

一生能有多少爱

孟子杨[†]

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

2020-04-22 收到

[†] email: zymeng@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20200509

我承认，这是一个俗气的题目。很多年前，大概是还觉得《读者》之类的鸡汤文字集合是文学的时候吧，不知在什么地方见到过以此为题目的一本书。内容自然记不清楚了，大抵都是些 content-free 的大实话：人生艰难，痛苦总是多于欢欣，没有爱的扶持我们怎么能够坚持下去云云。时过境迁，已经练就了铁石心肠鸡汤不入，只有这个题目还映在脑海里。

也是很多年前，大概是还有人看《一生能有多少爱》这样的文字的时候，在凝聚态物理学量子多体研究领域，物理学家们正在真真实实地为了非费米液体这样的人生难题而痛苦。自从先师朗夫子和他门下的 AGD 诸贤人创立了朗道费米液体理论框架以来，后学们格物致知的人生从未显得如此困难，从未遇到过用圈图计算不能解决的问题，从未如此需要爱的扶持。“天不生列夫，万古如长夜”，眼下我们又遇到了新的挑战，而列夫已经走远了。

那么挑战到底是什么呢？

我们接着上一篇往下说^[1]。朗道费米液体理论描述了金属导体的基本性质，比如低温下，电阻满足 $\rho \sim T^2$ 的关系；静态磁化率 $\chi \sim N(\epsilon_f)$ 是一个和温度无关但是和费米面上态密度有关的常数；比热满足 $C \sim T$ 的关系等等。这些现象的本质原因是费米面附近无穷多的电子，尽管感受到了彼此之间的量子多体相互作用，但作用的结果不过是重整化

了它们，将质量变成有效质量，磁矩变成了有效磁矩。这些具有有效质量、有效磁矩的准粒子，在能量接近费米能的过程中，愈发地接近无相互作用的自由费米子，用量子力学单体问题成熟的计算手段来处理，故其行为可以被准确计算并解释相关实验结果。套用最近刚刚去见朗夫子的凝聚态物理学亚圣 Anderson 的话，此处其实不是 more is different，而是 more is the same，问题变得简单了。

然而，量子多体世界一如人生，复杂才是它的本质，痛苦总是多于欢欣。当代以来许多关联电子系统的实验现象不能用费米液体理论描述。高温超导体相图中的奇异金属和赝能隙区域，重费米子量子临界区中的非费米液体等等，抛开材料的千别万化和现象的纷繁复杂，单说电阻随温度的依赖关系这一条，就不是 $\rho \sim T^2$ 而是 $\rho \sim T^a$ ，并且 $a < 2$ 。这怎么解释？本篇我们就从这里切入，谈谈巡游电子量子临界理论的构造。

后世的物理学家多年勤勤恳恳地整理非费米液体实验上的结果，抽象出最简单的模型，然后运用解析和数值工具，研究如是的模型中是否蕴含着非费米液体的迹象，其中一大类是费米子和临界玻色子耦合模型^[2]，其微观晶格模型的拉式量可以写成如下的形式：

$$L[\psi, \phi] = L_{\text{fermion}} + L_{\text{boson}} + L_{\text{coupling}},$$

其中

$$L_{\text{fermion}} = \sum_{i,j,\sigma} \psi_{i,\sigma}^\dagger \left[(i\partial_\tau - \mu)\delta_{ij} - t_{ij} \right] \psi_{j,\sigma} + h.c.,$$

$$L_{\text{boson}} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \tau} \right)^2 + m\phi_i^2 + \phi_i^4 \right] + \sum_{i,j} J_{i,j} \phi_i \cdot \phi_j,$$

$$L_{\text{coupling}} = \lambda \sum_i \phi_i \cdot \psi_{i,\alpha}^\dagger \vec{\sigma}_{\alpha\beta} \psi_{i,\beta}.$$

这里 $\psi_{i,\sigma}$ 是费米子(电子)算符， i, j 为晶格坐标， σ 是电子自旋， $t_{i,j}$ 是自由费米子在晶格上的跃迁， μ 是控制系统中电子数目的化学势。玻色场 ϕ_i 可以是标量(具有 Ising 对称性)或者矢量场(二分量具有 O(2) 对称性或者三分量具有 O(3) 对称性)， $J_{i,j}$ 是玻色场的空间相互作用，而其时间求导 ∂_τ 则赋予玻色场量子维度的动力学，二次项 ϕ_i^2 前面的系数 m 用来调节玻色场从对称的无序态到对称性破缺的有序态的相变。如果没有耦合项 L_{coupling} 的存在，此处的相变就是玻色子自己在(2+1)时空维度的 Wilson—Fisher 普适类相变，但是耦合项的存在改变了玻色子和费米子的命运。 λ 将玻色子的临界动力学涨落传递给了费米子，当 m 调节到相变点时，费米子在时空的路径积分框架下具有了有效相互作用，而这些相互作用的费米子还可以再反馈给玻色子，改变玻色子的临界行为，使得整个耦合系统 $L[\psi, \phi]$ 处在了一个新的量子临界点上。这个零温的量子临界点和其上的量子临界区域，就是孕育非费米液体的地方。如是的模型和基本的相图都在图 1 中展示。

有了模型，下一步就是如何求解。此处人们又遇到了困难。从解析上可以进行一些微扰计算，仍然是运用圈图计算的方法。在这个方面，还是俄国人支配着领域的进展，足以显示朗道学派传统余威之所及。圈图计算是一种级数展开的概念，计算结果的可靠性依赖于级数是否可以在一定阶数收敛。遗憾的是，到目前为止，对于上述的耦合模型，普遍意义上的收敛形式还没有找到。但是在不同的展开阶数上，人们对于问题还是有一些基本的认识。比如在最低阶的近似下，有所谓的 Hertz—Millis—Moriya 结论，这是随机相位近似(random phase approximation, RPA) 层次上的结果。在图1中所示的2维晶格系统量

子临界点上，Hertz—Millis—Moriya 对于铁磁和反铁磁量子临界点给出了高斯不动点普适类的预言。这个结论显然过于简单，基本上就是说费米子和临界玻色子耦合的结果是把量子临界问题变成了比原来纯玻色子的 Wilson—Fisher 量子临界行为还要简单的问题，虽有其存在的意义，但又是一个 more is the same 精神的结论，和实验观测还是有差距。比 RPA 高级一些的理论是所谓的大 N 展开，此处 N 可以是费米子的内禀自由度数目(比如自旋或者 flavor 数目)，或者系统中低能费米子自由度的数目(比如反铁磁量子临界问题中，因为费米面被玻色子涨落矢量所折叠而造成的费米面上 hot spots 的数目)。大 N 展开确实可

以把系统带到新的不动点和普适类，比如对于铁磁和反铁磁的量子临界点，可以得到电子的自能出现频率的分数幂次的行为， $\Sigma(\omega) \sim \omega^a$ ， $a < 1$ ，而不是常规的费米液体 $\Sigma(\omega) \sim \omega^2$ 。在铁磁量子临界点上，人们预期看到 $\Sigma(\omega) \sim \omega^{2/3}$ 的非费米液体^[6, 7]；在反铁磁量子临界点上，人们预期看到 $\Sigma(\omega) \sim \omega^{1/2}$ 的非费米液体^[2]。所以，如果能够在模型的严格计算中，清晰地看到费米子自能随着频率展现出分数化幂次，就是非费米液体理论正确认识的第一步。

在上一篇文章中，我们讲到相互作用下的电子格林函数，

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{Z_{\mathbf{k}}}{\omega - \epsilon_{\mathbf{k}}^* - i \sum''(\mathbf{k}, \omega)},$$

$$\text{其中 } Z_{\mathbf{k}} = \frac{1}{1 - \frac{\partial \sum''(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \epsilon_{\mathbf{k}}^*}}$$

是相互作用系统中的准粒子权重，

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^* = \epsilon_{\mathbf{k}} + \sum''(\mathbf{k}, \epsilon_{\mathbf{k}}^*)$$

是重整化之后的准粒子色散关系，

$$\tau^{-1} \sim \sum''(\mathbf{k}, \omega)$$

描述重整化之后准粒子的寿命。其实我们之前反复提到的，人们不知道非费米液体的理论描述，主要是在说非费米液体的自能应该满足什么样的表达式，尤其是做为准粒子寿命的虚部的解析表达式。而我们上面提到的大 N 展开的结果，就是对于临界点上费米子自能的频率依赖关系的描述。自能虚部所对应的 life time 的倒数可以近似为准粒子的电阻 $\rho \sim \tau^{-1}$ ，所以铁磁量子临界点上 $\sum''(\omega) \sim \omega^{2/3}$ 就意味着 $\rho \sim \omega^{2/3}$ 或者 $T^{2/3}$ (频率和温度都是能量量纲)，反铁磁量子临界点上 $\sum''(\omega) \sim \omega^{1/2}$ 就意味着 $\rho \sim \omega^{1/2}$ 或者 $T^{1/2}$ 。虽然还是和实验中看到的幂次不一样(比如高温超导体中的非费米液体中电阻和温度呈线性关系)，但是起码已经偏离

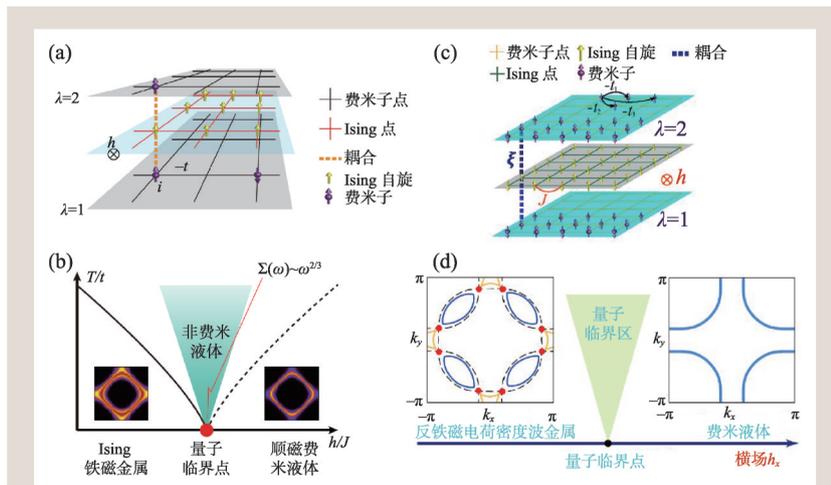


图1 (a)费米子与铁磁量子 Ising 自旋耦合模型^[3]。 $\lambda = 1, 2$ 表示正方晶格的两层自由费米子，中间一层为量子 Ising 自旋，自旋之间具有铁磁相互作用 J ，横向的磁场 h 引入 Ising 自旋的量子涨落，涨落通过耦合传递给费米子，引入费米子之间的有效相互作用。(b)模型的示意相图^[4]。横场 h 大于临界值时，Ising 自旋量子无序，耦合不发生作用，费米子处于顺磁费米液体，费米面自旋上下简并；横场 h 小于临界值时，Ising 自旋铁磁有序，耦合的结果是费米面自旋简并劈裂，费米子处于 Ising 铁磁金属状态，但由于此处玻色子涨落很弱，Ising 铁磁金属仍然是费米液体。只有在横场 h 处在临界值时，玻色子量子涨落最强，系统在零温时处于量子临界点。费米子之间通过玻色涨落生出强烈地相互作用，系统进入量子临界非费米液体区，其基本的性质是费米子自能满足频率的分数幂次，对于铁磁量子临界金属这个幂次是 $2/3$ 。(c)和(d)的解释见前文^[1]，与(a)和(b)发生同样的物理过程，只不过是反铁磁量子临界现象。在 Ising 反铁磁序形成的区域，费米面折叠，折叠出的交点是 hot spots。在量子临界区中，hot spots 动量处的费米子进入非费米液体^[5]，其自能的幂次为 $1/2$

了费米液体的 $\rho \sim T^2$ 行为, 而且这些结果只是 $1/N$ 的第一阶的结果, 电阻直接用 life time 的倒数(也就是自能虚部)来近似也很粗糙, 考虑高阶修正之后幂指数可能再发生变化, 很有希望和实验观测结合起来。所以, 眼下的问题就是, 能否在模型的严格计算中, 看到理论预言的自能虚部有偏离费米液体的行为。

说来惭愧, 几十年过去了, 这一步我们才刚刚看到。理论上的近似计算当然很早就得到了上面的 $1/N$ 展开结果, 但是后期人们主要在讨论更高阶的修正会如何改变这些低阶的结果, 关于级数是否会最终收敛此事目前仍然没有定论^[8], 所以不同的阶数结论不同。比如对于铁磁量子临界点, 人们甚至在讨论连续相变本身是否存在, 抑或是其实系统变成了1级相变^[9]; 而对于反铁磁量子临界点, 高阶圈图的计算似乎在指出随着费米速度向着玻色子低能波矢方向转动, 甚至连临界指数本身也会发散^[10]。总之, 这些讨论牵扯到进阶的重整化群语言, 朗学后人和业内专家们讨论起来自然是棋逢对手, 口吐莲花, 十分过瘾; 但是在广大读者看来庶几针尖上站几个天使之类的玄学清谈, 我们还是就此打住, 转而介绍晶格模型数值计算的结果吧。毕竟大家都会看图和数数。

图1中的费米子与临界玻色子耦合模型, 可以通过量子蒙特卡洛模拟得到确定性的结果。图2就是数值计算所得的 Ising 铁磁和反铁磁量子临界点模型的相图^[3, 5]。相图中的数字、符号和简称大家还是要看具体的文献, 但是基本的安排(如有颜色阴影的区域为铁磁和反铁磁金属, 白色区域为顺磁费米液体, 零温的量子相变点之上的温度区域为

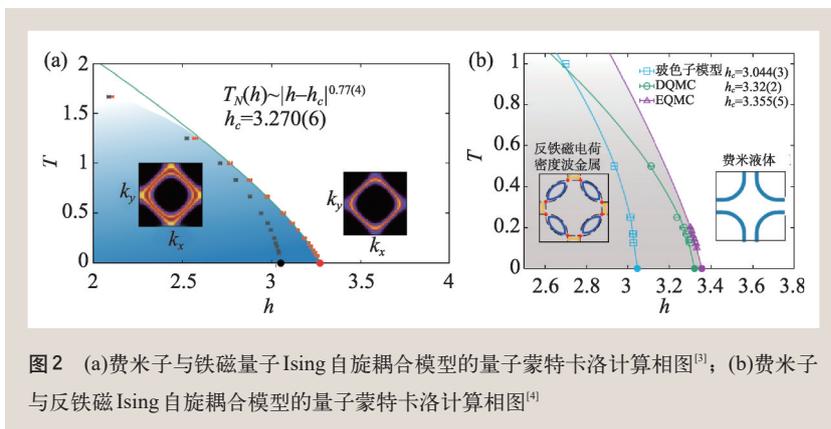


图2 (a)费米子与铁磁量子 Ising 自旋耦合模型的量子蒙特卡洛计算相图^[3]; (b)费米子与反铁磁 Ising 自旋耦合模型的量子蒙特卡洛计算相图^[4]

量子临界区)和图1中的示意是一致的。为了能够进行这样问题的计算, 在算法的设计和优化方面也需要做相当的前期准备, 比如为了克服费米子行列式蒙特卡洛的计算复杂度高和临界慢化等问题, 我们发展出了自学习蒙特卡洛方法^[11]; 为了增大在费米面上 hot spots 附近的动量解析度, 我们设计了鹧鸪算法^[12](鹧鸪英文名 EMU, 我们的算法英文名 EMUS-QMC: Elective Momentum Ultra-Size Quantum Monte Carlo Method, 简称 EMUS)。其实这些计算方面的进步, 很大程度上来自于从事数值计算与从事解析理论的物理学家的良性互动, 这也是近年来量子多体研究的一个大趋势。对于费米面和临界玻色子耦合的量子临界问题, 只要把所有的计算资源集中到低能的自由度上, 增大这里的能量—动量的解析度, 就可以抓住问题的本质, 有效地提高对于临界行为的准确描述能力, 而不用操心原本微观晶格模型中的高能自由度。其实场论模型就是这样设计的, 现在的数值计算物理学家, 在量子多体问题中已经开始直接模拟量子场论模型, 通过模型设计和算法的进步, 逐步克服以前微观模型的局限, 明心见性, 直指本心。

在图2(a)、(b)所示的晶格模型中, 通过调控量子 Ising 自旋模型中

的横向磁场 h 大小, 也就是前面拉式量 L_{boson} 中的 m , 可以控制玻色子量子涨落的强度, 可以让费米子系统处于顺磁费米液体 (Fermi liquid)、铁磁和反铁磁金属以及我们最关心的量子临界区 (quantum critical region, QCR)。在 QCR 中, 系统处在强关联的参数范围, 蒙特卡洛的计算结果揭示了非费米液体的行为。如是的结果在图3中展现。图3(a)中的三幅图就是铁磁量子临界点上蒙特卡洛计算得到的费米子权重(i)、自能(ii)与格林函数(iii)^[3]。在图3(a)中展示了费米液体中的准粒子权重, 即在1附近的那些圆点, 它们是 $h > h_c$ 的顺磁相中的 $Z_k(T)$, 基本恒定在1不随温度变化, 这是费米液体的行为。而在量子临界区中, 即图中的方块数据, 可以清楚的看到费米面上的准粒子权重 $Z_k(T)$ 随着温度从1一路减小, 这是明显偏离费米液体的行为。这样的对比说明在量子临界区中稳定的准粒子图像已经不再适用, 在费米面上虽然还存在着大量的临界费米子激发, 但是它们都存在于非费米液体的一锅鸡汤里, 鸡汤中的自由度不断翻滚着、涨落着、冒着泡, 没有准粒子, 没有无穷长的 life time。然后再观察我们反复强调的自能, 如图3(a-ii)和(b)中都画出了蒙特卡洛得到的自能虚部。一个显著的特点是这里的自

能竟然随着频率缓慢低发散，一如图3(b)中那条绿色的 $1/\omega_n$ 背景虚线。这虽然不是费米液体(对于费米液体来说，自能在松原频率下线性

到零，如图3(a-ii)中那些实心圆点所示)，但显然也不是我们提到铁磁量子临界点上 $\Sigma''(\omega)\sim\omega^{2/3}$ 。这又是这么回事呢？

大概花了3年左右的时间，正是在和解析理论物理学家的互动中，我们才意识到问题所在^[4]。原来之前所讲的大 N 展开圈图计算，其实都是在温度严格为0的量子临界点上进行的，当年的朗学后人们也没有想到有朝一日还真有一批实心眼的数值计算物理学家会真正设计出晶格模型，并费力优化算法，就是为了能够检验场论模型的预言。所以如果现在认真看待量子蒙特卡洛晶格计算，会发现这样的计算都是在有限的晶格大小，有限的温度下进行的，虽然我们想让计算的结果尽量逼近零温的结果，但是有限温度涨落所引入的对于自能的修正是不能忽略的。这一点在当年的解析计算中没有考虑，那个铁磁量子临界点上 $\Sigma''(\omega)\sim\omega^{2/3}$ 是纯粹的零温的结果。故而一般而言，如果考虑了有限温度的贡献，可以预期自能应该分成热涨落(thermal)和量子涨落(quantum)两部分的贡献，即

$$\Sigma(\omega_n) = \Sigma_T(\omega_n) + \Sigma_Q(\omega_n)$$

而且能够将 Σ_T 和 Σ_Q 清楚地分开对于模型的参数也有要求，就是耦合强度 λ 需要小于系统的带宽(或者费米能) ϵ_F ，然后频率 ω_n 的取值范围大概在 $\sim\lambda\epsilon_F^{1/2}$ 到 $\sim\epsilon_F$ 之间，此时 $\Sigma_Q(\omega_n)$ 的形式是一个比较复杂的积分。有限温度的自能贡献，在如此的频率范围内是一个缓慢发散的形式， $\Sigma_T(\omega_n)\sim\alpha(T)/\omega_n$ ，其中 $\alpha(T)$ 和频率无关只与温度有关，这部分贡献可以从蒙特卡洛得到的总的自能中扣除，从而暴露出量子部分的自能。等到频率低于 $\lambda\epsilon_F^{1/2}$ ，才能看到大 N 展开时零温的 $\Sigma_Q(\omega)\sim\omega^{2/3}$ 。这样的结果如图3(c)所示^[4]。蒙特卡洛的自能数据，在扣除掉 $\Sigma_T(\omega_n)$ 之后，由

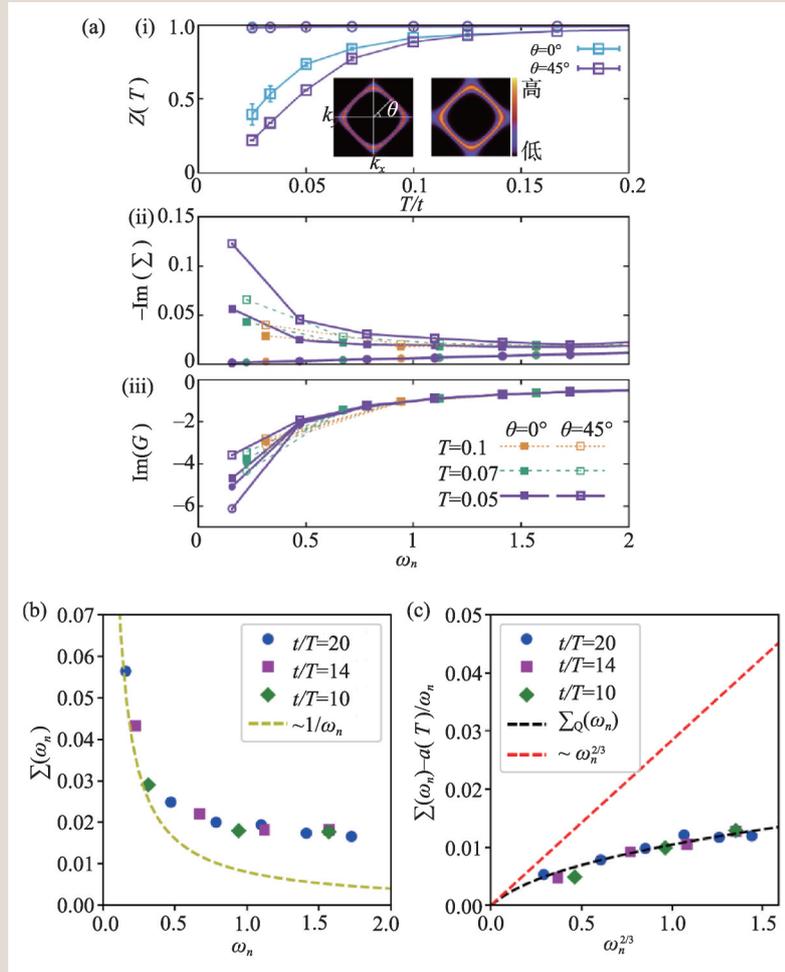


图3 (a)(i)铁磁量子临界点相图中的准粒子权重。方块图标为量子临界点上的测量，圆圈图标为费米液体中的测量。 $\theta=0^\circ, 45^\circ$ 分别代表费米面上的两个不同动量点。在量子临界区中，准粒子权重 $Z_i(T)$ 随着温度降低，这是非费米液体的行为；在费米液体区域，准粒子权重是接近1的常数，这是费米液体的行为。(ii)和(b)为相应过程中费米子自能虚部随频率的变化。(ii)里的方块图标是量子临界区中的自能，(b)里面是同一笔数据，自能为有限值，并且随着频率的降低而缓慢增大，显然不是费米液体行为。(ii)里的圆点是费米液体区中的自能，随着松原频率线性到零，显示出低能下无相互作用的本质。量子临界区中的非费米液体却随着频率有一个类似 $1/\omega_n$ 缓慢发散的背景(b)中的虚线)，虽然不是费米液体，但也不是文章提到的 $\Sigma(\omega)\sim\omega^{2/3}$ 的分数量数指数行为，说明之前的理论有没有考虑周全之处。(c)考虑了有限温度的自能贡献 Σ_T (经过计算可以得出其近似为 $\Sigma_T = \alpha(T)/\omega_n$)，并将其扣除 $\Sigma_Q(\omega_n) = \Sigma(\omega_n) - \alpha(T)/\omega_n$ ，剩下部分即是量子临界点给出的非费米液体自能 $\Sigma_Q(\omega_n)$ ，其数值结果和解析计算的结果(图中黑色虚线)吻合，而前文中提到的 $\Sigma(\omega)\sim\omega^{2/3}$ 非费米液体行为其实只是完整解析计算在极低频率之下的渐进行为(图中红色虚线)

于计算所在的频率范围大部分在 $\lambda\epsilon_F^{1/2}$ 到 ϵ_F 之间, 故而此时的 Σ_0 为复杂的函数形式, 其解析解就是图中的黑色虚线, 完美地从数据中穿过。而当频率低于能量尺度 $\lambda\epsilon_F^{1/2}$ 时, 零温的 $\Sigma_0(\omega) \sim \omega^{2/3}$ 以渐进行为出现, 就是图中的红色虚线。由是观之, 其实在考虑了有限温度情况之后, 非费米液体的自能其实应该如图中的黑线, 虽然没有简单的代数表达式, 但是其存在的频率范围反而远大于那个简单的、渐进的 $\omega^{2/3}$, 也就是说, 其实在蒙特卡洛计算中可以清楚地看到量子临界区中看到非费米液体的自能, 关键在于如何正确地设计模型和分析数据。

行文至此, 在物理内容上可以打住了。基本信息就是现在后学们已经可以在费米子和铁磁临界玻色子耦合的模型中, 通过量子蒙特卡洛计算, 再扣除掉有限温度自能的贡献, 明确地揭示量子临界涨落所造成的非费米液体行为, 非费米液体的自能和其分数化幂律的渐进行为也可以被看到。有了这样的认识, 在其他的量子临界涨落模型中, 如反铁磁、电荷密度波、规范场涨落等等, 当然可以进行如是理论与数值结合的分析, 逐步建立起如费米液体一般的非费米液体理论框架——当然, 我们这些后学们还得如先师一样, 给这个框架起一个不那么生硬拗口的名字。

话题再回到一生能有多少爱, 如果说非费米液体鸡汤中的复杂现象, 我们可以就着蒙特卡洛的猛火, 可劲儿地搅拌翻腾理出头绪, 并把先贤的道路往前推进的话。世界的变化就真是实心眼的科学家们所不能理解的了。人生的底色是痛

苦、疲惫和困厄, 但目之所及, 还是有人忍受着生死的考验进行着体现着生命意义的创造, 当然大多数人在中途放弃了。创造的内容有高下, 深远者如先师朗夫子和诸多亚圣贤人为后人构造科学的框架和指出道路, 后学们在这道路上前进, 总会发现新的风景, 得到新的认识, 再为后人推广知识的边界。我们普通人的创造大多数时候, 无法如先贤般穿透历史战胜时间(不过大家也看到, 朗夫子的理论也不过半个世纪, 已经不足以解释新的现象了), 但就是在这样勉力为之的过程中, 一个一个的普通人找到了寄托, 战胜了困厄的人生, 扬弃了时代和社会加诸于我们身上的枷锁。创造性的活动让我们操心劳神, 忍受着生存、名利、人性中的愚蠢偏狭所造就的种种不合理, 但也让我们在创造中忘记了这些额外的痛苦, 和人生达到了动态的和解, 找到了人生中的爱。有一个朋友, 平日里写诗, 虽然水平不入流却乐此不疲, 最近又给我发来新作, 记述他在眼下这个瘟疫横行的世界上的一次际遇。虽然仍然水平有限但其勉力为之的意思庶几近乎我这些磕磕绊绊的文字, 抄在这里做为本文的结尾吧。

底特律机场与爵士乐

瘟疫正在世界上横行, 动荡的时代更让人时时追问生命本来的目的。阴差阳错中穿行于大洋彼岸, 在底特律机场碰到现场爵士乐钢琴表演, 黑人乐手自信忘我的神情和清脆激越的琴声片刻间安抚了我焦灼的心, 但这表演却被大多行色匆匆的旅客忽略。遂想起生命旅途中的迷惑亦如此, 美好常见于疲惫之

中, 匆匆的行旅又有多少是不自觉的盲从。站在琴声中既悲伤又欣慰, 记录下来示不忘也。

在底特律机场里听爵士乐
冬日的阳光从云层中洒出
抬头见大厅钢窗外的天
轻快如少年

琴声珍珠般灵动
清脆激越
黑人乐手迷人的投入
被来往的旅人所忽略
美好总是飘渺的
又有谁会驻足?

瘟疫肆虐
只求不要再放大人们心中的恶
争夸、欺诈
宁可毁了自己只为让别人难受的撕裂
这几年来, 可曾少见?
生命的意义真如这琴声
只有想听的人才能获得慰藉

机场里的街头音乐家
自遣自娱自徘徊
只有一个异国的旅客
片刻间被他熨平了满心的焦渴
停下来, 纵然只有一小会儿
激赏和忘情

真的只有一小会儿
又要开始下一段疲惫的旅程
少年的心事毕竟会远去
只愿人性的恶不要胜于瘟疫

真的只有一小会儿
在琴声中看到了善良
想起来有谁说过
不知该原谅些什么
诚觉世事尽可原谅

参考文献

- [1] 孟子杨. 白马非马, 非费米液体—非—费米液体. 物理, 2020, 49(3): 186
- [2] Abanov A, Chubukov A V, Schmalian J. Quantum-critical theory of the spin-fermion model and its application to cuprates: Normal state analysis. *Advances in Physics*, 2003, 52: 119
- [3] Xu X Y, Sun K, Schattner Y *et al.* Non-Fermi-liquid at (2+1)d ferromagnetic quantum critical point. *Phys. Rev. X*, 2017, 7: 031058
- [4] Xu X Y, Klein A, Sun K *et al.* Extracting non-Fermi liquid fermionic self-energy at $T=0$ from quantum Monte Carlo data. 2003, arXiv:2003.11573
- [5] Liu Z H, Pan G P, Xu X Y *et al.* Itinerant quantum critical point with fermion pockets and hot spots. *PNAS*, 2019, 116 (34): 16760
- [6] Altshuler B L, Ioffe L B, Millis A J. Low-energy properties of fermions with singular interactions. *Phys. Rev. B*, 1994, 50: 14048
- [7] Chubukov A V. Self-generated locality near a ferromagnetic quantum critical point. *Phys. Rev. B*, 2005, 71: 245123
- [8] Lee S S. Low-energy effective theory of Fermi surface coupled with U(1) gauge field in 2+1 dimensions. *Phys. Rev. B*, 2009, 80: 165102
- [9] Metlitski M A, Sachdev S. Quantum phase transitions of metals in two spatial dimensions. I. Ising-nematic order. *Phys. Rev. B*, 2010, 82: 075127
- [10] Metlitski M A, Sachdev S. Quantum phase transitions of metals in two spatial dimensions. II. Spin density wave order. *Phys. Rev. B*, 2010, 82: 075128
- [11] 孟子杨. 从德尔斐箴言到自主学习蒙特卡罗. 物理, 2017, 46(4): 248
- [12] 孟子杨. 我们的壮游. 物理, 2019, 48(10): 683



Golden WAY SCIENTIFIC 专心/专注/专业

二十年的默默耕耘, 风雨兼程, 铸就了欧普特人“专心”, “专注”, “专业”的风格和品质, 孜孜不倦地对创新和品质的追求, 让欧普特具备了全线覆盖低, 中, 高, 超高功率激光光学元件的加工生产和检测能力。伴随中国激光行业的蓬勃发展, 欧普特愿与您共同进步, 砥砺前行, 为中国光电事业的发展 and 进步共同尽一份心力和责任。

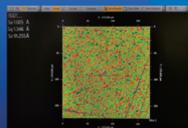
精密光学元件

1. 球面透镜
2. 柱面&非球面透镜
3. 光学棱镜
4. 反射镜(玻璃&金属)
5. 光学窗口
6. 偏振&消偏元件
7. 滤光片
8. 光栅

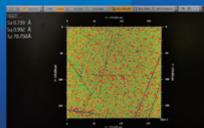


激光器件

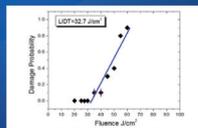
1. 扫描场镜(紫外-红外)
2. 线扫镜头
3. 紫外远心镜头
4. 中继镜
5. 扩束镜



(熔石英基材, 直径50.8mm光学窗口)



(单晶硅基材, 1070nm高反膜)



关注二维码



北京市朝阳区酒仙桥东路
1号M7栋东五层



www.goldway.com.cn
Email: optics@goldway.com.cn



Tel: +86-(0)10-8456 0667
Fax: +86-(0)10-8456 9901