

# 时空克莱因瓶上的热力学\*

## ——从二维生物的奇妙旅行到共形量子态的路径积分

李伟<sup>1,†</sup> 王磊<sup>2</sup> 涂鸿浩<sup>3,4</sup>

(1 北京航空航天大学物理学院 北京 100191)

(2 中国科学院物理研究所 北京 100190)

(3 德累斯顿工业大学 理论物理研究所 德累斯顿 01062)

(4 慕尼黑大学 索末菲理论物理中心 慕尼黑 80333)

# Thermodynamics on the space-time Klein bottle

## ——from the wonder trip in the flatland to the path integral of conformal quantum states

LI Wei<sup>1,†</sup> WANG Lei<sup>2</sup> TU Hong-Hao<sup>3,4</sup>

(1 School of Physics, Beihang University, Beijing 100191, China)

(2 Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(3 Institute of Theoretical Physics, Dresden University of Technology, Dresden 01062, Germany)

(4 Arnold Sommerfeld Center for Theoretical Physics, University of Munich, Munich 80333, Germany)

2018-04-02收到

† email: w.li@buaa.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20181204

**摘要** 在克莱因瓶和莫比乌斯带上环游世界的二维生物会经历有趣的手征变换, 这可归因于这些不可定向曲面的独特拓扑性质。作者最近在研究中发现, 让共形场论中的量子态在这些曲面上做“时空旅行”(路径积分), 也会得到新奇而普适的热力学性质。例如, 克莱因瓶上的二维共形场论的自由能中包含一项普适的克莱因瓶熵。它仅依赖于共形场论的一些基本特征。利用克莱因瓶熵, 可以精确地找到量子相变点, 并刻画其普适类。更一般地, 不可定向曲面上的普适热力学数据不仅对于研究凝聚态和统计物理中的临界现象有意义, 对于其他领域, 比如全息黑洞热力学等也有启发。

**关键词** 共形场论, 临界现象, 不可定向曲面, 量子蒙特卡罗, 张量网络

**Abstract** Due to the distinct topology of non-orientable surfaces (such as the Klein bottle and Möbius band), a 2D chiral creature changes its parity after travelling around the manifold. When we consider a space-time journey of quantum states in conformal field theory (CFT) on non-orientable world sheets, we find that the Euclidean path integral of CFT on non-orientable surfaces gives rise to intriguing universal thermal properties. For instance, on the Klein bottle there exists a universal entropy in the free energy which can be exploited to locate phase transition points and identify their corresponding CFTs. Universal thermal data of the Klein bottle, as well as other non-orientable surfaces, can play an important role in studying critical phenomena in condensed matter and statistical physics. We also anticipate their potential applications and far-reaching implications in other areas, such as holographic blackhole thermodynamics, and so forth.

**Keywords** conformal field theory, critical phenomenon, non-orientable surfaces, quantum Monte Carlo, tensor network

\* 国家自然科学基金(批准号: 11504008, 11504014)、国家重点研发计划(2016YFA0302400)、北京航空航天大学卓越百人计划和拔尖人才支持计划、德国科学基金会(DFG)资助项目

# 1 “扭一下”的不平凡拓扑与二维生物的奇妙旅行

把一条纸带抓住两端粘合起来，你会得到一个纸环，这不足为奇。然而，如果像图1(a)那样将纸带扭转一下再粘起来，你就会得到一条莫比乌斯带(Möbius band)。作为拓扑学的一个标志，莫比乌斯带在大众科普中出镜率很高。和近年来拓扑家族中的“网红”面包圈和咖啡杯相比，莫比乌斯带具有更加非同寻常的拓扑性质。

首先，莫比乌斯带只有一个面。因为扭转的缘故，原来纸带的两个面光滑地连接起来了。因此，对于一个莫比乌斯带而言，无所谓“里面”还是“外面”。这个特性使得在莫比乌斯带上无法全局自洽地定义法向。具有这种拓扑性质的曲面被称为“不可定向曲面”。其次，莫比乌斯带只有一条边。这也可以从图1中看出，扭折后纸带的两条边粘贴在了一起。最后，将莫比乌斯带沿着中线剪开(即沿着图1(a)所示的箭头)，我们得到的不是两条独立的纸环，而是宽度变为一半，长度变成两倍的窄长带。感兴趣的读者可以用纸带粘一个莫比乌斯带，然后剪开来验证这个事实。

如果将两条莫比乌斯带沿着边粘在一起，我们会得到一个没有边的闭合曲面。这正是本文的主角，如图1(b)所示的克莱因瓶(Klein bottle)。克莱因瓶也只有一个面，也属于不可定向流形。为了下面叙述方便，我们将这种局域具有欧几里得几何的曲面称之为拓扑流形，莫比乌斯带和通常的纸环都是带边的流形，而它们粘合而成的克莱

因瓶和环面(torus)是不带边的闭合流形。注意到两个纸环需要粘合两条公用边才能得到封闭的环面，而两条莫比乌斯带只要粘合一条边即可得到封闭曲面。

看似平淡无奇的一扭赋予了莫比乌斯带和克莱因瓶非同寻常的拓扑性质。而把这些流形想象成世界的话，在其中生活的生命也会体验到奇妙的物理性质。著名理论物理学家伽莫夫在他的经典科普著作《从一到无穷大》中论述了有手征的物体在莫比乌斯带上旅行的有趣体验<sup>[1]</sup>。对于不对称物体，我们总可以分出其手征，例如手套可以分出左手系和右手系，它们“非常相似但又极为不同”。图1(a)所示的非对称纸片驴也有手征：在莫比乌斯带1号位置的纸片驴是“左手的”<sup>[2]</sup>，如果不把驴拿开纸面，无法通过在纸面内原地旋转而改变其手征。如图1(a)中所示，我们从三维空间看过去，纸片驴按照箭头所示的逆时针来运动，当纸片驴历经2—3—4回到1位置的时候，我们发现纸片驴四脚朝天，如果将它“正过来”，会惊讶地发现二维驴变成了“右手系”！我们从三维空间来观察，能够获得非常全面的视角，清楚地了解到纸环是否有扭曲。但是二维的纸片驴并不能轻易知道它生存的空间是通常的纸环还是莫比乌斯带。它唯有环游世界，回到原来局域的坐标架下来观察自己手征的改变与否，才能判断空间的整体性质。

对于三维空间中生活的人而言，由于缺乏第四维空间的“纵深”，我们也无从得知生活的宇宙是否在某处也存在着扭曲。伽莫夫在《从一到无穷大》中展开畅想，如果人们做一次宇宙环游旅行，发现带着一颗在右边的心脏回到地球，这样的魔幻旅行就告诉我们时空扭曲的真切存在。

## 2 共形不变与临界现象

简单了解了不可定向流形的奇妙之处后，我们介绍一下本文的另一个主角——共形不变性。伯努利刻在墓碑上的等角螺线和句子“Eadem mutata resurgo”(纵使变动，故我依然)描述的是一种很特别的对称性——标度不变性。标度不变

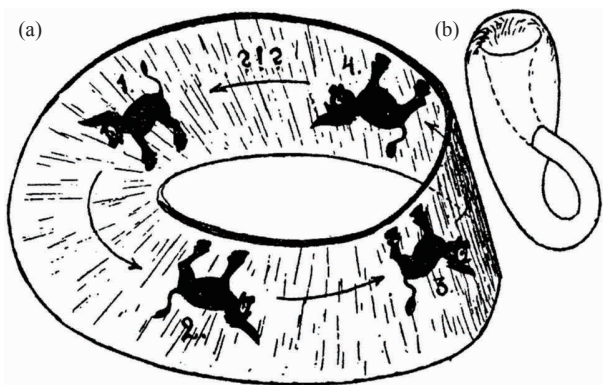


图1 (a)莫比乌斯带；(b)克莱因瓶<sup>[1]</sup>

指的是对系统放大或者缩小一定的比例，系统看上去仍旧是一模一样的！现实生活中具有(近似)标度不变性的一个例子是鹦鹉螺贝壳(图2(a))，其中的螺线具有一种独特的美感。

在统计物理中，由于相变临界点处关联长度发散，系统具有演生的标度不变性。这使得系统的许多热力学性质变得与晶格常数、具体的相互作用细节等无关，展现了重要的普适性。在特定情况下，临界点处可以具有包含标度不变的更大的对称性，即共形不变性。在数学上，共形变换(或称保角变换)是一类保持局域角度不变(但尺寸可以变化)的映射，这样的操作包括平移、转动、标度变换，以及所谓特殊共形变换(special conformal transformation)。图2(b)中给出了一个典型的共形变换，从左图到右图的映射保持了所有交线的夹角不变(垂直)。在共形变换下不变的场论被称为共形场论，它可以描述上文提到的统计模型在临界点附近的普适性质。共形场论是理解和研究临界现象非常重要的理论工具，在弦论和统计物理等领域有广泛的应用<sup>[3]</sup>。在二维情形下，共形变换有无穷多生成元，使得二维共形场论的许多性质可以完全通过对称性来确定。

由于对称性的限制，二维共形场论具有特殊的代数结构(Virasoro代数)，这使得共形场论中的量子态(基态与激发态)组成了图2(c)所示的“塔”状结构，被称为Virasoro塔。塔的底端被称为基础场(primary field)，其上的激发态可以从基础场加上整数个激发能量量子得到，被称为派生场(descendants)。二维共形场论的显著特征是量子态可以分成左右行手征态的直积，这些直积态可以根据动量分出左右手征，例如图2(c)中蓝色和红色箭头所示的两支激发分别对应左行和右行的手征态，中线上动量为零的则为无手征态。一个有趣的想法是让这些共形场论中的量子态到克莱因瓶或者莫比乌斯带上去“时空旅行”一下，看看会发生什么？注意到，环面

上左手与右手手征的激发相互独立，而克莱因瓶上的左手与右手手征的激发相互关联。这启发我们，流形拓扑能够通过手征影响到系统的物理性质。

最近的一系列研究揭示<sup>[4-8]</sup>，沿着这一想法可以得到共形场论的一些新奇而普适的热力学性质。简单地说，在“时空”克莱因瓶或莫比乌斯带上定义的共形场论，其配分函数会因为时空的扭曲而获得一项零点热力学熵。这项零点熵是普适的，仅与共形场论的基本特征有关。此外，另一个值得强调的有趣的特征是，如果二维共形场论描述的是有限温度下的一维量子临界体系，系统低温的比热对温度呈现线性关系，并且由于扭转使得斜率是环面的1/4。下面我们会看到，这些特征，包括零点熵和比热斜率的“反常”，都可以和不可定向流形的拓扑性质深刻地联系起来。

### 3 路径积分与二维流形上的共形场论

现在我们把伽莫夫考虑的二维纸片驴，换成共形场论中的量子态，也让它们沿着“纸带”走两步看看。具体地说，我们是通过量子统计中的常规办法，即“虚时间”路径积分，将一维空间的量子问题映射成为二维时空中的经典统计问题。这里多出来的一个维度被称为“虚时间”维度。因此，这样的一维量子体系的路径积分表示在一个二维的曲面上，在通常的映射中，沿虚时间方向的边界条件是周期的，例如图3(a)的环面，但也可以是扭转一下再接起来，如图3(b)和(c)所示。

对应于伽莫夫的驴在纸带转上一周，量子态在虚时间轴上的“旅行”实际是在做虚时间方向

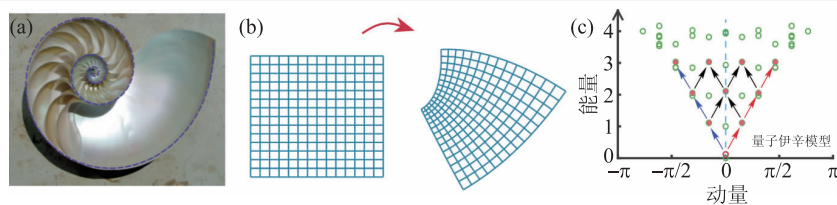


图2 (a)“标度不变”的鹦鹉螺贝壳近似形成等角螺线；(b)一个典型的共形变换，(a)，(b)图片来自维基百科；(c)临界点上的量子伊辛模型精确对角化得到的(低能)能谱很好地符合共形场论的预言，形成Virasoro塔结构。Virasoro塔上的量子态根据动量可以分出左、右手征，中线上则为无手征态

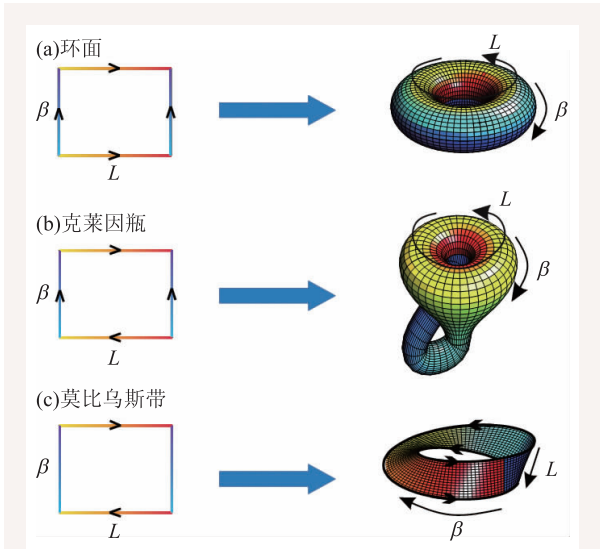


图3 3种二维流形上的路径积分，箭头方向代表粘接方式。当两边为周期边界条件时，按照平直和扭曲粘合得到(a)环面和(b)克莱因瓶。一边为开边界条件、另一边为周期边界条件，扭曲粘合，得到(c)莫比乌斯带

的路径积分。而配分函数，即系统所有可能量子态构型对应玻尔兹曼权重的和，可以表达为这样的路径积分，它对了解系统平衡态的性质是至关重要的。通过配分函数，我们就可以把克莱因瓶上的“时空旅行”（路径积分）和系统的热力学性质联系起来。在这个对应里，“纸带”周期方向是虚时间方向，对应温度的倒数（ $\beta=1/T$ ，记为长度），而另一个宽度方向代表量子系统的空间尺寸大小（宽度  $L$ ），在这个方向上可以是开边界条件（对应圆柱面或莫比乌斯带）或周期边界（对应环面或者克莱因瓶）。

通过共形场论的计算，我们可以得到在“时空”克莱因瓶上的配分函数<sup>[4]</sup>。当“纸带”的宽度  $L$ （空间尺寸）远大于其长度  $\beta$  时，克莱因瓶上配分函数的对数，亦即自由能乘以负倒温度（ $-\beta$ ），为  $\ln(Z^K) = -\beta L + \left(\frac{\pi c L}{24v\beta}\right) + \ln(k)$ ，其中  $\beta L$  正比于纸带的面积（ $f$  对应单位宽度  $L$  的基态能量），第二项预言了低温比热与温度的线性依赖关系（ $c$  为共形场论的中心荷， $v$  是 1+1 维欧氏空间中的“光速”），第三项  $\ln(k)$  是普适熵，我们称之为克莱因瓶熵。注意在得到这个结果的时候，在共形场论的 Virasoro 塔中，左行和右行的直积态里只

有那些左右完全对称的才对克莱因瓶上的路径积分有贡献，这是上面那个克莱因瓶配分函数公式成立的关键。

因子  $k$  可以相应地看作该量子体系在克莱因瓶上的“基态简并度”。对于只有有限多个基础场的有理（rational）共形场论，克莱因瓶熵由基础场的量子维数（quantum dimension）来确定： $k = \sum_a K_a d_a / D$ ，其中  $d_a$  对应于基础场  $a$  的量子维数， $D$  是总量子维数（ $D = \sqrt{\sum_a d_a^2}$ ）， $K_a$  是一组整数，来源于该共形场论在环面上模不变（modular invariance）的配分函数（对于我们熟悉的大多数共形场论， $K_a = 1$ ）。一般而言，无能隙且由共形场论描述的量子体系，其在克莱因瓶上的“基态简并度”  $k$  是非整数，例如伊辛模型的临界点有  $k = (2 + \sqrt{2})/2$ 。而有能隙的量子体系，其“基态简并度”  $k$  总是整数。正是这一显著差别，使得我们可以用克莱因瓶熵来定位相变的发生和判断相变的类型。

对于实际问题，我们需要知道怎样计算克莱因瓶熵。对于  $L \gg \beta$  的细长环面，共形场论的配分函数是 20 世纪 80 年代的经典结果<sup>[9, 10]</sup>， $\ln(Z^T) = -\beta L + \left(\frac{\pi c L}{6v\beta}\right)$ （有兴趣的读者不妨验证一下低温比热与温度的线性依赖关系，且克莱因瓶上的比热是环面的 1/4）。比较克莱因瓶与环面的配分函数，我们立刻可以得到一个普适关系， $k = Z^K(2L, \beta/2) / Z^T(L, \beta)!$  这一普适关系使得我们可以在具体问题中，有效而又准确地直接计算克莱因瓶熵。

上述结果自然也可以应用到二维经典统计模型共形不变的临界点。对于各向同性的统计模型，“光速”  $v=1$ ， $L$  和  $\beta$  分别是二维经典统计模型的长和宽（同样要求  $L \gg \beta$ ）<sup>[11]</sup>。

本文在开篇介绍莫比乌斯带的时候，介绍了将其沿着中线剪开得到一个更长也更窄的纸带的有趣性质。这一性质启发我们理解克莱因瓶上普适熵的来源，我们可以拿起剪刀和浆糊，在头脑中做一个“手工实验”。想象将一个克莱因瓶从

中间左右剪开，看起来我们好像得到了两条图3(c)所示的“莫比乌斯带”。但是，请注意箭头方向，这是两条相互粘贴在一起的“莫比乌斯带”。接下来，将右边一半翻转，再与左边上下拼接。最后，我们得到了一个内部平直但是带有特殊“边界条件”的流形。图4中的箭头告诉我们将这条纸带卷起来各条边应该怎样粘贴。和图3(a)中的环面相比，有两点重要区别：(1)空间方向的长度变成了原来的一半  $L \rightarrow L/2$ ，而虚时间方向加倍了  $\beta \rightarrow 2\beta$ 。这点自然地解释了克莱因瓶自由能第二项中的  $1/6 \rightarrow 1/24$  系数。

(2)流形需要按照箭头所示的方式连接起来。这表示在虚时间方向有长程的相互作用(如图4中最右边的图所示)。比较  $L \gg \beta$  的细长环面和克莱因瓶，正是这些相互作用贡献了额外的普适熵。可见，克莱因瓶熵可以理解为一个“没有边界的流形上的边界熵”。

图4的变换揭示了克莱因瓶熵的来源，同时也将它与大名鼎鼎的Affleck—Ludwig边界熵<sup>[12]</sup>联系起来。Affleck—Ludwig边界熵说的是当流形有符合特定条件的开边界时，自由能中也有普适的熵的修正。Affleck和Ludwig的结果对于边界共形场论、近藤问题，乃至拓扑纠缠熵都有重要影响。一般地，Affleck—Ludwig边界熵为  $\ln(g)$ ， $g$  对于不同的(共形不变)边界条件而不同，代表无能隙系统在特定边界条件下的非整数“简并度”。

#### 4 格点模型计算：量子蒙特卡罗与热态张量网络方法

上面的推理仅仅基于形象的拓扑变换和共形

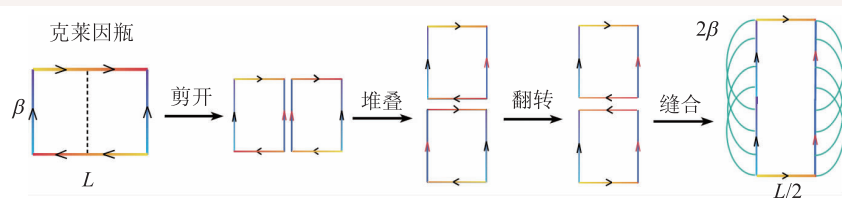


图4 剪开—堆叠—翻转—缝合操作，提供计算和理解克莱因瓶上共形场论普适热数据的简洁有效方式

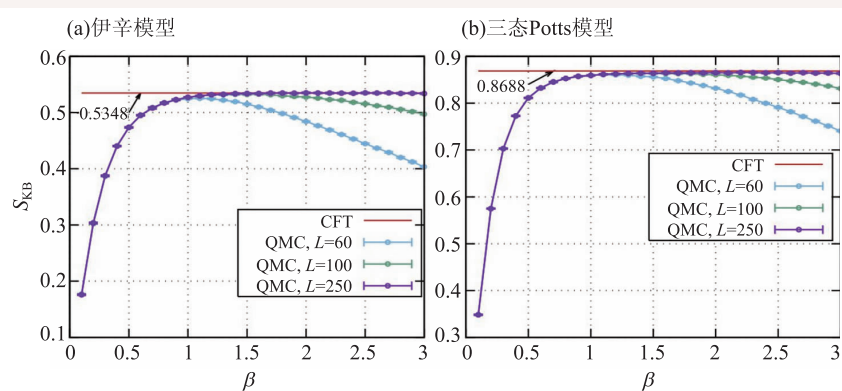


图5 通过(a)量子伊辛模型和(b)量子三态Potts模型比较量子蒙特卡罗计算与共形场论预言的克莱因瓶熵<sup>[5]</sup>

场论分析，为了严格地验证它们，我们可以在格点模型上作精确的计算。其实，对于一些特殊的简单模型，用笔和纸就能做这样的解析计算。感兴趣的读者可以见参考文献[4]。对于更一般的情况，我们则需要动用一些数值计算工具。

通过前面的讨论，可以看到路径积分方法把量子问题转化为高一维的经典统计问题。而所谓“量子”蒙特卡罗方法，就是采用随机抽样的方法研究这个高一维空间中的经典统计模型。具体

到我们的问题，克莱因瓶熵  $\ln(k) = \ln \left[ \frac{Z^k \left( 2L, \frac{\beta}{2} \right)}{Z^l \left( L, \beta \right)} \right]$

等价于计算两个拓扑结构不同的流形上的统计模型的自由能差。实际的蒙特卡罗计算可以有一个形象的理解，想象有一个来回穿梭于两个流形的商人，我们统计他在两个世界停留的时间比例，再取对数就直接得到了克莱因瓶熵。由图5可见，当符合我们所要求的条件  $L \gg \beta$  时<sup>[13]</sup>，共形场论所预言的克莱因瓶熵是相当准确的！这个值并不依赖于具体的微观模型，而是对同一类共形

场论是普适的。

除了量子蒙特卡罗方法，热态张量网络方法也是一类计算有限温度共形场论的精确有效办法，感兴趣的读者可以参见《物理》2017年第7期的相关介绍文章<sup>[14]</sup>。形象地说，张量网络可以理解在环面(图3(a))、圆柱面、克莱因瓶(图3(b))或者莫比乌斯带(图3(c))等连续流形上打“格子”，把连续路径积分计算变成了网格上张量的缩并，这就提供了一种非常方便的数值计算流形上配分函数的方法。

这套方法是行之有效的，文献[6]的结果表明热态张量网络的计算可以非常精确地给出克莱因瓶熵的普适结果。除了克莱因瓶上的普适熵，利用张量网络和部分解析计算我们发现莫比乌斯带上也存在着有密切联系的普适零点熵。采用张量网络和解析求解等方法，如图6所示，在恰当选取共形边界条件使得Affleck—Ludwig边界熵为零时，发现莫比乌斯带上的熵恰好是克莱因瓶熵的一半，即 $\frac{1}{2}\ln(k)$ ！例如图6(a)中，量子伊辛模型的莫比乌斯带熵为 $\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}/2)$ ；而图6(c)中所示，对于XY自旋链的克莱因瓶熵为 $\ln(2)$ ，而莫比乌斯带熵恰好是 $\frac{1}{2}\ln(2)$ 。这又是我们在本文一开头提到的“两条莫比乌斯带粘接起来得到一个克莱因瓶”这一有趣拓扑特征的热力学体现。在选取共形边界条件使得Affleck-Ludwig边界熵不为零时(图6(b)和(d))，我们的计算表明，莫比乌斯带上也存在非零的边界熵，并且也恰好会是圆柱面Affleck-Ludwig熵的一半，即 $\frac{1}{2}\ln(g)$ 。这一结论也可以直观地理解，因为莫比乌斯带的拓扑性质决定其只有一条开边(而圆柱面是两条)，因此与圆柱面相比是后者Affleck—Ludwig边界熵的一半。

综上，我们发现莫比乌斯带上的普适零点熵存在一个非常简洁的

表达式 $S_M = \frac{1}{2}[\ln(k) + \ln(g)]$ ，这个式子集中体现了莫比乌斯带的两个拓扑特征(单面、单边)，非常漂亮地反映了流形拓扑与共形场普适热力学性质之间的简洁而深刻的联系。

## 5 结语与展望

本文的基础是3位笔者与合作者近期的一系列工作。这些工作研究了不可定向流形的拓扑和共形场论普适热力学的关系，得到了一些有趣的结果。部分结果的优美程度出乎笔者的意料之外，但细推也在情理之中。希望这篇短文能够分享给读者我们在研究中所体会到的欣喜。这3篇相关工作分别于近期发表在《物理评论快报》<sup>[14]</sup>和《物理评论B辑》上<sup>[5, 6]</sup>。感兴趣的读者可以查阅原文来了解更多的细节。

不可定向流形与普适热力学的故事远未结束。除上面讨论的两种流形外，笔者之一与合作者最近采用张量网络研究了最小的不可定向闭曲面，即交叉覆盖盘(crosscapped-disk, 或更一般地称为实仿射平面 $RP^2$ )，并发现交叉覆盖盘上存在

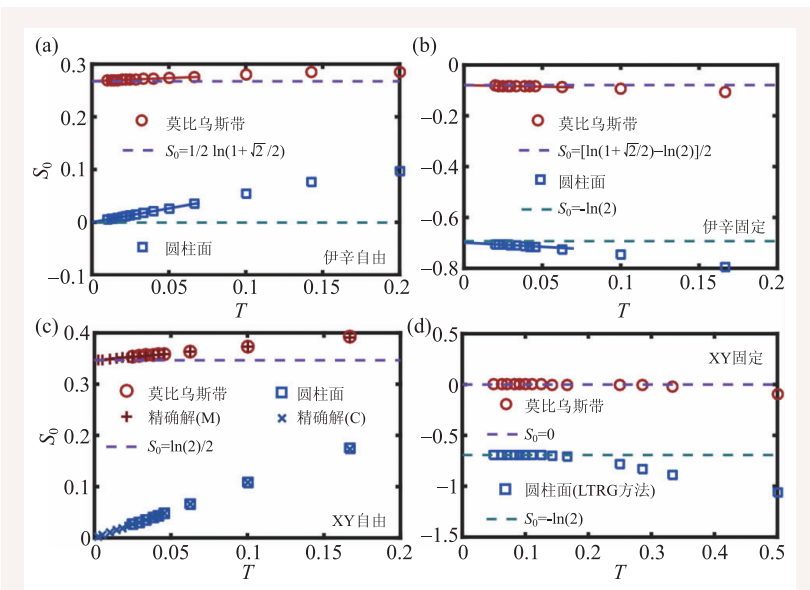


图6 张量网络计算莫比乌斯带和圆柱面上的普适熵<sup>[6]</sup>，后者即著名的Affleck—Ludwig边界熵。(a)和(b)为量子伊辛模型在自由和固定边界下的计算结果；(c)和(d)为XY模型(哈密顿量 $H = -\sum_i s_i^x s_{i+1}^x + s_i^y s_{i+1}^y$ ，其中 $s_i^{x,y}$ 为自旋-1/2算符的 $x, y$ 分量)在两种边界的数值以及部分解析结果。从这些计算中，我们精确验证了莫比乌斯带上的零点熵是普适的，并且是克莱因瓶熵与相应Affleck—Ludwig边界熵的和的一半

对数发散的普适项，其系数正比于共形场论的中心荷<sup>[7]</sup>。除了前文中提到的有理共形场论，两位笔者与合作者最近还证明了1+1维紧致化自由玻色场(compactified free boson)在紧致化半径(compactification radius)不是有理数时，对应的非有理(non-rational)共形场论也有普适的克莱因瓶熵，且克莱因瓶熵只依赖于紧致化半径<sup>[8]</sup>。这一发现不仅暗示了克莱因瓶熵是二维共形场论的普适性质，也提供了新的方法来准确计算凝聚态物理中赫赫有名的Tomonaga—Luttinger液体的Luttinger参数。克莱因瓶、莫比乌斯带和交叉覆盖盘等不平凡流形上存在着简洁而漂亮的热力学性质，它们构成了对人们熟知的定向流形(环面、圆柱面)上珍贵普适数据的重要补充，我们期待它们在人类探索相变与临界现象这一复杂有趣的领域中发挥更大的作用。

最后，用一首小诗来结束我们关于时空克莱因瓶的讨论：

涵虚月光玲珑瓶，次第楼阁幻雨晴。  
瀚海寻芳天接水，微尘曲陌有共形。

致谢 感谢唐维、陈磊、王昊昕、林海、谢心澄等卓有成效的合作和有益讨论，以及陈斌斌、程嵩、王楚颖等阅读本文提出修改意见。

## 参考文献

- [1] 伽莫夫G著, 暴永宁译, 从一到无穷大. 北京: 科学出版社, 2002
- [2] 在流形上我们可以局域张起坐标架, 约定图1中朝向纸面内(背离三维观察者)为正Z方向, 对于1号位置的驴, 约定头指向X方向, 四脚指向为Y方向, 从X到Y方向叉乘得到Z, 满足左手规则
- [3] Di Francesco P, Mathieu P, Sénéchal D. Conformal Field Theory. New York: Springer-Verlag. 1997
- [4] Tu H H. Phys. Rev. Lett., 2017, 119:261603
- [5] Tang W, Chen L, Li W *et al.* Phys. Rev. B, 2017, 96: 115136
- [6] Chen L, Wang H X, Wang L *et al.* Phys. Rev. B, 2017, 96: 174429
- [7] Wang H X, Chen L, Lin H *et al.* Phys. Rev. B, 2017, 97: 220407(R)
- [8] Tang W, Xie X C, Wang L *et al.* arXiv: 1805.01300, 2018
- [9] Affleck I. Phys. Rev. Lett., 1986, 56: 746
- [10] Blöte H W J, Cardy J L, Nightingale M P. Phys. Rev. Lett., 1986, 56: 742
- [11] 需要注意的是, 由于此时 $\beta$ 不再对应于经典模型中温度的倒数, 前文中对于共形不变的1+1维量子体系在环面和克莱因瓶上低温比热的预言对经典统计模型不再适用
- [12] Affleck I, Ludwig A W W. Phys. Rev. Lett., 1991, 67: 161
- [13] 注意这里存在两个不能交换顺序的极限过程, 共形场论中要求先取热力学极限( $L \rightarrow \infty$ ), 然后是零温极限( $\beta \rightarrow \infty$ ), 才能得到普适的热力学性质. 因此在实际计算中我们总是选取 $L \gg \beta$ , 使得计算总是反映场论的有限温度统计性质, 而不至于“分辨”出系统的有限尺寸能隙而仅仅描述单个基态(或少数几个低能量子态)的个别性质
- [14] 刘耘婧, 陈斌斌, 李伟. 物理, 2017, 7: 430

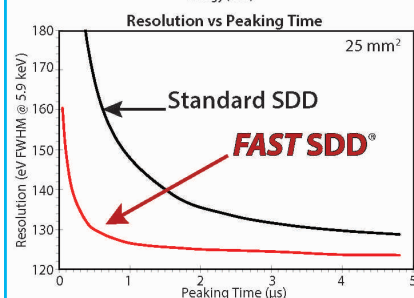
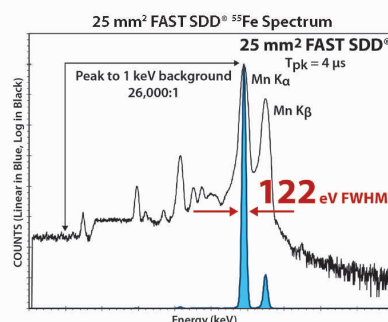
## Ultra High Performance Silicon Drift Detector

### FAST SDD®

Count Rate = >1,000,000 CPS

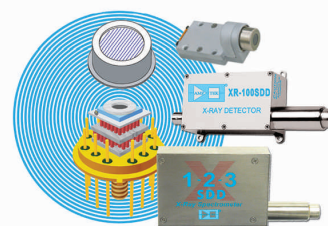
The True State-of-the-Art

- New in-house manufacturing
- Lower noise
- Lower leakage current
- Better charge collection

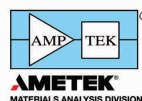


### Options:

- 25 mm<sup>2</sup> active area collimated to 17 mm<sup>2</sup>
- 70 mm<sup>2</sup> collimated to 50 mm<sup>2</sup>
- Windows: Be (0.5 mil) 12.5 μm, or C Series (Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>)
- TO-8 package fits all Amptek configurations



Please see our web site for complete specifications and vacuum applications



**AMPTek Inc.**  
sales@amptek.com  
www.amptek.com