晶体几何系列之四 只有五种柏拉图多面体的证明*

曹则贤†
(中国科学院物理研究所　北京　100190)

2019－01－11收到
† email：zxcao@iphy.ac.cn
DOI：10.7693/wl20190509

一般的数学教育内容都会包含简单的欧几里得几何学。那里面的几何形状，大体上都是一些多边形，且是区分形状和大小的。随着人们对几何认识的深入，还发展出了更高深的学问，拓扑学。拓扑学，topology，关切几何体的拓扑性质，与大小、形状无关而只和topos(可理解为某种相对位置关系)有关。几何学的意义怎么强调都不为过，几何是物理学的语言，甚至有物理学几何化的说法。拓扑学近年来深刻地影响了物理理论的发展，量子力学、相对论都纳入了拓扑学的语汇。学习拓扑学常被视为畏途。本文介绍关于只存在五种规则凸多面体的证明，读者可从中找到一点从几何学顺利地过渡到拓扑学的感觉。

图1　长成凸多面体的金刚石颗粒

1　多面体的欧拉公式

在大自然中，液滴的外观可能是光滑的曲面，小水珠几乎是完美的球形，而晶体的外观常常是由一些平的小面(facet)围成的。比如，图1中的天然金刚石颗粒，外观就明显呈现多个规则的小面。这样的几何形状叫多面体，它的特征包括顶点(vertex，0维)、边(棱，edge，1维)和面(face，2维)。如果多面体是凸的，即往外鼓的，则其顶点数V、边数E和面数F要满足一定关系，$V-E+F=2$。此乃所谓的欧拉多面体公式。从前用32块皮子(20块六边形，12块五边形)缝制的足球，就有60个顶点和90个边，满足$V-E+F=2$。记$\chi=V-E+F$，称为欧拉示性数(Euler characteristic)。笔者以为，对于多面体这个公式，引入体(3维)数S，可写为$V-E+F-S=1$，注意公式里的几何特征数目，随着几何特征的维度从0开始逐步增加，其前面的+/－符号是交替变化的(这个符号的交替是其中学问的硬核，与其它学问分支有内在的联系)。这种写法的好处是，可以轻松推广到其它维度的情形而无需记忆不同的公式。比如二维情形，即对多边形，有$V-E+F=1$。当然了，因为$F=1$，它实际上是$V-E=0$，即多边形的顶点数和边数相同，这是人所共知的事实。容易想到，对于四维情形，即对polytype，有$V-E+F-S+P=1$，其中P是四维空间体的数目。因为$P=1$，相应的欧拉公式应为$V-E+F-S=0$。欧拉公式的证明可见文后所列的文献。本章则要利用欧拉公式证明一个有趣的观察事实，即只存在五种规则多面体，或称柏拉图多变体。

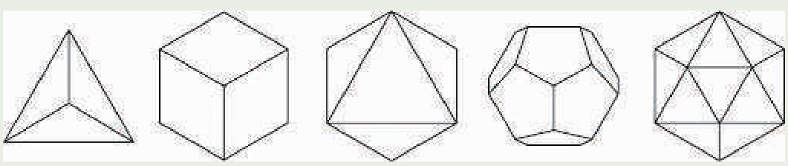

图2　五种柏拉图多面体

2　柏拉图多面体

如果一个凸多面体的小面是全等的规则多边形，则称为规则多面体。这样的规则凸多面体只有五种，即正四面体(tetrahedron，小

* 选自作者在中国科学院大学讲授的《表面物理》研究生课程，收录入《惊艳一击——数理史上的绝妙证明》一书。

图3 开普勒用球和正多面体构造的宇宙模型

图4 苏格兰出土的人类四千多年前用石头制作的正多面体

面为三角形)，正六面体(cube，立方体，小面为正方形)，正八面体(octahedron，小面为三角形)，正十二面体(dodecahedron，小面为五边形)和正二十面体(icosahedron，小面为三角形)，见图2。柏拉图时期人们就知道这五种规则多面体。在《蒂迈欧》一书中，柏拉图猜测地上的四种元素风、火、水和土以及天上的quintessence (即第五种存在)就分别对应这五种形状，因此这五种规则多面体又称为柏拉图多面体(Platonic solids)。具体地，正四面体对应火，正六面体对应土，正八面体对应气，正二十面体对应水，而正十二面体对应quintessence或者宇宙。整个天体为球体。后来，开普勒用它们构造宇宙的模型(图3)。柏拉图和开普勒这类人之所以是智者，就在于他们模糊的认识在后来被发现包含着最深刻的道理。这些多面体由球脱胎而来，数学上这些几何体的对称群是球对称群SO(3)的子群，而物理上一个球形液滴冷却后结晶，即发生对称性破缺，留下了对称性较低的固体颗粒。据信人类在四千年前就制作出这五种规则多面体了(图4)。不过，远古人类为什么要用石头制作正多(曲)面体，十分费解。

3 只有五种柏拉图多面体的证明

古人虽然感觉到只有五种柏拉图多面体，但却没有证明。关于这个问题，基于欧拉多面体公式，可以得出一个非常简单的证明。注意观察正多面体的边，每一个边都是由两个顶点规定了的，且每一个边又都是由两个面所规定了的：“两个顶点连一个边，两个面交于一个边。”这样，假设正多面体的小面是p-边形($p>2$)，每个顶点连接着q条边($q>2$)，则有$pF=2E=qV$。由欧拉公式$V-E+F=2$，可联立求解得

$$V=\frac{4p}{4-(p-2)(q-2)}\ ;$$

$$E=\frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}\ ;$$

$$F=\frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}\ .$$

可以得出如下解：

$p=3$，$q=3$，对应正四面体；

$p=3$，$q=4$，对应正八面体；

$p=3$，$q=5$，对应正二十面体；

$p=4$，$q=3$，对应正六面体；

$p=5$，$q=3$，对应正十二面体。

QED.

或者，将$pF=2E=qV$带入欧拉公式$V-E+F=2$，得关系式$\frac{2E}{q}-E+\frac{2E}{p}=2$，进一步地有$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{E}>\frac{1}{2}$。因此，$\{p，q\}$的组合只有$\{3，3\}$，$\{3，4\}$，$\{3，5\}$，$\{4，3\}$，$\{5，3\}$这五种可能。

4 多余的话

关于只有五种凸多面体的证明，当然还联系着别的数学，比如代数方程的解，比如群论。从实用性的角度来看，关于多面体性质的学问关系到对晶体学的理解，因此它是晶体学、固体物理进而材料科学的几何基础。晶体结构可看作是能充满整个三维空间的某种多面体或者多种多面体之组合在空间中的排列。图5中的多面体，是由正八面体截去六个顶角得到的十四面体，也称截角八面体。它是常见的晶体单胞。试试数一数它的顶角数和边数是多少，看看是否满足欧拉多面体公式？这个多面体是一种

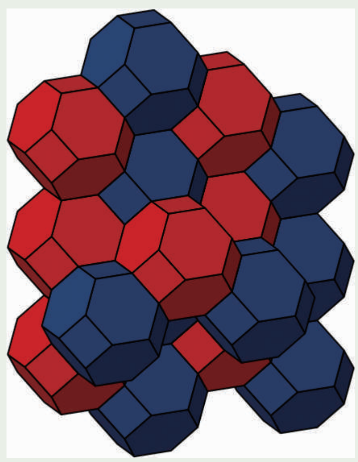

图5 截角八面体排列起来充满整个三维空间

典型的 Wigner—Seitz 单胞。开尔文爵士曾猜测这种多面体充满空间，是表面积之和最小的那种选择，这被称为开尔文猜想。类似地在二维情形，把平面充满的多边形，六角结构(蜂窝、炭单层)是边长之和最小的那种。开尔文猜想在2003年被证明是错的。

再啰嗦一句，当我们学习某个内容发现其极其难以理解时，很可能是预备知识不够。物理学是一条思想的河流，如果沿着其发展的脉络探寻的话，会发现它虽然有些起伏跳跃，但不会有大峡谷式的罅隙。如果真有这样的罅隙，那你的机会来了，remplir cette lacune，科学发展的一个模式就是填补空隙。

参考文献

[1] Richeson D S. Euler's Gem：The Polyhedron Formula and the Birth of Topology. Princeton University Press，2008

[2] Flegg H G. From Geometry to Topology. Dover，2001

新书资讯

读者和编者

剑桥大学卡文迪许实验室，在1904年至1989年的85年间一共产生了29位诺贝尔奖得主，这个数字真的令人惊叹！卡文迪许实验室的前主任马尔科姆·朗盖尔教授，这位国际公认的大才子，这位仅靠一次讲座就可以吸粉无数的大科学家，在剑桥大学传授物理学课程几十年，针对大学物理教学中一些被忽略的重要方面，综合与多位学者以及课堂上聪明且能言善辩的学生的讨论，以全力以赴的工作态度加上热情洋溢的写作风格，为全世界的读者奉献了这本《物理学中的理论概念》，一直被剑桥大学卡文迪许实验室用作教材。它不仅限于解决实际的物理问题，更注重物理概念的历史渊源、物理图像和物理本质。

一般的大学物理教材，总是把知识分割成力学、热学、电磁学、光学、原子物理学来阐述。而本书打通了这些本不该被分立的知识体系，模糊了彼此的界限，体现职业物理学家处理问题时用到的整体观，以严谨的理论逻辑为主线，7大专题，脉络清晰，连续而深刻地对物理学整体进行了总结和提升。

本书以一种独创、新颖且全面综合的方法对物理学中的理论研究进行了探讨，并以真实的物理学是科学家不断探索和实践的结果的视角阐述主题。作者试图将本书作为大学本科高年级物理课程的补充读物，并假定读者对普通物理的知识已有所了解。利用对7个专题的系列研究，作者着重描述了理论物理学中某些最难的概念、科学家们充满智慧的艰难探索，以及研究和发现所带来的激动和欣喜。这些专题研究包括牛顿运动定律和万有引力定律起源、麦克斯韦方程组、线性/非线性力学与动力学、热力学与统计物理、量子概念起源、狭义相对论、广义相对论与宇宙学。

码上有书