

论黑体辐射定律的基础*

马克斯·普朗克 著 曹则贤^{1,†} 译

(1 中国科学院物理研究所 北京 100190)

2020-03-24 收到

† email: zxcao@iphy.ac.cn

DOI: 10.7693/wl20200605

译者的话

普朗克(Max Planck, 1858—1947)是相对论的奠基人,是热力学的拓展者,是统计力学的反对者和拥护者。普朗克是量子论的先驱,但似乎不能算是量子力学的奠基人。在1900年的文章(M. Planck, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum (标准谱能量分布律理论), Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2, 237—245(1900))中,普朗克用能量量子假设 $\epsilon = h\nu$ 再次得到了他在此前一篇文章中得到的黑体辐射谱分布公式,即所谓的普朗克分布公式。在此后十余年的时间里,普朗克对待能量量子的态度同爱因斯坦等人的态度截然相反,可以说他并不期待一个所谓的量子理论而只是希望在新的物理理论中,作用量子 h , 普朗克嘴里的 Wirkungsquantum, 危害小点儿就好了。当然了,普朗克是一直在思考量子与黑体辐射问题的,他称自己那些年里的所作所为是绝望行动(Akt der Verzweiflung)。然而,在1911年底,普朗克提交了当前的这篇论文,在一个新的振子发射辐射模型的基础上,普朗克再次得到了黑体辐射公式,这是普朗克自己的第三种黑体辐射公式推导方式,也是继爱因斯坦在1906年,1907年,1910年,洛伦兹在1908年,德拜在1910年,艾伦菲斯特在1911年各种花式推导黑体辐射公式后的新尝试。这篇文章绝对是物理学史上里程碑式的存在。本文中,普朗克不仅再次如愿以偿地得到了黑体辐射公式,关键是他还第一次使用了对应原理(这是后来构建量子理论会频繁用到的一种方法),第一次导出了谐振子的零点能 $\frac{1}{2}h\nu$ 。零点能的概念出来以后,爱因斯坦和Otto Stern迅速拿过去讨论了氢低温比热的问题。这样的一篇文章,绝对是物理学研究方法论的教科书范本。今特将此文翻译出来,盼与诸君一起边学习边思考如何让大脑孕育新思想的问题。原文见 Max Planck, Über die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung, Annalen der Physik 37, 642—656(1912). 原文有些说法或用词在今天看来可能已经过时,但还是忠实于原文给翻译了出来,必要时译者会加注解。文中普朗克的各种操作是否合理、妙处何在,读者诸君请自行体会。

1 导论

至今从考察单色振动的、既吸收又发射辐射能量之线性振子出发的关于黑体辐射谱能量分布公式的推导,正如曾多次强调的那样,有一个非常敏感的缺陷。为了确定辐射强度对温度的依赖关系,振子的能量一方面同空间中自由传播的波动辐射的强度联系起来,另一方面又被用作计算此种振子所构成体系之熵的基础【译者注:就是

分别指普朗克公式 $\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$ 中前面的系数与后面的平均能表示】。

第一个方面的研究纯粹是电动力学的。振子的振动能

$$U = \frac{1}{2}Kf^2 + \frac{1}{2}L\left(\frac{df}{dt}\right)^2 \quad (1)$$

(f 是振子的电极矩。 K 和 L 都是正的系数)被当作连续变化的量处理,其值可通过积分振动方程

$$Kf + L\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{2}{3c^3}\frac{d^3f}{dt^3} = E_z \quad (2)$$

来计算(E_z 是在振子轴方向上的外场之电场强度分

* 摘自1912年1月12日德国物理学会议

量, c 是光速)

第二个方面的研究则纯粹是统计的。振子的振动能量被当作非连续变化的, 即当成一个基本量子 $\varepsilon = h\nu_0$ 的整数倍, 其中 h 是一个普适常数, ν_0 是振子本征振动的振动数【译者注: 波数; 即频率 ν 。下文中管角频率 ω 叫作频率】

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K/L}. \quad (3)$$

这两种看问题方式之间的矛盾是显然的。即便将方程(2)只用于平均能量 \bar{U} , 而统计计算时出现的是在特定时刻的实际能量 U , 如此考虑这个矛盾也只是缓和了一些。因此, 找到将电动力学的处理方式与统计的处理方式统一起来的辐射公式推导依然是当务之急。

本文就是针对这个任务的。本文中, 辐射定律将从某些物理前提推导。这些前提, 尽管依这件事的本性必然包含某些假设的元素, 不过我相信它们没有内在矛盾, 且离经典电动力学和电子理论的核心不远, 而不是如其之人所共知不可跨越的对立面那样, 总是需要量子假设。

当然我无意说这个推导是独有的或者是最切合实际的。恰恰相反, 我认为很可能其形式与内容都大有改进的余地。但是, 存在一个绝对没有矛盾的推导, 严格说来此前还没有这样的推导, 我感觉那已是实质上的大进展了。

2 物理前提

我们保留此前推导中的前提, 即在一个充满静态黑体辐射、由静止的镜面壁所围成的真空腔中存在一个由许多具有特定共同本征周期的、静止的线性振子所构成的系统, 其间的距离使得振子间互相没有影响。这些振子应该吸收和发射能量, 但仅以电磁波辐射的形式。振子的振动能仍由(1)式给出。与此相反, 振动方程(2)应代之以简单地丢掉阻尼项得到的形式

$$Kf + L \frac{d^2 f}{dt^2} = E_z, \quad (4)$$

这和经典电磁学矛盾。不过, 深入思考会发现矛

盾只扩展到振子表面或内部的区域¹⁾, 恰是在这些地方新假设还能首先得到保证的。

这样常用的发射机制就关上了, 现在需要引入一个新的发射机制, 此处会用到量子假设。我们假设如下前提, 振子只在其振动能 U 是能量单元 $\varepsilon = h\nu_0$ 的整数 n 倍那样的时刻才能发射。它是否确实发射, 或者通过吸收继续增加其振动能, 取决于概率【译者注: 这个假设太让人无语。大科学家的特点就是通过大胆的胡说八道得到重大结果】。这不是说关于是否发射不作因果性的考虑, 而是决定是否发射的因果过程应该具有这样的隐藏性质, 其规律暂时通过统计的方式来确立。这样的假设在物理学中不陌生, 比如在化学反应的原子理论、放射性物质的衰变理论里就有。

当发射发生时, 全部的振动能量都要发射出去, 振子的振动归零, 去迎接下一轮通过吸收辐射能量的再度上扬。

如此, 尚需确定振子在其能量达到 ε 的整数倍的时刻是否发射之概率的规则。因为由假定的振子系统通过吸收和发射的交互作用所能达到的统计平衡状态显然依赖于这个规则, 则振子的平均能量 \bar{U} 越大, 在那个关键时刻振子不发射的几率就应该越大。另一方面, 包围振子的空腔辐射强度越大, 振子的平均能量 \bar{U} 越大, 故我们可确立这样的发射规则: 发射不发生的概率与发射发生的概率之比, 正比于激励振子的振荡强度【译者注: 挺别扭。原文振子 Oszillator 和振动 Schwing 是两个词。后者指辐射的振荡】(因为这个强度的定义, 请比较方程(17))。比例常数的值我们此后会通过应用到辐射强度很大的特例上加以确定【译者注: 这就是普朗克引入对应原理的动机】。如我们所知, 此处经典电动力学以及由其得出的瑞利辐射定律等著名公式成立, 而且对于振子的任意时期都成立。

通过所有这些对此前本人所提出的量子发射假设的进一步精确阐述, 所考察的辐射过程的流程, 静态的特征, 振子系统的熵与温度, 以及黑体辐射谱的能量分布, 就完全确定了。接下来我们首先在电动力学部分考察吸收, 然后在统计部分考察发射和静态能量分布。

1) 振子表面的电磁场当然不能假设是振动偶极子的准静态场。

3 电动力学理论

现在盯住一个振子, 其刚完成一个发射过程, 失去了全部的振动能。我们从此时刻计时, 有 $t=0, f=0, df/dt=0$ 。吸收过程依据方程(4)进行。把 E_z 写成傅里叶级数的形式【译者注: 此处 $n=0$ 项缺少, 从完备性的角度来看似乎不合适。不知道作者是怎样考虑的】,

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{T}), \quad (5)$$

这里选择的 T 特别大, 所有考察范围内的时间 t 都满足 $t < T$ 。因为我们的前提是静态空腔辐射, 故常数 A_n, B_n 以不规则的方式依赖于序数 n 。序数为 n 的分振动拥有振动数 ν 和频率 ω 【译者注: 这个时期的文献也称 ν 为波数】:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi n}{T}, \quad (6)$$

而振子本征周期的振动数【译者注: Schwingungszahl der Eigenperiode des Oszillators. 原文如此】由(3)式给出。

计及初始条件, 我们得到微分方程(4)的定解为

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) + b_n (\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t)], \quad (7)$$

当

$$a_n = \frac{A_n}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad b_n = \frac{B_n}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (8)$$

这就是振子到达下次发射时刻的振动。当 ω 接近 $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, 系数 a_n, b_n 达到最大值($\omega = \omega_0$ 的情形不重要。我们可以通过假设 $\nu_0 T$ 不是整数将这种情形排除)。

我们现在计算振子在时间范围 $t=0$ 到 $t=\tau$, 后者对应的

$$\omega_0 \tau \text{ 是个大数,} \quad (9)$$

全部吸收的能量。这可由方程(1)和(4)通过积分

$$\int_0^{\tau} E_z \frac{df}{dt} dt \quad (10)$$

得到, 其中用到已知的 E_z 的表达式(5)以及

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (-\omega \sin \omega t + \omega_0 \sin \omega_0 t) + b_n (\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_0 t)]. \quad (11)$$

通过乘积, 带入(8)式中 a_n, b_n 的值, 丢掉由两个

不同常数 A_n 和 B_n 乘积得到的所有项, 这提供了吸收的能量,

$$\frac{1}{L} \int_0^{\tau} dt \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{A_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t (-\omega \sin \omega t + \omega_0 \sin \omega_0 t) + \frac{B_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t (\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_0 t)].$$

逐项对 t 积分, 得

$$\frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} [-\frac{\sin^2 \omega \tau}{2} + \omega_0 (\frac{\sin^2 \frac{\omega_0 + \omega}{2} \tau}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{\omega_0 - \omega})] + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} [\frac{\sin^2 \omega \tau}{2} - \omega (\frac{\sin^2 \frac{\omega_0 + \omega}{2} \tau}{\omega_0 + \omega} - \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{\omega_0 - \omega})].$$

为将不同数量级的项分开, 可将此表达式改写, 使得在每一项中都出现差 $\omega_0 - \omega$, 结果为

$$\frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} [\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega} \frac{\sin^2 \omega \tau}{2} + \omega_0 \frac{\sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{\omega_0 + \omega} \times \sin \frac{\omega_0 + 3\omega}{2} \tau + \omega_0 \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{\omega_0 - \omega}] + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \times [\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega} \frac{\sin^2 \omega \tau}{2} - \omega \frac{\sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{\omega_0 + \omega} \sin \frac{\omega_0 + 3\omega}{2} \tau + \omega \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{\omega_0 - \omega}].$$

现在, 对傅里叶级数的序数 n 求和。因为基本周期 T 非常大, 则相邻两序数差 $\Delta n = 1$ 对应非常小的频率差 $d\omega$, 根据(6)式,

$$\Delta n = 1 = T d\nu = \frac{T d\omega}{2\pi}. \quad (12)$$

对 n 的求和转换成了对 ω 的积分。

由 A_n 构成的求和级数包括三项, 我们先比较其数量级。只要关切的是数量级, 可暂时不考虑 A_n^2 的变动, 拟比较的三个积分为

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0 + \omega)^2} \frac{\sin^2 \omega \tau}{2} = J_1,$$

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega_0}{(\omega_0 + \omega)^2} \frac{\sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{\omega_0 - \omega} \sin \frac{\omega_0 + 3\omega}{2} \tau = J_2, \text{ 以及}$$

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega_0}{(\omega_0 + \omega)} \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{(\omega_0 - \omega)^2} = J_3.$$

根据(9)式, 至少就我们所关切的 ω 值来说, $\omega_0 t$ 以及 ωt 都是大数, 因此积分可以简化。在积分 J_1 中, 表达式 $\sin^2 \omega t$ 可以用平均值 $1/2$ 代替, 得到 $J_1 = \frac{1}{4\omega_0}$ 。在第二项积分 J_2 中, 因为最后一个因子, 显然有 $J_2 = 0$ 。计算第三个积分 J_3 时, 我们将频率 ω 的取值序列限制在 ω_0 两侧, 即从 $\omega_1 < \omega_0$ 到 $\omega_2 > \omega_0$, 使得

$$\frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0} \text{ 和 } \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} \text{ 是小数} \quad (13)$$

而同时

$$(\omega_0 - \omega_1)\tau \text{ 和 } (\omega_2 - \omega_0)\tau \text{ 是大数。} \quad (14)$$

因为 $\omega_0 t$ 是大数, 故这是可能的。将积分 J_3 裁成三部分, $J_3 = \int_0^\infty = \int_0^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} + \int_{\omega_2}^\infty$, 则因为条件(14), 第一和第三部分积分中的表达式 $\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} t$ 可以用其平均值 $1/2$ 替代, 由此这两部分积分变成了

$$\int_0^{\omega_1} d\omega \frac{\omega_0}{2(\omega_0 + \omega)} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2} \text{ 和 } \int_{\omega_2}^\infty d\omega \frac{\omega_0}{2(\omega_0 + \omega)} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2}, \quad (15)$$

总是都相应地小于 $\int_0^{\omega_1} \frac{d\omega}{2(\omega_0 - \omega)^2}$ 和 $\int_{\omega_2}^\infty \frac{d\omega}{2(\omega_0 - \omega)^2}$, 其相应的值为

$$\frac{\omega_1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)} \text{ 和 } \frac{1}{2(\omega_2 - \omega_0)}. \quad (16)$$

现在还剩 J_3 中间部分的积分

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \frac{\omega_0}{(\omega_0 + \omega)} \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{(\omega_0 - \omega)^2}.$$

因为条件(13), 可以近似写为 $\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau}{2(\omega_0 - \omega)^2}$,

引入积分变量 $x = \frac{\omega - \omega_0}{2} \tau$, 考虑到积分边界条件

(14), 得 $\frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{4}$ 。相对表达式(16), 以及

作为加强版相对于(15)式里的两个部分积分以及上面的积分 J_1 和 J_2 , 此表达式处于高数量级。因为我们的计算中只有在 ω_1 和 ω_2 之间的频率 ω 有显著的存在感, 所以我们可以因为(13)式在总的吸收能量表达式中将系数 A_n^2 和 B_n^2 用在 ω_0 附近的平均值 A_0^2 和 B_0^2 来代替, 利用(12)式, 最终得到振子在时间 τ 吸收到能量总额为 $\frac{1}{L} \frac{\tau}{8T} (A_0^2 + B_0^2)$ 。

现在通过谱分解激励场强 E_z 的均方值来定义激励振子的强度 J_0 , 即

$$\bar{E}_z^2 = \int_0^\infty J_\nu d\nu, \quad (17)$$

则由(5)和(12)式得 $\bar{E}_z^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty (A_n^2 + B_n^2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (A_n^2 + B_n^2) \cdot T d\nu$, 比较(17)式, 得 $J_0 = \frac{1}{2} (A_0^2 + B_0^2) T$ 。进一步地, 看得到在时间 τ 吸收的能量为 $\frac{J_0}{4L} \tau$, 这意思是说在两次发射之间振子能量 U 是随着时间均匀增加的, 满足

$$\frac{dU}{dt} = \frac{J_0}{4L}. \quad (18)$$

4 统计理论

每一次当振子能量 U 为基本量子 $\varepsilon = h\nu$ (我们从现在起放弃下标 0) 的 n 倍时, 将全部能量 U 发射出去的事件就可能发生, 概率记为 η ; 相应的发射不发生的概率为 $1 - \eta$ 。根据第 2 节假设的发射规则, 不发射的概率相对发射的概率之比正比于强迫振子的激励振动之强度 J , 即

$$\frac{1 - \eta}{\eta} = p \cdot J \quad (19)$$

其中比例因子 p 的值留待特别考虑。如下给出在静态辐射场中振子的平均能量 \bar{U} 。

在 N 个完全发射的振子中, $N\eta$ 是在达到第一个能量量子时发射的, $N(1 - \eta)\eta$ 是在达到第二个能量量子时发射的, 以此类推, $N(1 - \eta)^{n-1}\eta$ 是在达到第 n 个能量量子时发射的。由此可见, 在静态场中同时随机挑出来的 N 个振子中, 有 $N\eta = NP_0$ 个能量在 0 到 ε 之间; $N(1 - \eta)\eta = NP_1$ 个能量在 ε 到 2ε 之间; 以此类推, $N(1 - \eta)^{n-1}\eta = NP_{n-1}$ 个能量在 $(n - 1)\varepsilon$ 到 $n\varepsilon$ 之间。这里 P_n 是振子能量在 $n\varepsilon$ 到 $(n + 1)\varepsilon$ 之间的概率,

$$P_n = (1 - \eta)^n \eta. \quad (20)$$

这样, 振子的平均能量 \bar{U} 由如下方程给出

$$\bar{U} = \sum_0^\infty P_n (n + \frac{1}{2}) \varepsilon = \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon. \quad (21)$$

【译者注: 注意, 这个 $1/2$ 是作为 0 到 1 的均匀分布的平均值出现的】

从(19)式可得到其对激励振动强度 J 的依赖关系

$$\bar{U} = (pJ + \frac{1}{2})\varepsilon, \quad (22)$$

我们用这个公式首先来决定比例系数 p 。

在第2节结尾处我们确立了规则，对于大的激励振动强度 J 的值，振子的平均能量过渡到经典电动力学所要求的值²⁾【译者注：对应原理亮相！】 $\bar{U} = \frac{3c^3}{32\pi^2\nu^2}J$ 。由此得

$$p = \frac{3c^3}{32\pi^2\nu^2\varepsilon} = \frac{3c^3}{32\pi^2h\nu^3}. \quad (23)$$

由此，平均能量 \bar{U} 以及，根据(19)式有

$$\frac{1}{\eta} = 1 + pJ, \quad (24)$$

在给定强度的静态辐射场中的 N 个相同振子组成之系统的能量分布，就唯一地决定了。我们也能以熟知的方式计算系统的熵和温度。

首先，系统的熵为³⁾

$$S_N = -kN \sum_{n=0}^{\infty} P_n \ln P_n.$$

根据(20)式

$$S_N = -kN [\ln \eta + (\frac{1}{\eta} - 1) \ln(\frac{1}{\eta} - 1)],$$

或者考虑到(24)和(22)式，

$$S_N = kN [(\frac{\bar{U}}{\varepsilon} + \frac{1}{2}) \ln(\frac{\bar{U}}{\varepsilon} + \frac{1}{2}) - (\frac{\bar{U}}{\varepsilon} - \frac{1}{2}) \ln(\frac{\bar{U}}{\varepsilon} - \frac{1}{2})] = NS.$$

那么，由此可得出温度【译者注：注意，这里是熵对平均能量的微分。这一时期的文献还有写成熵对能量微分的。其总体思想都是凑热力学中内能、熵与温度三者之间的关系】

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{d\bar{U}} = \frac{k}{\varepsilon} \ln \frac{\bar{U}/\varepsilon + \frac{1}{2}}{\bar{U}/\varepsilon - \frac{1}{2}},$$

或者，因为 $\varepsilon = h\nu$ ，

$$\bar{U} = \frac{h\nu}{2} \frac{e^{h\nu/kT} + 1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (25)$$

最后，由(22)和(23)式，黑体辐射的谱振动强度为

$$J = \frac{32\pi^2 h\nu^3}{3c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{1}{p} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (26)$$

其通过关系

$$J = \frac{4\pi u}{3} \quad (27)$$

同对应频率的辐射密 u ，以及通过关系 $J = \frac{32\pi^2}{3c} R$ 同单色线偏振的辐射比强度 R ，相联系。

$T=0$ 时，有 $J=0$ ， $u=0$ ，但是 $\bar{U} = h\nu/2$ 。这个同温度无关的能量剩余属于“潜能”⁴⁾，其对比热容没有贡献但是对惯性(以及有重量的)质量有贡献，它也构成放射性作用的源泉。【译者注：普朗克这里是一通瞎扯。不过，没等他来得及摆脱或者至少再论这个1/2，爱因斯坦1913年就拿这个零点能的概念迅速解释了氢低温比热的实验结果】

5 发射数与积聚时间

前述辐射公式的推导尽管是明确的、自洽的，但是所采取的物理过程本质上往好了说也只是近似靠谱的。为了进一步考察所存在的偏差，应该将这里假设的理想谐振子的物理性质进一步地详细追踪，尽可能地建立起其共同观察结果之间的联系。这包括发射次数甚至积聚时间，即振子两次发射之间的时间间隔，的计算。

记振子从包围它的黑体辐射获得能量单元所需要的时间为 τ_1 ，根据(18)式，

$$\tau_1 = \frac{4Lh\nu}{J}. \quad (28)$$

现在显然在 N 个保持静止的振子的体系中，在时间 τ_1 内每一个振子恰好有一次发射的机会，且概率为 η 。由此给出的单位时间内的发射数为

$$\frac{N\eta}{\tau_1} = \frac{8\pi^2\nu^2}{3c^3L} e^{-h\nu/kT} N. \quad (29)$$

如所期待的那样，辐射数目随温度的增加而增加，但却不是无界的，而是到达一个与振动数有关的最大值。经过简单思考，由此可得到一个平均积聚时间，即一个振子相继两次发射的平均时间间隔，为

$$\frac{3c^3L}{8\pi^2\nu^2} e^{h\nu/kT}. \quad (30)$$

振子在相继两次发射之间平均所进行的振动数目为

$$\frac{3c^3L}{8\pi^2\nu} e^{h\nu/kT}. \quad (31)$$

2) 见 M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. v. 3. Febr. 1911 中的方程 (4)。

3) 见 M. Planck, Berliner Ber. v. 13. Juli 1911 中的方程 (23)。

4) 见 M. Planck, Berliner Ber. v. 13. Juni 1907, p. 567; Ann. d. Phys. 26. p. 30. 1908.

5) 见 A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. 36. p. 928. 1911.

为了对这个数的大小有点感觉，我们假设振子的振动由电荷为 e 、质量为 m 的电子的运动构成，根据方程(1)和(2)，有

$$L = m/e^2. \quad (32)$$

作替换 $v = c/\lambda$ ，用Bestelmeyer的 e/m 最新数值⁵⁾， $e/m = 1.77 \times 10^7 \cdot c$ ，此外， $e = 4.69 \times 10^{-10}$ ， $c = 3 \times 10^{10}$ ， $k = 1.35 \times 10^{-16}$ ， $h = 6.55 \times 10^{-27}$ ，则由(31)式可得到未扰动振动的平均振动数为 $1.37 \times 10^{11} \lambda e^{1.46/\lambda T}$ 。若波长单位不是cm而是 μ ，则结果为

$$1.37 \times 10^7 \lambda e^{1.4600/\lambda T}. \quad (33)$$

根据这儿的假设，这个数字必须很大，否则吸收方程(18)式就失去了基础。在一般常见情形确实如此，只有当温度 T 大于 10^{11} 同时波长 λ 小于 $10^{-6} \mu$ 时，未扰动振动的振动数才是中等数量级的，此前的考察过程才需要引入修正。

根据(29)式，用同样单位，振子每秒的发射数为

$$2.18 \times 10^7 \lambda^{-2} e^{-1.4600/\lambda T}. \quad (34)$$

而根据(30)式，平均积聚时间为

$$4.58 \times 10^{-8} \lambda^2 e^{1.4600/\lambda T}. \quad (35)$$

关于发射过程进一步的细节，即发射的波长数，这儿处理的假设无可奉告。容易想到可如此扩展假设，将每一个发射同放弃或者获取一个电子的过程相联系。这当然会引入新的能量形式，即自由电子的能量，此亦呼唤新的认知方式。

比较这里处理的理想状况与实际过程时要关注的一个情形是，实际的振子既不是线性的也不是独自振荡的，而是簇拥着互相强烈影响的。

这是未来继续构建理论的主要方向。所需依据自然只能来自关于非静态或者选择性过程(线形谱，伦琴射线，电子束以及离子束等)的经验。普适作用量子 h 与其它原子常数之间存在关联的暗示已经多次出现。

1911年12月，柏林
(1912年1月14日递交)

业界领先的量子计算模拟器+云平台

Huawei Quantum Computing





助力量子前沿技术开发



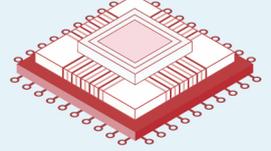
量子电路模拟
HiQ Circuit



量子化学模拟
HiQ Fermion



量子脉冲模拟
HiQ Pulse



更多模块将会
持续上线和开源发布



华为HiQ官网
<https://hiq.huaweicloud.com>

构建万物互联的智能世界