

初涉电子拓扑*

牛谦[†]

(美国德州大学奥斯汀分校 奥斯汀 78712)

2018-06-19收到

[†] email: niu@physics.utexas.edu

DOI: 10.7693/wl20180706

女儿转来照片，是哈佛大学物理教授 Halperin 在上课(图 1)，黑板上赫然列出了我的一篇文章。自己的工作能让女儿感到自豪，确实确实令我有些得意。Halperin 是我景仰的老前辈，也是已故同学冯奚乔的博士导师。但我懂得，他列出这篇文章的原因不是我，而是文章的另一个作者，Thouless，2016 年诺贝尔物理学奖获得者之一，也是我的博士导师。这篇文章曾在介绍诺奖的官方文章中引用过，是我攻读博士期间与导师和吴咏时老师合作而成。

奇遇

2016 年的诺贝尔物理学奖是关于凝聚态中的拓扑相与转变。由于 Thouless 在两个方面的贡献，他获

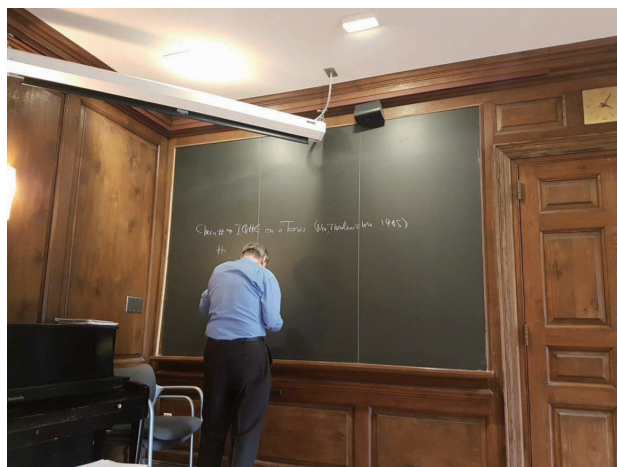


图 1 哈佛大学物理学教授 Halperin 在课堂上

得奖金的一半，另一半由 Haldane 与 Kosterlitz 两人分享。和我有关的是关于电子拓扑态的预言与刻画，由他和几位合作者在 1982 年首次提出，上面提到的那篇文章把他们的结论推广到了广泛的条件。有同学调侃说，我与诺奖“擦肩而过”。那段时间我确实肩膀有点疼痛，但那是风寒引起。我完全明白自己的位置，真心实意地为导师高兴。

能遇见 Thouless 这样的高人，需要特别感谢李政道先生的 CU-SPEA 项目。在黄杰同学的鼓动下，我参加并通过了考试，于 1981 年秋进入西雅图的华盛顿大学物理系做博士生。一起的有我们吕丹同学，还有科大的李明，以及高能所的陈凤至，一位已经 37 岁的老大哥。第二年又去了我们班的崔天河，以及科大的马延军和兰大的马健。

上了一年课，刚刚适应了环境，我发现几位同学已经找好了导师，就急忙去找管理研究生的 Blair 老师咨询意见。得知我想做凝聚态理论，他说正好刚来了一位国际大腕，David Thouless。后来知道，他是

从耶鲁大学被挖过来，让去那里本想跟他的赵平同学扑了个空。Thouless 由于二维拓扑相变和电子局域化理论而赫赫有名，前者是他更早些时候，在英国伯明翰大学与博士后 Kosterlitz 一起做的，是诺奖的另一项工作。我去找他的时候，他在华盛顿大学与另一位博士后(TKNN)刚做好了一篇新的诺奖工作。

对于我来说，这些物理风云如同一个婴儿出世前的事情，当时哪里知道。找到 Thouless 的办公室，他正好在，我就用笨拙的英语向他表明意向。Thouless 好像也没说什么，只是转身在文件柜里翻腾了好久，拿出两份文章预印本让我先去看看。一份是他关于量子霍尔效应的会议文章，另一份大概就是 TKNN 那篇文章。

初涉

一星期后，忘了我是怎么向 Thouless 交代的，记得是他指定让我去研究哈珀方程。这个方程的物理背景是二维电子同时受周期场和磁场的作用，就是 TKNN 用的那个理论模型。该方程有好多人研究过，1976 年 Hofstadter 用数值计算揭示出它能谱的全貌，竟是一个漂亮的看似蝴蝶的分形。Thouless 他们考虑了单元胞磁通为分数个量子的情形，此时能谱分裂为分母那么

* 本文是作者为北京大学物理系 77 级 40 周年纪念文集《回首春风》而作，今先行发表于此，以饷《物理》读者。

多个能带。他们计算了各个能带的霍尔电导，发现都是些以 e^2/h 为单位的整数。他们证明这些必须是整数，因为表达式俨然就是微分几何里刻画拓扑结构的陈数。

导师让我做的是磁通为无理数的情形，此时能谱分裂成无穷多个部分，类似于康托集那么个分形。很久以前，康托在研究实数论的时候，造出这么一个怪物用以检视大家的逻辑。从0到1这个线段开始，把中间的三分之一去掉，再把剩下各部分的中间三分之一去掉，依此类推，直到无穷。最后剩下的居然还是个不可数的集合，比有理数还多得多。

这个哈珀方程也可以看成是在描述一维链上的电子。分数磁通对应一个周期等于分母的周期势，而无理磁通对应的就是一个非周期势场。当这个无理数足够无理，也就是说，连分数展开时用到的系数不

发散的时候，电子波函数就会表现出从扩展到局域的转变。转变点就发生在动能和势能相等的地方，对应回二维体系就是各向同性的时候。Thouless那时已是研究无序体系电子局域化的顶级专家，1976年“四人帮”做的那个标度理论，便是基于他早期的一个洞见。他让我看的就是，在这个转变点电子波函数到底有什么行为。

Thouless告知可以编程的计算器店里有卖，TI59，只有两百多块钱，用来算这个问题正好合适。我是在北大二年级的时候首次见识到计算器，舍友唐盛章有一个可以算初等函数的机器让我们大开眼界。TI59可以编一百步程序，少的话，剩下的空间可以用来储存数据，一步顶10个。当时的两百多块钱对我来说不是个小数目，但这是个令人心爱的玩意儿，又是为了学业，就毫不犹豫地买下了。这东西还带有外存的磁条，以后好长一段时间我还保留了编过的程序。

Thouless(图2)是英国人，说话不多，他的口音让我这个刚刚学用英语的人听起来十分吃力。每周跟他见面后，我得赶快做个笔记，因为有多好多听不懂的事情，需要之后慢慢琢磨。那时我一边用买来的机器计算波函数，一边在浩瀚的文献里摸索。波函数上上下下波动，实在看不出个道道。文献看不懂就得找出所引的文献，结果往往是更多的不懂。直到有一天，我仿照别人看临界标度行为的做法，把波函数的横轴以一定比

率缩回，发现和原来的波函数有惊人的相似。导师很高兴，他很快做出一个理论推导，写出了文章，并以我为合作者。突然之间，我就有了一篇文章，尽管不是第一作者。

新题

作为下一个题目，导师给我一份他刚写好的稿子，让我把条件放宽看结论是否成立。文章中考虑的是一维周期势场中，若干能带被电子填满，其它空着。这是韩汝奇老师教过的典型的电子绝缘态。Thouless发现，如果让这个势场缓慢改变，就会带动一个电流，在一个时间周期内会有整数个电荷转移。他证明这必须是个整数，因为表达式也是一个拓扑陈数。导师让我加上无序场，甚至电子相互作用，看能否得到同样的结论。他的直觉是会有，但怎么证明呢？原来的推导不再成立，因为那个陈数表达式依赖于电子布洛赫态的形式。无论如何，这个问题的解决将会非常有意义，因为它也会让我们更深入地理解Laughlin关于整数量子霍尔效应的“规范论证”。

在做出关于分数量子霍尔效应的诺奖工作之前，Laughlin对整数效应也有个精妙的论证。设想二维电子系统被卷成一个圆筒，筒内穿过一个螺线管。让里边的磁通发生改变，就会沿圆筒一周产生法拉第电场。霍尔效应会让电子在高度方向运动，霍尔电导就等于磁通发生单位改变中电荷转移的数目。磁通的量子单位是 h/e ，超导中用到的是 $h/2e$ 因为库珀对的缘故。Laughlin认为，当磁通改变这么一个量子单位的时候，二维电子体系内部不会



图2 美国物理学家戴维·索利斯(David J. Thouless), 2016年诺贝尔物理学奖得主之一

产生任何变化。唯一有可能的是，圆筒的一端会有整数个电子转移到了另一端。这样，霍尔电导就必须是量子化的了。至于为什么是整数个电荷转移，他语焉不详。

Laughlin的论证怎么就用到了规范概念呢？这就得说一说Aharonov—Bohm效应。螺线管中的磁场并不穿到外边，按照经典物理它不会对圆筒上的电子产生影响。AB说，如果外边的电子遵从量子力学，那就得考虑电磁矢量势在薛定谔方程里的作用。他们发现，只有当磁通是整数个量子的時候，才能做规范变换把矢量势去掉。Laughlin利用这个结果，并假设二维电子体系内部在最高能上有个间隙。这样，变化一个磁通量子的時候，体系内部不仅能态没有变化，它们的填充也不改变。

杨振宁先生在1963年写过一篇文章，精炼地阐述了AB的思想，也给了我们一个启示。如果加上周期边条件和磁通，一维体系就可以看成是个布洛赫问题，电荷转移就可以写成系统基态波函数的拓扑陈数的样子。可惜，我们需要对磁通在一个单位内做个平均，但凭什么能做平均呢？理论学家为了计算论证方便，经常会假设一些特殊的条件。比如Laughlin就利用了圆筒几何，里面还穿了个磁通。如果体系足够大，人们也不会追究，认为整体效果不会受到大的影响。但是，像量子霍尔效应表现出来的整数化，在实验上是精确地成立。最初的相对误差在百万分之一，以后很快就控制到了十亿分之一的量级。到了1990年，人们实在找不到更精确的测量手段，国际上干脆决定用霍尔效应作为电阻的基准。

彷徨

因此，问题的关键就在于为何能做这个平均而不引起误差。吕丹在我用TI59算题的时候，已经用上了大型计算机VAX，跟着他的导师Rehr开始做第一性原理计算。在走投无路的时候，我跟着吕丹学了Fortran，也让导师给我设了个账号，想用数值方法看看。吕丹编程很有一套，记得他讲过一个八皇后问题，让我听得着迷。但是，一段时间后我意识到，数值方法也需要各种各样的近似，对我的问题根本不能提供帮助。

在文献中看到，许多理论推导都会用到格林函数，于是我狠下了一番功夫想把它弄懂。发现有各种各样的定义，在学生们举办的讲座上我介绍了心得，戏说这些Green函数Red函数把我看得眼花缭乱，头晕脑胀。在电子局域化问题上，大家用的定义是 $E-H$ 这个算符的逆，其中 H 是哈密顿量， E 是能量参数。在位置表象里，格林函数依赖两个位置，如同电磁学问题中的源点和场点。印象深刻的是Thouless有个论断，说当 E 不在能谱上时，格林函数随距离而指数衰减；当 E 在能谱上，但状态波函数是局域的时候，该结论仍然成立。利用这个性质他在1981年论证了，无序势在任意阶微扰中都不会对量子霍尔电导产生影响。他私下跟我说，有个日本人在实验发现前曾有类似的论述，可惜做到第三阶微扰就停下了，要不然他会与von Klitzing分享量子霍尔效应的诺奖。

但是，我仍然不得要领。心灰意冷的时候，心里不免抱怨导师怎么给了我这么个题目，让我无从下

手。1983年秋天，Thouless受剑桥大学邀请去过学术假，可以带我同行。我很高兴，但申请签证要等两个月时间。导师不在跟前，我就懒散了许多，经常在休息室观看吕丹和崔津河下围棋。吕丹多才多艺，那时已经业余一段。老崔刚学不久，被让九子。吕丹攻城略地于无形，我直替老崔着急，不免指划几下。老崔对我十分不满，说他也可以让我九子。我毫不犹豫地应战了，结果一败涂地。围棋原来这么深奥！老崔师从Fain，做晶体表面的原子吸附及其构形规律的实验研究，恰似一盘微围围棋。后来，他的宏观围棋一发不可收拾，不但让吕丹招架不住，更成为西雅图地区一霸。

突破

终于等到了签证，我立马买了机票，赶赴英国。到了剑桥已经是晚上，按照别人的指引住在了YMCA。记得招待小姐彬彬有礼，浓重的英国口音煞是好听。由于时差，睡下不久又醒来，一看表凌晨4点。我那个问题魂牵梦绕，到此仍然没有着落。但见了导师总得给个交代，于是我拿出纸笔，作了最后一次“挣扎”。

突然想到，如果我能证明结果不依赖于磁通，不就可以做那个平均了吗？我把电荷转移的表达式对磁通求导，用格林函数表达出来，一下子曙光透亮，看到了解。哈哈，真是“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”。上午，我迫不及待地赶到了Cavendish Lab，找到Thouless向他作了汇报。他很快明白了我的意思，表示：“嗯，就是它了”。导师的首肯让我非常高兴，但我也



图3 作者与同学沈铁汉所堆雪人的合影

没敢显露声色，只是急忙说，那我就去把它整理成个文章的样子再说。

一块石头落地，心情轻松了以后，我才想起来好好看看这个地方。Cavendish 当年首次测量到万有引力常数，那个令人不可思议的扭矩天平，就陈列在楼下一个博物馆里。博物馆一面墙上，挂着一排历届实验室主任的肖像。首任竟然是麦克斯韦，咱们电动力学的始祖！继任者也是一个个如雷贯耳的大名：瑞利、汤姆生、卢瑟福、布拉格、莫托、皮帕得。后面两位在普通教科书里不太提到，但在凝聚态界可是赫赫有名。前者是金属绝缘转变研究的先驱，后者在超导物理中有以其命名的公式。

后来又发现，咱们沈铁汉同学正在这物理圣地攻读博士。我们在北大虽不同班，但异地重逢格外的亲。他带我参观图书馆，遇到一位埋头查书的老者，他说那就是莫托。铁汉还热情地把我介绍给他那里的同学，大家一起又带我到城里参观，去了牛顿当年呆过的学院，还有徐志摩轻轻划船的小河。总

之，有铁汉和这帮新同学的陪伴，我在剑桥度过了一段非常愉快的时光。二十多年后，他们中间的郭光宇还成为了我的密切合作者。本想晒一下和他们一起的记录，但不知为何就是找不到铁汉的照片，只有一张我与他的雪人作品(图3)的合影。

收获

文章的写作和发表非常顺利，以致我都没有留下什么印象。只记得在深冬时节，陶荣甲和夫人也来到剑桥，并带我一起去欧洲大陆好好玩了一圈。陶是 Thouless 夏天新招的博士后，长我十几岁。他通过最初一期的 CUSPEA，到哥伦比亚大学师从 Luttinger，3 年之内便拿到了博士。到剑桥的时候，Tao—Thouless 理论已经“出炉”，正在分数量子霍尔效应问题上要与 Laughlin 一争高低。

春天回到西雅图，我遇到了吴咏时，就是 Halperin 黑板上列的文章里的那个 Wu。他当年到美国走的是杨振宁路线，当时正在访问粒子物理组的 Zee 教授。他和陶荣甲合作，把 Laughlin 的规范论证推广到了分数量子霍尔效应的情形，认为此时的体系基态必须有数重简并。像陶荣甲一样，老吴也比我大十几岁，他让我学到好多书本里课堂上看不到的东西。Thouless 等人

说的陈，英文里是 Chern，我还一直以为是个西方人。老吴告诉我这是个中国人，微分拓扑领域里的鼻祖级大师陈省身，其纤维丛拓扑理论在高能物理中有极高的地位。后来我也看过杨振宁先生的中文介绍，记得他确实非常推崇，末尾还作一小诗，高呼“欧高黎嘉陈”。老吴认为，Thouless 能把拓扑陈数运用到凝聚态物理中，将来一定也会有极高的价值。

吴咏时因而也非常喜欢我关于电荷转移的工作，希望我能将其应用到量子霍尔效应，把 Thouless 等人的理论推广。我先是有点犹豫，认为我文章的推论已经把 Laughlin 以及陶吴推广的规范论证严格化了，因而逻辑上已经完全解决了量子霍尔效应的问题。在老吴的开导劝说下，我还是把文章写了出来，直接了当正面地说明了霍尔电导在广泛条件下的拓扑量子化。Thouless 开会回来后看到稿子，也非常高兴。在关于分数量子化的问题上，他亲自补充了一段 Laughlin 波函数的论述，就让我送去发表了。这就是本文开始提到的那篇论文。

后来事态的发展正如老吴所预见，让我充分体会到了我们工作的意义。如果说 Laughlin 的规范论证还是就事论事，那 Thouless 开辟的拓扑思路最终摆脱了对具体模型的依赖，给人们带来了一个更为远大的视野。自己能在学生期间为此做出贡献并得到认可，我感到非常庆幸。令人惋惜的是，2016 年宣布诺贝尔物理学奖时，导师已患严重老年失忆，他往常深邃的目光变得恍惚。但他家人跟我说，确信他还是知道过自己得了诺奖，因为那个消息曾令老人家眼含泪水。