, 是可作为时间的度量的, 而这正是时间的

本质。Phase is time, 与 phase (microstate) 作为点在 phase space (见下文) 中的几何变换对应其随时间的动力学演化, 是一致的。其实, 反过来想才是对的。物理事件就是那么发生了, 不需要基于重复再现的事件抽象而来的时间概念! 利用抽象概念反过来描述抽象概念得以出现的具体物理事件, 是一种智慧, 使得对物理的简洁描述成为可能, 但也埋下了理解时间和整个物理学的隐患。从字面上看, 月相一个周期变化对应的的时间就是一个月, 中文如此, 西文也如此 (Mond/月亮, Monat/月; moon/月亮, month/月; lune/月亮, mois/月)。在用中西文理解 phase 时, 应牢记它有时间的含义, 指事物的发展阶段(所展现的外观)。

月相是由太阳(光源)、地球(观测点)和月亮(被观测物体)三者之间相对位置变动带来的月亮外观的周期性变化。以子夜时刻为准, 月亮在天空的位置当然也是变化的。中文把 phase 理解成位相、相位, 是有道理的。在天文学史上, 金星之 phase 的发现具有重大意义。1610 年 9 月, 伽利略发现金星也有“月相”式的盈亏(图3), 他给开普勒发信说: “The Mother of Loves emulates the shapes of Cynthia (金星也仿照月亮的模样)” 地心说和日心说都能解释金星的相, 但结果却不同。在地心说中, 金星总在地球和太阳之间, 所以不会超过半圆; 在日心说中, 金星可以跑到地球的背面去成为“满月”。伽利略的这个发现, 成为

了否定托勒密体系(地心说)的第一个直接证据。另一个直接证据是四颗木星卫星的发现。伽利略谈月相, 自然用的是意大利语 fase della luna (fasi lunari)。缺乏飞出地球的本领限制了伽利略的想象力, 今天人们知道, 从月球应该也能看到地球的 phase, 笔者仿照伽利略的话, 将之称为 fase della terra (地相), 见图4。

就词源来说, fantasy(phantasia, φαντασία), emphasis(ἐμφαση), phantom, phantasm (φάντασμα), 意思都是 appearance of a thing (外观、现象), 只是表现有细微不同而已。Fantasy 意思是幻想、幻想产物, fantasia 指幻想曲或即兴作品, fancy 的意思包括想象力、想象的事物、自命不凡等; emphasis, 汉英字典会说它是强调的意思, 但必须记住是轮廓、外观鲜明突出而来的强调 (phase 就在 ἐμφαση 里呢); phantasma (复数 phantasmata) 被汉译为幻象、幽灵, 而 phantom 被汉译为鬼怪、幽灵。物理学研究的就是现象, 因此这些词汇都会以各种面目出现在物理学中。举例来说, 粒子是微观的, 粒子概念多是 fantasy 的产物, 证实或者抛弃之过程也带有 fancy 的色彩, 因此许多存在或不存在的粒子都被贴上过 phantom particle 的标签。顺便提一句, phenomenology, 现象学, 作为一门哲学, 对物理学家或许有醍醐灌顶的作用。佛经云“凡所有相, 皆是虚妄”, 因为相是一方(眼睛、大脑)对相互作用结果的诠释, 有歪曲和误会的可能。物理学的要务是通过现象看本质(拉丁语 essence, 即 being), 例如彩虹就是现象, 因为在不同的角度有不同的观察结果, 而本质起码应该具有参照系不变性。与 phenomenon 相对的另一哲学术语是 noumenon,

汉译本体、实体。此处不论。

3 振动与波的 phase

考察平面上的匀速圆周运动，其在任一方向上的投影可表述为 $x = A \sin(\omega t + \phi_0)$ ，这是关于单一频率振动的标准描述，是个单变量正弦函数。这里的 $\Phi = \omega t + \phi_0$ 是振动的相位， ϕ_0 是初始相位。一个来回振荡的物理现象，不管是 oscillation, vibration 抑或 liberation，都可以用这样的单变量正弦函数描述。如果是关于空间和时间多变量正弦函数，形如 $y = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_0)$ ，这是描述波的利器，其中 $\Phi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_0$ 是波的相位。形如 $y = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi_0)$ 这样的波是全空间的分布。用这样的函数叠加而成的波包表示局域的存在，或者把不管什么样的时空变化函数 $f(x, t)$ 都分解成这样的波之叠加，是处理物理问题的一种便利，也带来物理理解的灾难。对于沿一维空间传播的单一频率正弦波， $y = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$ ，有 $\partial \Phi / \partial x = k$ ； $\partial \Phi / \partial t = -\omega$ ，故可定义相速度(phase velocity) $v_p = dx/dt = \omega/k$ 。与相速度相伴随的概念是群速度，group velocity，那是关于波包的性质。

电力的输送一般采用单一频率，我国交流电的频率标准为 50 Hz。在交流电输送和使用方式中，有 single-phase electric power (单相电) 和 three-phase electric power (三相电) 的说法。这里所谓的相，是振荡电压信号的 phase。三相电是指频率皆为 50 Hz 的三组交流电，相互



图5 In phase and out of phase

间的相位差保持为 $2\pi/3$ 。若单相电压为 220 V (振幅值，相对于零线)，则两个火线之间的电压为 $220\sqrt{3} \sim 380$ V。三相电的接法一般采用三相五线制，即三根火线(L)，一根零线(N)和一根地线(E)。

事物发展的不同阶段(phase)，入了 $\sin(kx - \omega t + \phi_0)$ 的形式，在中文中就成了相位(phase)。Phase 描述运动与变化，引出了一些有趣的短语，如 in phase, out of phase, dephasing 等。月相和地球上的潮汐是 in phase 的，意思是它们的表现有时间上的关联⁴⁾。考察一维链的振动问题，假设相邻两格点有固定的相位差，这个每一格点各自振动而相邻点有固定相位差的(in phase)集体振动，被称为格波(lattice wave)⁵⁾。相应地，步调不一致，或者相位差(动作的阶段差)有点儿凌乱的(图5)，那应该是 out of phase。至于 dephasing，那指的是一个量子体系恢复到经典行为(相位不关联)的机制，估计是因为处于量子态的粒子可一概看作波的缘故，故有相位的问题？系统一旦进入经典领域，相位带来的效应可能就给平均掉了。Dephasing，汉译有失相(估计参照了失稳的译法)、散相，笔者倾向于散相的译法，不妨比照武林高手散功的

说法。与 dephasing 相关联的概念有 decoherence，汉译退相(xiǎng)干。

相位是描述光束的关键概念，调制传输介质的性质可以带来很多奇异的性质，关于这些性质的描述多牵扯到 phase。举例来说，近期有研究表明，单色电磁波隧穿一个用介电常数近似为零的材料做成的二维窄通道时，据信在通道内相位不变¹⁾。又，光纤的色散引起光脉冲不同频率的分量变得 out of phase，脉冲的包络会展宽；如果光强足够引起折射率随强度的变化，折射率的非线性变化会引起相位调制，但是 time-varying phase 等价于频率变化，此是所谓的 chirp (啁啾)过程²⁾。在光学的诸多场合，相位的用法让人困惑。比如，若一个光脉冲的宽度远小于其周期，比如宽度为 attosecond (10^{-18} s) 量级、频率约为 6×10^{14} Hz 的绿光脉冲，相位到底在说什么？若光束的强度弱到一定程度可被看作是断续的光子流的话，用 particle 的图像说话，相位又作何解？

4 Phase, phase factor, phasor, phason and phaser

在振动和波的经典描述中，复数表示被自然地引入。因为有恒等

4) 一些高等动物的雌性，其生理周期同月相是 in phase 的。这再再说明太阳—地球—月亮这个三体体系才是生命的家园。单靠地球是不足以产生生命的。此外，我猜测某些高等动物的雄性可能也存在同月相 in phase 的行为。

5) 弱弱地问一句，格波应该没有麦克斯韦波动方程那样的波动方程，它和电磁波应有所区别吧？

式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ，作为实系数二阶微分方程解的、应该表现为实数的物理量，也会随手被写成含 e^{ix} 的形式，比如一束入射光的电场矢量被表示为 $\vec{E} = \vec{A}e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ ，全然不顾电场不能是复数的事实。这样写的理由，我猜，是因为二阶微分算符（必须是二阶的！）的本征值问题，其解为 $\cos x$ 和 $\sin x$ ，或者 e^{ix} 和 e^{-ix} ，的形式。采用 e^{ix} 和 e^{-ix} 复数形式的表达，容易通过叠加而得实解。我不知道在考虑高阶、非线性问题时这么做是否也是可以的。

在更高深的物理如量子力学中，薛定谔方程是含虚系数的二阶微分方程，它的解，波函数 (wave function)，先验地是复数，其相位更是带来深刻的物理，而这其中的数学其实并不是那么显而易见，甚至我怀疑有误解或者尚未认识到的内容。波函数作为复数总可以写成 $\psi = Ae^{i\phi}$ 的形式，此处的 ϕ 被称为 phase factor，汉译相因子。相位的存在，让人们用关于 $|\psi_1 + \psi_2|^2$ 的计算轻松地糊弄了对波（水波、光波）干涉现象的解释⁶⁾。进一步地，波函数的相位还为诸多奇异量子现象提供了廉价的解释，如 Josephson 效应（两块超导体中间夹一非超导的薄层可以承载直流超导电流以及在直流电压下产生交流电流的现象），反常量子霍尔效应，Aharonov—Bohm 效应等。当然，薛定谔方程的解不是个 trivial 的问题。波函数还存在与参数空间回路之几何相关的相因子（路径依赖的相因子早在 1930 年代就被狄拉克阐述），称为 Berry phase。Aharonov—Bohm 效应也被证明是一个几何相问题。激光是建立在相干性概念之上的，相干性也是用波函数相位因子描述的。

欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 保证了 $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ 。这样，针对实的振动 $A \cos(\omega t + \phi)$ ，函数 $Ae^{i(\omega t + \phi)}$ 是它的解析表示 (analytical representation)。函数 $Ae^{i(\omega t + \phi)}$ 被称为 phasor，有时候只把 $Ae^{i\phi}$ （也可写成 $A \angle \phi$ ）称为 phasor。Phasor 的汉译比较乱，相量的说法或可接受。因为 $Ae^{i(\omega t + \phi)}$ 是复平面内的一个 vector，不知道相量是不是参照 vector 的向量译法，虽然 vector 的向量译法属于错译。

准晶的发现刺激了研究多重单胞 (multiple unit cells) 铺排问题的兴趣。彭罗斯铺排 (具有五次转动轴) 使用了风筝和飞镖两种单胞，而十二次准晶则包含等边的正三角形和正方形。以随机或者规则的方式使用多重单胞使得某种铺排成为可能，这个额外的自由度被称为 phason degree of freedom^[3]。Phason，汉译相子。

此外，加来道雄有本书，名为 *Physics of the Impossible: A Scientific Exploration into the World of Phasers, Force Fields, Teleportation, and Time Travel*^[4]。我不知道该如何翻译 phaser 这个词。有趣的是，汉译本直接把这个副标题 *A Scientific Exploration into the World of Phasers, Force Fields, Teleportation, and Time Travel* 放过了。

5 作为复数的波函数及其多分量形式

波概念的一大胜利是解释了光的双缝干涉，为此参照了水波的双缝干涉。数学上表现为来自两个源的电矢量 $\vec{E} = \vec{A}e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ 相加，且因为强度正比于振幅的平方，这给

等间距的干涉条纹一个说得过去的“解释”。然而，量子力学的 (复) 波函数同经典力学中可用复数表示的力学或电磁振荡，其间是有不小差别的。归一化波函数的模平方被当成粒子出现的几率密度，为了保证物理量为实数，量子力学对对应物理量的算符施加了自伴随 (self-adjointness) 的要求。波函数从一开始就必须是复数，不只是因为薛定谔方程有虚系数的问题，而是从物理上说，当位置和动量在哈密顿力学中被当作一对共轭量处理时，这个种子就埋下了。复数是二元数，哈密顿正则方程的形式就暗含着二元结构的内禀代数。复数和实数之间不是虚与实的区别，而是二元和一元的区别。二元数，如同旋量 (spinor)、矩阵，它是携带固有代数的。记住复数是二元数的事实，complex number is real，一个虚部为零的复数依然是个二元数，有两个 parts。归一化的复波函数，其相位是物理、数学的实在，表现出某些物理效应一点也不应令人惊讶。在解释一些量子现象时，用来解释现象的总是相位差，相位值 $\phi(x, t)$ 似乎未被确定。另外，动能算符 (平移算符。与泰勒展开渊源颇深) 的本征函数 $e^{inx/\hbar}$ 常常被随意地解释成相位因子，似乎不是很合适。

量子力学用复波函数 (二元数)，量子化条件为位置—动量两者之间的非对易关系，因此要考虑波幅—相位两者 (dyad) 是天经地义的事情。1972 年，狄拉克强调说量子力学的重要特征不是非交换代数，而是 phase。波函数 $\psi(\vec{r}, t)$ 是一个全局函数，而电子的密度 (one-electron density matrix) 却可能是局域的 (spatially localized)，或者电子态密

6) 真实的干涉条纹显然不是等间距、等亮度、全域分布的。

度感受的扰动是局域的，这就是 Walter Kohn 所谓的电子之近视问题 (near-sightedness of electron)^[5]。态密度 $\propto \psi^* \psi$ 排除了全局性，因为它是个实数，或者说是一元数。全局性，或者复波函数隐含的性质，存留在相位中。依赖路径或者过程的相因子揭示了全局与拓扑的重要性。

波函数是二元数结构，同波函数的多分量形式不是一回事。多分量波函数的量子力学形式是从泡利开始的，1927年泡利给出了描述带自旋电子的非相对论性量子力学方程
$$\left[\frac{1}{2m} \left(\sigma \cdot \left(p - \frac{e}{c} A \right) \right)^2 + e\phi \right] \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi,$$
 其中， σ 是泡利矩阵，波函数是两分量的， $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ ^[6]。第二年，狄拉克给出了相对论性量子力学方程， $i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi = mc\psi$ ，此处的波函数选择为四分量的^[7]。复数的内禀代数结构，同多分量波函数对应的代数结构(体现在作为方程系数的泡利矩阵和狄拉克矩阵中)，它们耦合在一起带来了丰富的量子力学图景。似乎未见从这个角度对量子力学的讨论。

6 Phase space

与 phase 有关的重要拓展概念是 phase space (相空间，发展阶段空间)。Phase space 经玻尔兹曼、庞加莱等人发展^[8]，但是 Ehrenfest 夫妇在其 1911 年的德语文章中首次明确使用了 Phasenraum 这个词^[9]。James Gleick 认为相空间是现代科学最 powerful 的发明之一^[8]。

Phase space，也叫 state space，由系统所有粒子之坐标和动量张成的空间，系统的所有可能状态都对应相空间中唯一的一个点。如果加

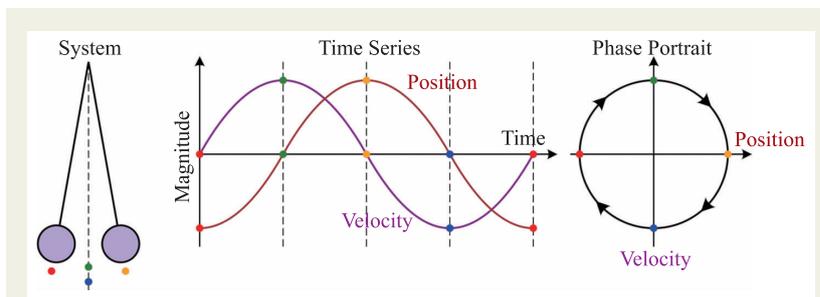


图6 单摆系统的摆锤位置 (position) 和速度 (velocity) 随时间变化曲线，以及位置—速度空间中的相图 (phase portrait)。相图为一闭环，说明这是一个周期性运动

上时间维，则被称为 extended phase space。引入相空间的必要性其实很好理解。确定一个二阶微分方程所决定的行为，需要位置和速度(或者动量)这两重变量(坐标)的初始条件，位置和速度(或者动量)是独立变量。考察足

球场上一个球员，他的行为由他在任一时刻的位置及瞬时速度所决定。在任一时刻既处于正确位置又采取正确运动姿态(由速度矢量表示；如果考虑到碰撞的需求，则应选择计入了质量的动量， $\vec{p} = m\vec{v}$)的球员才是好球员。系统的状态随时间演化表现为相空间里的一条轨迹 (phase space trajectory, phase portrait)。此轨道的形状可以解释许多以其它方式也许不易说清楚的运动的性质。相空间是高维空间，对于由 N 个粒子组成的体系，其相空间是 $6N$ 维的。位置、速度和时间在我们的感知中是混杂在一起的。高维的相空间替代三维物理空间，这为系统的状态(演化)提供了 pictorial form，对于职业数学家来说，这个图画形式的运动演化描述很直观。(体系如何演化的)微分方程的解形成一个全局的相之图景

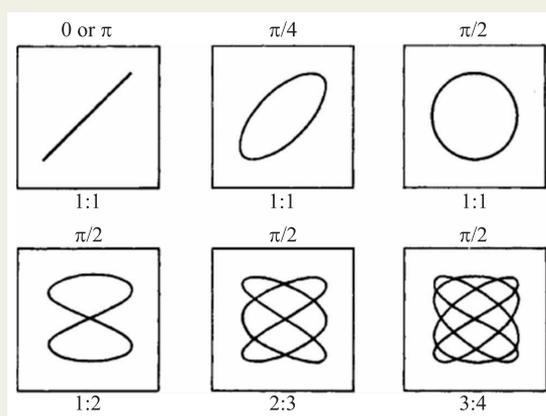


图7 李萨如图形随频率比与相位差变化的示意图

(a global phase portrait)，一个流的几何图像 (the geometrical image of flow)。Hamiltonian Mechanics is geometry in phase space (哈密顿力学是相空间中的几何)，数学家 Vladimir I. Arnold 如是说，这句话反映了数学家对哈密顿力学的理解。

相空间中的一些结构特征，固定点，周期性轨道，不变圆环面等，对动力学系统提供了定性的理解，比如相空间中任何形式的闭环都意味着周期性运动(图6)。当然了，相空间概念的引入不只是为了直观，使用相空间语言的哈密顿力学和经典统计学带来了深刻的内容。

某种意义上，Lissajous figures (李萨如图形)就是二维的相空间中的轨道，因为那是两个调谐时间序列 plotted against each other，即提供了二维空间的坐标点。就李萨如图形而言，两个谐振信号的相位差决

定了最终获得的图案花样(图7)。李萨如图形上的任一点都定义了瞬时的相位差,因此李萨如图形上的点真正是 phase point。

既然提及了 phase space,那刘维尔定理就是躲不掉的。这个定理以 Joseph Liouville (1809—1882)命名的,内容是相空间中的分布函数沿任何系统的轨迹是个不变量。或者换个说法,在一个相空间中运动的点(即系统状态)的附近,点的密度不随时间改变。不知道为啥,我总是把刘维尔定理和惊鸟群的形态变



图8 在运动中不停变换分布形态的惊鸟群

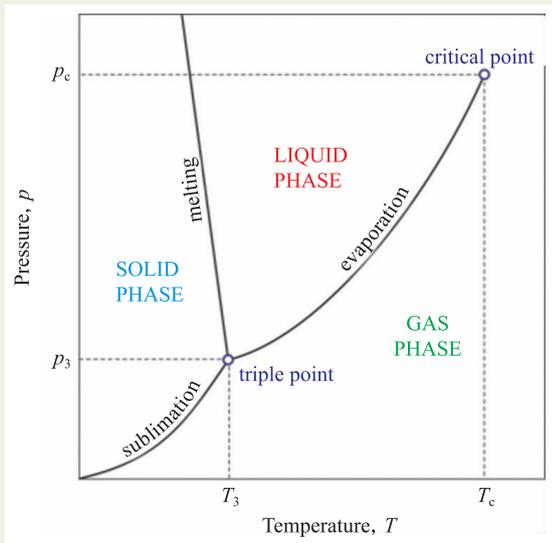


图9 水的简化相图。水的固相和液相都非常复杂

换联系到一起(图8)。这个不随时间改变的密度,即是经典的先验概率(a priori probability)。考察相空间的分布函数 $\rho(q, p)$, $\rho(q, p)d^n q d^n p$ 是系统处于无穷小相空间体积 $d^n q d^n p$ 中的几率,则有全微分

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0。$$

因为 $(\rho; \rho \dot{q}, \rho \dot{p})$ 是一守恒流,根据连续性方程,有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial(\rho \dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_i)}{\partial p_i} \right) = 0,$$

而这个表达式和分布函数对时间的全微分之间只差一项

$$\rho \sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \rho \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0,$$

这里用到了哈密顿正则方程,因此分布函数对时间的全微分必须为零。

谈论相空间,微分几何的知识是必不可少的。相空间可以描述动力学系统,为什么还是引入了 manifold 的概念?因为流形比相空间的维度少,让运动方程的解更容易一些。运动系统有一些守恒量,或曰运动常数,这些守恒量对运动变量施加了一些代数关系,将运动变量限制到相空间的一

些区域内,而这些区域通常是微分流形。

如果知道力学和光学在哈密顿那里是一门学问,波动力学(量子力学)的概念是弥补经典物理那儿只有波动光学的缺失,就能够理解量子力学的相空间表述的必要性与正当性了。相空间里的量子力学^[10],应该是量子力学的恰当表达形式。

相空间、相空间中的点、系综(ensemble)、有限尺寸单胞,这些概念构成了统计物理的基础。Gibbs 引入了系综的概念: a very great number of such systems, all identical in nature but differing in phase (大量数目的本质上相同但相不同——即处于不同的微观态——的系统所构成的集合)。这些系统构成 extension-in-phase, 即在相空间中的一些点(各对应系统的一个微观态)的分布^[11]。力学系统的运动由运动基本方程的哈密顿形式给出,即哈密顿正则方程被当作一个关于相空间中图形的变换。计算给定相空间体积中的系统数目得到了对系综的统计。对于闭合系统,玻尔兹曼假设熵正比于系统宏观态所占据的相空间体积(取对数), $S \propto \log \Omega$ 。玻尔兹曼引入了相空间中有限尺寸单胞(cells of finite size in phase space, finite cell in phase space)⁷⁾的概念,用这些单胞来对系统的微观状态计数(前提是相空间中体积守恒),最后导出 $S = k \log W$, W 是实现系统宏观状态的微观状态数。在量子统计中,这个 finite cell 的体积被定义为 $h^{N/2}$, 其中 h 是普朗克常数, N 是相空间的维度。这里隐藏的假设是,每一个空间变量和它对应的动

7) Cell, 拉丁语 cella, 意思是小的、遮蔽了的空间,译成“小屋”大概是最合适的。然而,这个单词在汉语中应该有不下几十个译法,典型的有细胞、池、电池、监房、囚室、蜂巢,等等。

量所张成的二维空间中, finite cell 的体积为 h 。

7 Matter phase and phase diagram

存在另一个意义上的相空间, 由系统的宏观状态, 比如温度—压力, 或者温度—外加磁场等, 加以参数化的空间。所谓的相, 可以是指凝聚状态如固、液、气等相, 也可以是磁化构型如铁磁、亚铁磁、反铁磁等相, 也可以是超导(超流)与常规导体(流体)相。细分一些, 固相有不同的晶相, 液相也有不同的结构。相图英文为 phase diagram, 而 diagram (dia+graphein), 意思是划过去, 因此 phase diagram 的重点在于其中划线的特征。这些线是相的分界, 由克拉贝隆方程描述, 其断点和交叉点具有特别的意义。比如水的温度—压力相图中(图9), 就有一个三相点和一个临界点⁸⁾(液—气界限的断点), 临界点的外侧(更高温、更高压的状态), 水处于既有气体特征(充满空间)、又有液体特征(比如能溶解物质)的超临界态, 具有不易把握、不易理解但更有科学和应用价值的特性。

相作为物理条件的函数, 当条件参数变化到某个值时, 会引起相的变化, 这就是 phase transition (相变, 相的变迁)。“一旦过了温饱线, 脸面的幸福就比皮肉的幸福更要紧……”(语出韩少功《豪华仓库》), 这句话就是在谈论相变的机制。相变与临界现象是物理学的重要研究内容, 有英文 phase transitions and critical phenomena 系列专著。

顺便说一句, 粒子物理里也有

phase structure 的说法, 这里的相由不同粒子谱的对称性所表征^[12]。在量子色动力学语境中提及的相变, 则是夸克/胶子从局限于重子内部到可自由运动状态之间的转变, 以及电磁相互作用和弱相互作用从分立到统一的转变^[13]。

8 Phase theory and phase field

电、磁和光都是自然发生的现象, 到了19世纪后期, 它们统一于麦克斯韦的理论中。电磁场强度不足以描述电磁现象, 而电磁势又 over-describe(过描述。有多余的自由度)了电磁现象, 这里面牵扯进了规范(gauge)的问题。外尔(Hermann Weyl) 1918和1929年的两篇论文, 试图构建广义相对论的电磁理论。电磁势以相因子, $e^{i\frac{e}{\hbar c}\int A_\mu dx^\mu}$, 的形式出现, 即动量和电磁势结合为 $p_\mu - (ie/\hbar c)A_\mu$, 正好描述电磁学。是 London 建议 Weyl 在此处添加了“i”从而把尺度因子(scale factor)改造成了相因子(phase factor), 让电磁理论有了 intrinsic phase freedom (内禀相自由度)。局域相不变性(local phase invariance)是电磁理论的正确量子力学特征(Therefore, local **phase invariance** is the correct quantum mechanical characterization of electromagnetism)。此后的发展就是外尔称为 Eichinvarianz 的理论, 即 gauge theory (规范理论),

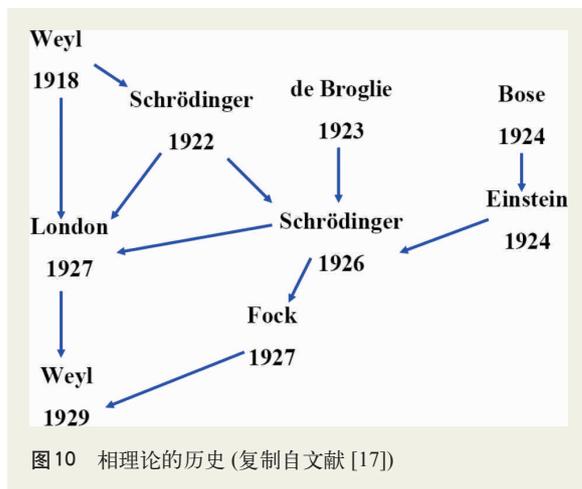


图10 相理论的历史(复制自文献[17])

规范函数在相位表示里面。杨先生认为规范不变性应该是相位不变性, 规范场应该是相位场, 关键思想是不可积相位因子^[14, 15]。因了不可积相因子, 对称性与相因子之间的缠绕(entwining)⁹⁾变得亲密而自然^[16, 17]。量子化、对称和相位因子是20世纪物理学的主旋律^[14, 15], 杨振宁先生此话不虚。有趣的是, 三个主题都源自人类认知史上的原初概念: 量子化源自测量的单位, 对称性来自几何形状的美, 而相位, 如前所述, 来自对月相(相貌)的观察。物理学家对相位的物理格外关注的历史其实并不长(图10), 欲深入理解的读者, 请自行修习量子力学、量子场论和规范场论。

9 结语

Phase是事物的外观、表现, 这些表象就构成了我们的世界。在叔本华那里, 世界是意志与表象(die Welt als Wille und Vorstellung)。叔本华的思想来源于康德, 康德认为经验世界纯是表现的综合体, 表现的存在与联系只在我们的表示中。

8) 把 critical point 翻译成临界点让人无语。Critical point 肯定在界线(面)上, 那还用说。Critical, 这里的意思是 decisive, 修饰一些相图上会发生重大改变的点(designating or of a point at which a change in character, property, or condition is effected)。

9) 此处用词有别于用于其它语境的 entanglement (纠缠)。

这个Representation (Vorstellung), 以及 representation 所选取的 picture, 不可避免地成了他的德国后辈们创造量子力学时使用的语言。因此, 此一哲学及其相关语汇, 对于物理学习者具有特别的意义。Phase, phase space, 大致说来含有某种类比的意味。类比是生成概念的途径, 但也先验地带有庸俗理解的危险。关于相位, 此前人们似乎未能充分认识其重要性, 今日对相位的认识也未必已经完备。狄拉

克云“相位这个量是很好地隐藏在自然之中的, 也因此人们未能更早地认识到量子力学。”不知未来相位理论是否会为我们带来全新的物理。

笔者有一种感觉, 表示, 不管对与错, 都可以是发现的路径, 甚至是必经的路径。比如, 作为对相对论量子力学方程负能解的电荷共轭诠释, 产生了反粒子的概念。但是反粒子就在那里, 不管有没有量子力学方程及其负能解这些表示。

表示, 表象, 与 reality 之间的关系, 确实费思量。Phase is phenomenon, even fantasy or phantom. 人谓想象就是真相, 真相就是想象。凡不符合想象的, 都不是“真相”。初读物理, 会觉得这些表述也太不客观了。待到略窥门径, 便会慎重对待想象与真相的同一与区别。好的物理学家, 关注物理的真实, 也会细心培育他的幻想之花。

参考文献

- [1] Liberal I, Engheta N. Near-zero refractive index photonics. *Nature Photonics*, 2017, 11: 149
- [2] Dudley J M, Genty G. Supercontinuum. *Physics Today*, 2013, (7): 29
- [3] Hayashida K, Dotera T, Takano A *et al.* Polymeric quasicrystal: mesoscopic quasicrystalline tiling in ABC star polymers. *PRL*, 2007, 98: 195502
- [4] Kaku M. *Physics of the Impossible: A Scientific Exploration into the World of Phasers, Force Fields, Teleportation, and Time Travel*. Anchor, 2009
- [5] Kohn W. Density functional and density matrix method scaling linearly with the number of atoms. *PRL*, 1996, 76: 3168
- [6] Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 1927, 43: 601
- [7] Dirac P A M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1928, 117(778): 610
- [8] Nolte D D. The tangled tale of phase space. *Physics Today*, 2010, 63(4): 33
- [9] Ehrenfest P, Ehrenfest T. Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften*, 1911, 4 (32): 3
- [10] Schroeck Jr. F E. *Quantum mechanics on phase space*. Springer, 1996
- [11] Wheeler L P. Josiah Williard Gibbs. *Yale University Press*, 1966
- [12] Meyer-Ortmanns H, Reisz T. *Principles of Phase Structures in Particle Physics*. World Scientific, 2006
- [13] Meyer-Ortmanns H. Phase transitions in quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 1996, 68(2): 473
- [14] Yang C N. Einstein's impact on theoretical physics. *Physics Today*, 1980, 33(6): 42
- [15] Wu T T, Yang C N. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Phys. Rev. D*, 1975, 12(12): 3845
- [16] Yang C N. Thematic melodies of twentieth century theoretical physics: quantization, symmetry and phase factor. *Inter. J. Mod. Phys. A*, 2003, 18: 3263
- [17] Yang C N. The thematic melodies of twentieth century theoretical physics. *Ann. Henri Poincaré*, 2003, 4(Suppl. 1): S9

读者和编者

《物理》有奖征集封面素材

为充分体现物理科学的独特之美, 本刊编辑部欢迎广大读者和作者踊跃投寄与物理学相关的封面素材。要求图片清晰, 色泽饱满, 富有较强的视觉冲击力和很好的物理科学内涵。

一经选用, 均有稿酬并赠阅该年度《物理》杂志。

请将封面素材以附件形式发至: physics@iphy.ac.cn; 联系电话: 010-82649470; 82649029

《物理》编辑部