

# 黑洞信息佯谬

阮善明<sup>1,2,†</sup> 安宇森<sup>3,4</sup> 李理<sup>3</sup>

(1 圆周理论物理研究所 滑铁卢 N2L 2Y5 加拿大)

(2 滑铁卢大学 滑铁卢 N2L 3G1 加拿大)

(3 中国科学院理论物理研究所 北京 100190)

(4 中国科学院大学 北京 100049)

## Black hole information paradox

RUAN Shan-Ming<sup>1,2,†</sup> An Yu-Sen<sup>3,4</sup> LI Li<sup>3</sup>

(1 Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo N2L 2Y5, Canada)

(2 University of Waterloo, Waterloo N2L 3G1, Canada)

(3 Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(4 University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

2020-11-19收到

† email: sruan@perimeterinstitute.ca

DOI: 10.7693/wl20201201

**摘要** 黑洞信息佯谬作为理论物理领域最著名的问题之一, 长期以来一直被认为是研究量子引力的重要途径。黑洞信息佯谬的一个核心问题是给出在黑洞蒸发过程中的佩奇曲线行为。近一年, 对该问题的研究迎来了突破性进展。研究人员第一次在半经典引力框架下实现了对佩奇曲线的计算, 表明黑洞在蒸发过程中信息可以被释放出来, 不存在信息丢失问题。文章将按照历史发展的顺序, 对黑洞信息佯谬这一重要问题以及最新进展进行介绍, 包括霍金辐射、佩奇曲线、全息原理、广义熵、量子极端面和量子极端孤岛等重要内容。

**关键词** 黑洞信息佯谬, 霍金辐射, AdS/CFT 对偶, 纠缠熵, 广义熵

**Abstract** As one of the most famous problems in theoretical physics, the black hole information paradox has long been regarded as an important way to study quantum gravity. A core problem of the paradox is to give the Page curve for the evaporation of black holes. In the past year, research on this issue has seen various breakthroughs. For the first time, researchers have been able to reproduce the Page curve under the semi-classical gravitational framework, suggesting that information can be released during the evaporation of black holes, with no information loss. This article will describe the black hole information paradox and, in the order of historical development, the latest achievements in this area, including the Hawking radiation, Page curve, holographic principle, generalized entropy, quantum extremal surface, and quantum extremal island.

**Keywords** black hole information paradox, Hawking radiation, AdS/CFT correspondence, entanglement entropy, generalized entropy

黑洞信息佯谬, 1975年由霍金(Stephen Hawking)<sup>[1]</sup>最先指出, 一般指的是对黑洞蒸发过程中是否丢失信息的争论。一方面, 基于半经典引力的黑洞蒸发理论显示黑洞蒸发会丢失信息; 但另一方面, 信息守恒是基于量子理论的基本原理——么正性得到的普适结论。这样表面上显然

的冲突也使得黑洞信息佯谬成为广义相对论和量子理论这两大基础理论支柱交锋的战场。

作为理论物理中最为出名的佯谬或者问题之一, 黑洞信息佯谬一直是物理学家们用来打赌的重要对象。例如, 加州理工学院的著名物理学家普雷斯基尔(John Preskill)就曾在1997年和霍金、

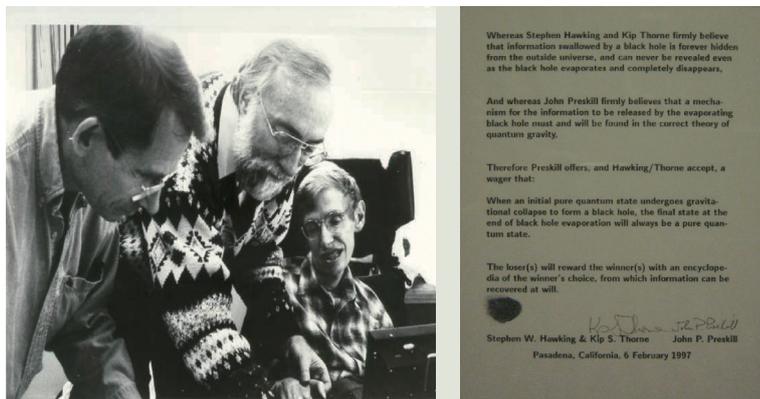


图1 左图摄于1997年,图中人物从左至右分别是普雷斯基尔、索恩和霍金;右图是三位物理学家当时签署的赌约(图片来自网络)

索恩(Kip Thorne)以一本百科全书作为赌注(图1)。前者坚信如果把一本百科全书扔进蒸发的黑洞,其中的全部信息仍然都可以被获得,并没有任何信息丢失。但是霍金和索恩一方认为,百科全书的信息在黑洞蒸发过程中丢失了,最后留下的只是不含有任何有用信息的热辐射。当然,物理学家并不是痴迷于赌博的赌徒,只是因为黑洞信息问题一直是理论物理最热门的研究方向之一。令人兴奋的是,在过去一年,对这个问题的研究终于迎来了突破性的进展<sup>[2, 3]</sup>。物理学家发现,黑洞内部的信息在其蒸发过程中被完全释放出来,并不存在信息丢失的问题。为了表彰领导这一系列研究的几位青年物理学家,今年的新视野物理学奖也相应地授予了阿尔姆海里(Ahmed Almheiri)、恩格哈特(Netta Engelhardt)、麦克斯菲尔德(Henry Maxfield)和彭宁顿(Geoff Penington),以表彰他们对理解黑洞和霍金辐射的信息熵所作出的杰出贡献。虽然对于他们是否最终解决了黑洞信息佯谬的争论仍然广泛存在,但很多物理学家相信我们正在逼近这个问题的终点。本文将从黑洞信息佯谬的提出出发,逐步介绍各种背景工作以便读者理解过去这一年里所取得的进展。

## 1 霍金辐射与黑洞熵

通过从1907至1915年8年间的努力,爱因斯坦基于狭义相对论与等效原理构建了全新的引力

理论:广义相对论。广义相对论的核心——爱因斯坦场方程是高度耦合的非线性方程,其求解是一个极为困难的事情。令人惊讶的是,在广义相对论提出后一个月,身处第一次世界大战战壕之中的施瓦西(Karl Schwarzschild)就得到了爱因斯坦场方程的第一个精确解,描述了真空球对称情况的黑洞。后世为了纪念他的贡献,将其称为施瓦西黑洞解。而描述转动情况黑洞的精确解直到47年后的1963年才被克尔(Roy Kerr)发现,由此也可见

求解爱因斯坦场方程的难度。在随后的研究中,包括霍金在内的研究者证明了一个被称为无毛定理的结论,表明引力场与电磁场组成的任意系统中的黑洞解,只需要质量 $M$ 、电荷 $Q$ 、角动量 $J$ 三个可观测量来描述。虽然塌缩形成黑洞的物质可能就像成千上万本不同的百科全书一样复杂,但是无毛定理却表明黑洞本身极其简单。形成黑洞的物质所携带的信息去了哪里呢?一个简单的想法是都被隐藏在了黑洞的内部。因为黑洞的边界,即事件视界的存在,使得外部观测者无法看到这些复杂的信息,除了黑洞的质量、电荷、角动量这三个简单的参数。正是对黑洞无毛定理的思考,启发了贝肯斯坦(Jacob Bekenstein)对黑洞是否具有熵的探讨。随后霍金在1975年的发现证实了贝肯斯坦的想法。

在克尔黑洞被发现之后的70年代,逐渐迎来了黑洞研究的黄金时代。其中最具代表性的工作就是黑洞热力学的发现。在经典热力学中,存在四大定律。与之类似,巴丁(James Bardeen),卡特(Brandon Carter)和霍金发现黑洞也存在完全类似的四大定律。例如,热力学第二定律表明孤立系统的熵不会随着时间减少,与之对应地,黑洞力学第二定律指出黑洞视界的面积也不会随时间减少(在满足一定的能量条件下)。与热力学四大定律类似的黑洞力学定律的发现似乎表明黑洞也是带有一定温度和熵的热力学客体。黑洞具有熵的猜想,最早由贝肯斯坦在1972年提出。结合黑

洞面积不减定理，他猜想黑洞的熵正比于其视界的面积。可是该猜想一直缺乏强有力的证据，因为任何带有温度的物体都应该会产生相应的热辐射，而黑洞的外部却可以是一个没有任何物质的真空。在1975年，对黑洞温度的理解迎来了突破。霍金天才般地在包含黑洞的弯曲时空中引入了量子场论。不同于经典系统中空无一物的真空，量子的真空存在无处不在的量子涨落，会凭空产生正反虚粒子对。考虑这样的量子效应，霍金发现产生的粒子对中会有一个粒子被黑洞吞并，而另一个从黑洞的表面逃逸出来。因此黑洞并不是完全黑的，而是一直不停地辐射粒子出来。他进一步计算了这些辐射粒子的谱，并惊讶地发现和热力学中的黑体谱完全一致<sup>[4]</sup>。霍金的这一发现不仅证实了黑洞是一个具有温度的客体，也进一步揭示黑洞的熵正比于其视界的面积。黑洞的热力学熵具体表述为

$$S_{\text{black hole}} = \frac{Ac^3k_B}{4G_N\hbar}, \quad (1)$$

其中  $A$  表示黑洞视界的面积， $G_N$  代表牛顿引力常数， $c$  是真空中光速， $k_B$  为玻尔兹曼常数， $\hbar$  为普朗克常数。这一简洁优美的公式也被称为贝肯斯坦—霍金熵(Bekenstein—Hawking entropy)，可以看到，它把物理学中最重要的几个基本自然常数联系起来，揭示了引力、热力学和量子理论之间深刻的联系。为了简化公式，在后文中将采用自然单位制，相当于选取  $c=k_B=\hbar=1$ 。

如前所述，霍金辐射的发现揭示了黑洞带有温度和熵的现象，但是也正是由于存在这样的辐射，任何黑洞都会逐渐丢失质量，也就是必然会逐渐蒸发。紧接着，在1976年霍金发表的文章<sup>[1]</sup>中，他考虑了黑洞蒸发带来的问题。他表示如果黑洞最后完全蒸发了，我们就丢失了形成黑洞的最初那些物质的所有信息。而根据量子力学的基本原理，这意味着如果黑洞最开始由纯态形成，到了其完全蒸发之后，我们得到的是一个混合态。你可能会好奇为什么信息不能被辐射的粒子一点点带出来呢？因为霍金辐射完全是黑体辐射，除了温度，它们所具有的完全是随机的信息，或者说霍金辐射本身并不携带任何信息。这

也似乎意味着在黑洞蒸发之后，收集这些热辐射并不能重构出最开始形成黑洞的那些物质的信息。而这个关于黑洞是否丢失信息的问题在后续的讨论中就逐步被统称作“黑洞信息佯谬”。

霍金的文章发表之后，众多物理学家显示出极大的分歧，也相应提出了各种不同的方案来支持或解决黑洞信息问题。绝大多数的想法可归纳为以下3种可能：

(1)信息丢失：就像霍金预言的那样，在黑洞蒸发过程中量子态可以从纯态演化到混合态，信息在这个过程中丢失了。值得注意的是，这意味着物理学家渴望的量子引力在黑洞蒸发的末期与量子力学的基本原理相违背；

(2)信息守恒：霍金辐射会逐渐将黑洞初态的信息释放出来，并且在黑洞蒸发的最后回到纯态，所以信息在这整个过程中是守恒的；

(3)蒸发残余：黑洞并不会完全蒸发，在它蒸发到一个普朗克尺度大小(普朗克长度约为  $1.6 \times 10^{-35}$  m)后，量子效应变得尤为重要，使得黑洞停留在这个微小的尺度上，所有的信息都可以保留在这个微观物体中。

## 2 佩奇曲线

在众多寻求黑洞信息佯谬的解释中，一直以来都缺乏强有力的计算来支持结论，因为问题似乎依赖于在黑洞蒸发晚期量子引力的显著影响。这导致擅长运用公式描述物理的理论物理学家在黑洞信息问题上缺乏有效的手段来量化问题。在霍金提出信息问题之后的二三十年间，似乎一直看不到解决问题的希望。物理学家越来越相信黑洞信息问题的解决要依赖于最终的量子引力的发现，对黑洞信息问题的追逐被认为是间接理解量子引力的最佳方式。

就像众多被黑洞信息问题困扰的物理学家一样，霍金曾经的学生佩奇(Don Page)也一直在思考这个问题的答案。然而，与他的导师想法不同的是，佩奇认为信息是可以从黑洞蒸发过程中逃逸出来的。但是这如何实现呢？就像前文所说，霍金辐射本身不携带任何信息，所以即使收集所

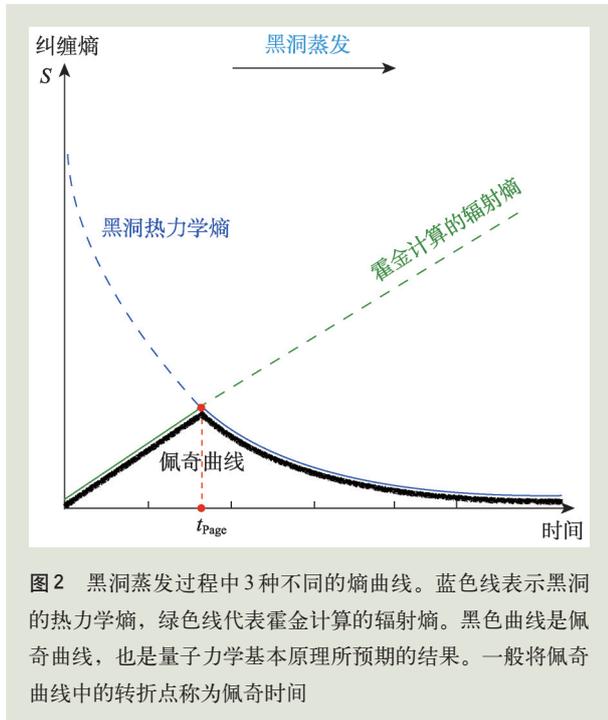


图2 黑洞蒸发过程中3种不同的熵曲线。蓝色线表示黑洞的热力学熵，绿色线代表霍金计算的辐射熵。黑色曲线是佩奇曲线，也是量子力学基本原理所预期的结果。一般将佩奇曲线中的转折点称为佩奇时间

有的霍金辐射，我们似乎也无法重构“那本百科全书”。但是佩奇认为一个不能忽视的重要量子效应是量子纠缠。虽然霍金辐射本身似乎没有任何信息，可是它们在整个系统中却一直和黑洞内部的粒子(回忆一下，霍金辐射是一对真空涨落产生的正反粒子之一)相互纠缠，导致黑洞辐射的量子可以携带信息从黑洞中逃逸出去。描述两个系统之间量子纠缠强弱的一个有效度量是量子纠缠熵  $S_{EE}$ ，也就是一个子系统代表的混合态所具有的冯诺伊曼熵(von Neumann entropy)。粗略来讲，可以认为混合态由一个矩阵  $\rho$  描述， $\rho$  一般被称为密度矩阵。这样一个密度矩阵的冯诺伊曼熵则可以定义为

$$S_{EE} = -\text{Tr}(\rho \log \rho), \quad (2)$$

其中  $\text{Tr}$  表示求迹，也就是对矩阵的所有对角元素求和的操作。冯诺伊曼熵拥有许多漂亮的性质，例如，冯诺伊曼熵对于纯态一直为零，对于混合态一直大于零；如果两个混合态可以组成一个纯态，那它们的熵相等，这两个子系统也被称为是互补的。

当黑洞形成，蒸发开始后，外部的霍金辐射和内部的配对粒子之间的纠缠熵从零开始逐渐增

加，直到黑洞完全蒸发而相应的纠缠熵也达到一个极大值。这就是霍金计算得到的结果，对应于图2中的绿色线。另一方面，我们知道黑洞的热力学熵如公式(1)所示，是按照面积律变化。随着黑洞不断辐射，面积不断变小，自然可以发现黑洞的热力学熵逐渐减小，这就是图2中蓝色曲线所代表的结果。需要强调的是，热力学熵是一种粗粒化(coarse grained)的描述，并不完全等价于冯诺伊曼熵。与之对应的冯诺伊曼熵则是一个细粒化(fine grained)的度量，来自于量子态精细的微观结构，也就是密度矩阵。但是，热力学熵仍然扮演着极为重要的作用。在半经典近似中，我们可以认为粗粒化的热力学熵是所有可能的细粒化熵的上界。也就是说，黑洞热力学熵一定不会小于对应的细粒化熵。如果相信黑洞和外部的霍金辐射组成的系统一直是纯态，没有丢失信息，那么应该可以发现，这两个纠缠的系统有一样的冯诺伊曼熵。所以，量子力学要求如下的关系：

$$S_{\text{black hole}} \geq S_{EE}(\text{黑洞}) = S_{EE}(\text{霍金辐射}). \quad (3)$$

然而这样的普适性质似乎在图2的曲线中被破坏了，因为在黑洞蒸发的过程中，到达某一个时间点后，黑洞的热力学熵竟然会小于霍金计算的辐射熵。

不同于在黑洞蒸发末期才出现的黑洞信息佯谬，佩奇认为在黑洞蒸发的中间过程，矛盾的结果已经产生。进一步，佩奇在1993年的研究中发现<sup>[5]</sup>，如果从量子力学的么正演化出发，允许黑洞在蒸发中释放而不丢失信息，那么辐射或者黑洞的纠缠熵应该满足另一条不同的曲线，如图2中的黑色曲线所示。在蒸发的早期，纠缠熵符合霍金的预期应该逐渐增加，而在某一个时间之后(一般称为佩奇时间)，纠缠熵开始递减至零，就像热力学熵所描述的那样。而这样一条佩奇曲线可以认为是量子力学基本原理所预期的结果，也就是黑洞不丢失信息时应该产生的结果。佩奇的计算给解决黑洞信息佯谬指出了一条明确的出路，那就是计算纠缠熵。可是，理想总是美好的，现实却没有那么简单，尤其在还没有一个完备的量子引力情况下。因为冯诺伊曼熵的定义显然依赖密度矩阵的形式，而这是一个完全量子力

学的概念，即便是在半经典近似中，都无法精确定义霍金辐射或者黑洞的密度矩阵。这样的困难也导致在佩奇曲线提出之后的近30年中，对这条重要曲线的计算一直缺乏明确的进展。

虽然佩奇的曲线给出了与量子力学幺正性兼容的量子引力所应预期的结果，可是为什么物理学家偏爱寻找这样的结果，而不是其他可能方案，例如承认信息丢失呢？量子引力中的幺正性或者黑洞不丢失信息的一个强有力的证据来自全息对偶的发现。

### 3 马尔达西那的 AdS/CFT 对偶

前文介绍了黑洞热力学熵，即黑洞熵和视界面积的关系。这样一个面积律暗示，如果把黑洞看作一个量子系统，黑洞内部的全部信息似乎通过类似投影的方式投射在了低一个维度的全息面上，亦即黑洞的表面，事件视界。1994年，作为弦论早期创始人之一的萨斯坎德(Leonard Susskind)受到黑洞热力学的启发，并结合霍夫特(Gerardus 't Hooft, 荷兰理论物理学家, 1999年获得诺贝尔物理学奖)的早期想法提出了全息原理<sup>[6]</sup>。他猜测量子引力或弦论中一个  $d$  维的空间中，量子态的所有信息可以等价地编码于其边界上  $(d-1)$  维的面上，就像全息投影一样。

萨斯坎德的全息原理，描绘了一种宏伟的令人着迷的可能性，却也似乎更接近于猜想。直到1997年末，一篇影响深远的文章打开了量子引力的新大门<sup>[7]</sup>。故事的主角是出生在阿根廷，当时年仅29岁的物理学家马尔达西那(Juan Maldacena)和他的 AdS/CFT 对偶。当时刚刚在哈佛获得副教授的马尔达西那发现，超弦理论中一个5维弯曲时空(另外还有5维空间是紧致化的)中的引力理论和其边界上一个不含有引力的4维时空中的量子场论是完全等价的。在后续的研究中，马尔达西那的发现被逐渐推广为

AdS <sub>$d+1$</sub> /CFT <sub>$d$</sub>  对偶，其中左边的 AdS 代表一个标量曲率为负数的  $(d+1)$  维时空，即反德西特(anti-de Sitter)时空，而右边的 CFT 则代表等价的  $d$  维时空中的共形场论(Conformal Field Theory)。AdS/CFT 对偶这样一个高维引力理论与其边界上低维量子理论的等价恰恰完美地实现了全息原理的思想，如图3所示。值得注意的是，反德西特时空的无穷远边界有着完全不同的结构，就像是一堵无形的墙(图3(a)中的蓝色线)。这是由于 AdS 时空中的曲率为负数，所以相较于我们生活的宇宙，AdS 更像是一个放在瓶子中的宇宙。

AdS/CFT 的魅力不仅仅是实现了全息原理，更重要的是它提供了一种全新的工具来研究量子引力或者量子场论。因为对偶的两边是完全等价的，这意味着任意一边的物理现象都应该可以等价地被另一边所描述。当你发现对某一边的理论研究寸步难行，它却可能在其对偶的理论中很容易实现。这也是为什么 AdS/CFT 可以成为近20年来理论物理领域最强大工具的原因。

回到黑洞信息佯谬本身，虽然物理学家对黑洞信息的命运充满争论，可是如果我们考虑一个 AdS 中黑洞的演化，等价地，这一演化应该可以在边界 CFT 中被等效地描述。虽然不知道完整的量子引力是什么，CFT 却是基于量子力学的量子场论。这意味着在边界 CFT 中信息是不会丢失的。运用 AdS/CFT 对偶，我们很自然得到 AdS 时空中的答案：信息不会丢失，黑洞的演化也一定是和量子力学的基本原理兼容的。然而，AdS/CFT 提

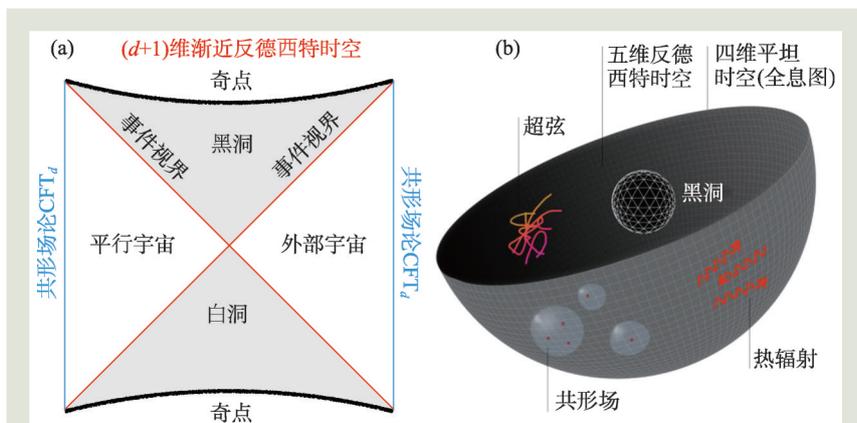


图3 (a)含有永恒黑洞的  $(d+1)$  维反德西特时空的彭罗斯图。在时空无穷远的边界，即蓝色线所代表的区域，含有  $d$  维共形场论；(b) AdS/CFT 示意图(图片作者 Alfred Kamajian)

供的只是答案本身，而且也仅限于满足全息原理的引力理论。更一般地，我们仍然不能直接计算霍金辐射的纠缠熵。

#### 4 Ryu—Takayanagi 的全息纠缠熵

不同于计算霍金辐射的纠缠熵，对一般量子场论纠缠熵的全息计算最先迎来了突破，而其中的核心就是 AdS/CFT。纠缠熵，作为量子纠缠的度量，长期以来一直是量子信息领域极为重要的研究对象。类似于两个纠缠的量子比特，我们可以考虑存在于一个空间内的量子场论，将其分成 A, B 两个子区域，如图 4 中蓝色和红色区域所示。A, B 两个子区域所对应的量子态也是相互纠缠的。但是与量子比特组成的有限维体系不同的是，量子场论中的体系一般是无穷维的。这样的差异，也导致无法通过定义密度矩阵的方式直接计算量子场论体系中的纠缠熵。

依据 AdS/CFT 的思想，如果考虑一个对偶于 AdS 时空的量子场论，那么应该可以通过引力理论的计算得到边界上 A, B 区域之间的纠缠熵。对全息纠缠熵的突破来自于两位日本物理学家，笠真生(Shinsei Ryu)和高柳匡(Tadashi Takayanagi)。2006 年，他们在物理评论快报(PRL)上发表了一篇 5 页的文章<sup>[8]</sup>，Ryu 和 Takayanagi 猜测，边界量子场论中的 A, B 区域之间的量子纠缠熵等价于高一维的引力理论中最小面的面积，亦即

$$S_{EE} = \text{Min} \left[ \frac{\text{Area}}{4G_N} \right], \quad (4)$$

其中 Area 表示“体”中一个面的面积，而

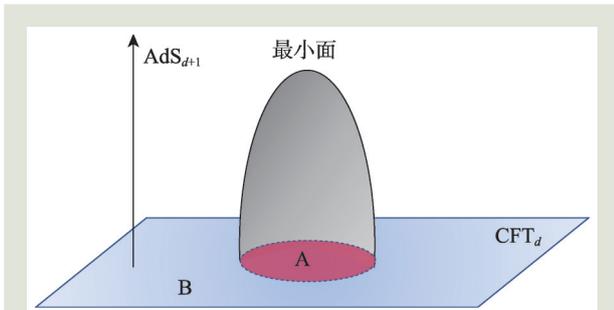


图 4 Ryu—Takayanagi 的全息纠缠熵。边界上红色子区域 A 的纠缠熵可以被 AdS 中一个以 A 为边界的最小面的面积描述

“Min”表示寻找所有以子区域 A 为边界的面中面积最小的那一个，而这个拥有最小面积的特殊面也被称为最小面。细心的读者应该发现，Ryu 和 Takayanagi 所提出的猜想非常类似黑洞的热力学熵，只是这里计算的不再是黑洞视界的面积，而是最小面的面积，当然具体最小面的位置依赖于所选取边界上子区域 A 的大小、位置、形状等细节。因为后续的研究中，这个猜想被基本证明(忽略次一级的小修正)，所以一般把这个几何化的公式叫做 RT 公式。RT 公式的美妙之处不仅是将边界场论中对纠缠熵的计算转化成“体”中一个简单的面积公式，更重要的是联系了量子信息与时空几何，而这也成为了“*It From Qubit*”<sup>[9]</sup>研究计划的开端。

与黑洞熵类似的是，RT 公式所描述的纠缠熵也是一个非常大的量，因为分母上的牛顿常数描述了引力理论中的耦合强度，是一个非常小的参数。虽然 RT 公式通过了许多检验，可是很容易理解它其实只给出了领头阶的结果，而忽略了次级的修正项。从一个完整量子引力的角度出发，RT 公式的结果其实只依赖于时空的经典几何，这意味着它忽略了量子修正的微小贡献。于是在 2013 年，福克纳(Thomas Faulkner)、莱科维奇(Aitor Lewkowycz)和马尔达西那指出<sup>[10]</sup>，RT 公式忽略的下一级修正正是来自于最小面所包裹区域内的那些量子场所产生的冯诺伊曼熵。为了区别，包含了量子修正的纠缠熵被称作广义熵。更进一步，恩格哈特与沃尔(Aron C. Wall)在 2014 年发现<sup>[11]</sup>，除了考虑量子修正的影响，也需要考虑广义熵对最小面的影响。因为真正需要计算的面积不再是面积最小的面，而是使得广义熵最小的那个特殊面，也称之为量子极端面。就像名字所显示的那样，我们可以认为最小面只是量子极端面在经典极限下的近似。总结来说，可以把恩格哈特与沃尔所提议的半经典的广义熵公式表述为

$$S_{\text{gen}} = \text{Min}_X \left\{ \text{Ext}_X \left[ \frac{\text{Area}(X)}{4G_N} + S_{\text{vN}} \right] \right\}, \quad (5)$$

其中等式右边除了第一项面积，第二项表示来自极端面到边界之间子区域内所有量子场贡献的冯诺伊曼熵，可以看作是微小的量子修正项。为了

显示量子极端面的特殊性，我们将其分成两步，第一步“Ext”表示需要发现极端面 $X$ ，使得这些面上的广义熵都处于极端值中；第二步，在所有极端面 $X$ 中，“Min”表示寻找其中使得广义熵最小的那一个。值得强调的是，虽然第二项相比于领头阶的面积项只是一个极其微小的量子修正，但是仍然可以导致量子极端面偏离最小面非常远。而这也是解决黑洞信息佯谬，获得佩奇曲线的关键。

## 5 蒸发黑洞的玩具模型

前面的内容已经介绍了计算纠缠熵的基本工具，至少在AdS时空中，看起来应该可以检测一个蒸发黑洞的熵是否真的满足佩奇曲线了。可是问题却没有那么简单。虽然在AdS时空中，可以借助强大的AdS/CFT作为工具，可是与现实时空或者渐近平直时空不同的是，AdS时空的边界就像是一堵无形的墙，可以将辐射不停地反射回AdS时空中，这导致无法在AdS时空中实现黑洞从形成到蒸发的过程。例如图3(a)显示了AdS时空中黑洞的彭罗斯图，这样的黑洞也被称为永恒黑洞，因为即使经过无穷的时间之后，黑洞也依然存在着，并维持着同样的温度。

如何在AdS时空中构造一个温度不断减小的蒸发黑洞呢？答案其实非常简单：将黑洞放在一个冰箱里，使其不断降温。最先实现这样构造的是阿尔姆海里、恩格哈特、马洛夫(Donald Marolf)、麦克斯菲尔德(后面简称AEMM)。他们在2019年5月的一篇文章中<sup>[3]</sup>，考虑在二维引力理论中，通过将右侧的黑洞与半个平直时空相粘贴，构造了一个完全可解的二维蒸发黑洞模型(图5)。这相当于将AdS右侧的边界打开，因为黑洞是具有一定温度的，而右侧无引力区域(“冰箱”)的温度为零，所以根据热平衡，很容易发现黑洞会通过向右侧时空不断释放霍金辐射而不断蒸发，不断降温。当然，更为重要的是AEMM的计算发现，通过量子极端曲面计算黑洞的熵，得到的曲线就是佩奇所预言的曲线。在经过佩奇时间之后，他们的结果显示熵不再增加，而是不断

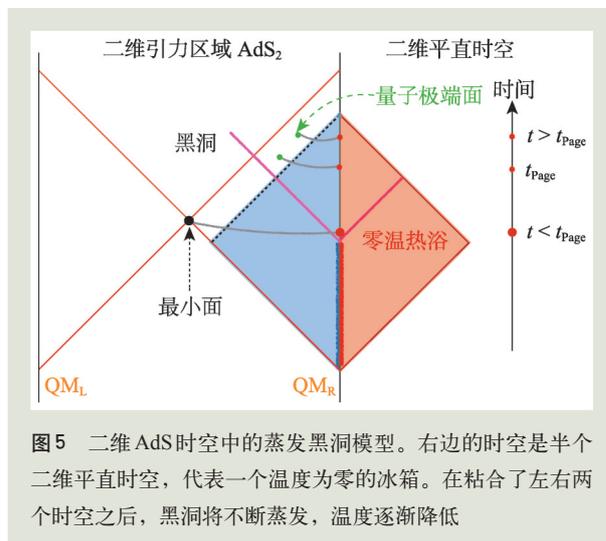


图5 二维AdS时空中的蒸发黑洞模型。右边的时空是半个二维平直时空，代表一个温度为零的冰箱。在粘合了左右两个时空之后，黑洞将不断蒸发，温度逐渐降低

减小。在忽略量子修正时，面积项的贡献来自最小面，如果一直使用最小面计算熵，最后得到的就是图2中霍金发现的结果：熵随着时间增加。但是AEMM发现，量子极端面只在早期和最小面重合，在黑洞蒸发过程中，会在某一时间之后跳跃到另一个面上，亦即图5中绿色区域所表示的面。通过量子极端面，他们发现蒸发黑洞的熵在经过这次转变之后开始随着时间减小，就像佩奇所预言的曲线那样。这意味着，AEMM模型中蒸发黑洞经历的演化其实是符合量子力学要求的么正演化，黑洞内部的信息可以逃逸出来，蒸发的黑洞并不会丢失任何信息。所以，霍金的黑洞信息佯谬已经有了明确的答案。在AEMM文章出现的同时，斯坦福大学的博士生彭宁顿也意识到了广义熵和量子极端面在黑洞蒸发中的重要作用。于同年同月独自发表的文章中<sup>[2]</sup>，他通过研究高维渐近平直AdS时空中的蒸发黑洞也得到了与AEMM类似的想法和结论。

## 6 量子极端孤岛

虽然在AEMM的模型中，实现了对二维AdS蒸发黑洞的熵计算，但是一个悬而未决的问题是，如何计算霍金辐射的纠缠熵。另外，读者也很容易意识到，AEMM模型是建立在AdS/CFT之上的，所以整个系统本身就暗含了么正性。在没有AdS/CFT的渐近平直时空，或者类似现实宇宙

的渐近德西特时空中，黑洞信息问题又该如何解决呢？

这些问题很快就得到了解答。在2019年8月紧接着AEMM的文章，阿尔姆海里和同样在普林斯顿高等研究院的马哈詹(Raghu Mahajan)、马尔达西那和赵颖(Ying Zhao)合作提出<sup>[12]</sup>，可以通过一个类似广义熵的、被称为“孤岛公式”(Island formula)的式子来计算霍金辐射的纠缠熵：

$$S_{EE}(\text{辐射}) = \text{Min}_X \left\{ \text{Ext}_X \left[ \frac{\text{Area}(X)}{4G_N} + S_{vN}(\text{辐射} \cup \text{孤岛}) \right] \right\}, \quad (6)$$

其中领头阶是孤岛边界的面积项，类似爱因斯坦引力中的贝肯斯坦—霍金熵，而第二项表示量子场的冯诺伊曼熵。这其中最为关键的是，量子修正部分中不仅仅考虑了辐射部分的贡献，同时也

需要考虑另一个完全孤立部分的熵：量子极端孤岛。他们提出的公式受到了黑洞广义熵的启发，其中量子极端孤岛的边界就是量子极端面，这也是量子极端孤岛的名字中前缀部分的由来。接下来让我们解释为什么这是一个“孤岛”。

考虑一个正在蒸发的黑洞，如图6所示。根据AEMM模型的经验，可以通过量子极端面来计算黑洞的广义熵，这其中量子修正部分的贡献来自黑洞外部区域(图6中的灰色区域)量子场的贡献。而当转而考虑霍金辐射的熵时，实际考虑的是与黑洞互补的部分。根据冯诺伊曼熵的互补性，这时需要考虑的熵来自与灰色区域互补的区域，即内部区域(图6中的红色区域)。而在蒸发中后期，由于量子极端面的出现，可以发现，这时内部区域包含了完全不相连的两片区域，其一是收集了霍金辐射的区域，另一部分则完全处于黑洞内部，也就是被称为量子极端孤岛的区域。正是由于量子极端孤岛与辐射区域完全不相连，就像是大海中的孤岛一般，这才因此得名。由于量子极端孤岛的出现，霍金辐射的纠缠熵开始随着时间递减，而不是霍金所计算的那样随时间逐渐增加。利用全新的孤岛公式，研究人员得以更正了霍金43年前计算中的不足，进而发现蒸发黑洞中霍金辐射的纠缠熵完全满足佩奇曲线。

虽然量子极端孤岛和黑洞外部的辐射区域没有任何连接，可是在黑洞蒸发的中后期却突然涌现在黑洞内部，并与外部的辐射相互纠缠。而这样一种物理图像(图7)恰好说明了一个更为激进的猜想：ER=EPR。早在2013年，萨斯坎德和马尔达西那猜测<sup>[13]</sup>，两个粒子之间的相互纠缠可以解释成两者之间通过一个虫洞相连。这个猜想的左边指的是爱因斯坦—罗森桥(Einstein—Rosen bridge)，亦即虫洞，而等式的右边是爱因斯坦—波多尔斯基—罗森(Einstein—Podolsky—Rosen)三人名字的首字母，暗指量子纠缠。ER=EPR猜想惊人地阐述了量子力学和时空几何之间的潜在联系。虽然猜想的证明似乎仍然遥不可及，但是神奇的量子极端孤岛的出现，从某种程度上正说明了ER=EPR的思想。更重要的是，虽然孤岛公式受到了全息理论中黑洞广义熵的启发，可是这个创新的公式却不依赖于AdS/CFT，而是可以推广

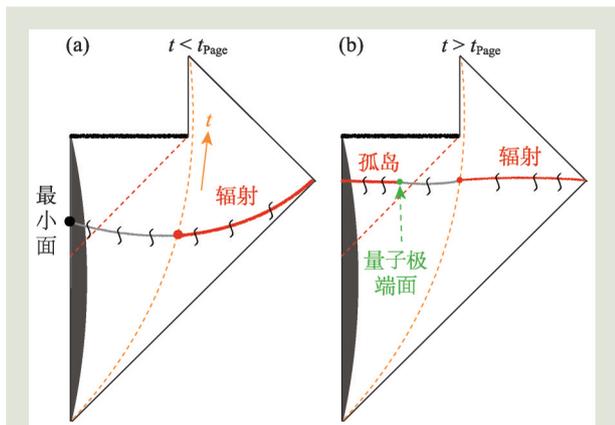


图6 一般的蒸发黑洞的彭罗斯图。黑色阴影区表示塌缩物质区域，黄色虚线表示截面，红色虚线代表黑洞视界 (a)蒸发的早期，佩奇时间之前，辐射纠缠熵不断增加；(b)佩奇时间之后，与辐射不相连的量子极端面出现在黑洞内部，辐射的纠缠熵随时间递减

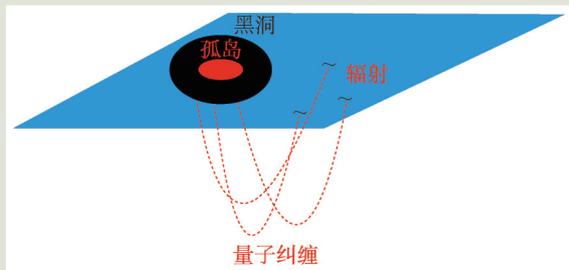


图7 虽然黑洞内的量子极端孤岛与辐射在它们所在的时空没有物理地连接在一起，可是却通过更高一维度的全息时空连接，类似于ER=EPR的思想

到更一般的与引力耦合的物质系统。在研究量子场论系统中的纠缠熵或者冯诺伊曼熵时，理论物理学家并不是按照公式(2)直接计算密度矩阵的迹，因为所遇到的将是一个无穷维的矩阵！一种标准的工具是通过将密度矩阵表示为路径积分形式，再利用“拷贝技术”(replica trick)和解析延拓来计算。等价地，公式(2)的定义可以写成

$$S_{EE} = \lim_{n \rightarrow 1} \left[ (1 - n) \partial_n \log(\text{Tr}(\rho^n)) \right], \quad (7)$$

这里的“拷贝”指的是并不直接计算公式(2)，而是在公式(7)中通过拷贝  $n$  个重复的部分，再取  $n=1$  的极限。一般来说，量子引力系统的路径积分无法准确地计算，而且在计算  $n$  个拷贝的路径积分中，也存在无数种不同的拓扑来连接  $n$  个部分。但是研究人员发现<sup>[14, 15]</sup>，如果将  $n$  个拷贝完全连接则可以得到与量子极端面相同的答案。而霍金曾经的计算方式则类似于只考虑完全不相连的那一种可能。这样，量子极端面，或者量子极端面孤岛的出现，可以解释成在路径积分中不连通相到连通相之间的转变。这样一种全新的鞍点也被称为“拷贝虫洞”(replica wormhole)。更一般地，研究人员还可以在2维引力下得到考虑了所有可能的连接  $n$  个部分的平面拓扑求和后的结果<sup>[15]</sup>，通过解析的求解施温格—戴森方程(Schwinger—

Dyson equation)，得到精确的佩奇曲线行为，并发现在佩奇转变发生的地方，熵有一个较大的修正使得转变是连续过渡的。感兴趣的读者可以进一步参考文献[14—16]。

## 7 黑洞信息佯谬被彻底解决了吗？

通过这一系列的工作，霍金的黑洞信息佯谬或许不再被称为佯谬。在蒸发黑洞中，物理学家终于实现了佩奇曲线的计算，不仅仅是对黑洞熵，还有霍金辐射的纠缠熵。这意味着争论了半个世纪的问题有了明确的答案：黑洞蒸发过程中，信息会被释放出来，正如量子力学要求的那样，没有任何信息的丢失。在成功的同时，也伴随着许多争论与困惑。比如，虽然么正性是量子力学的基本要求，但是至今所有的讨论都局限于半经典的引力理论。为什么在半经典理论中仍然可以看到么正性，这本身是一种“奇迹”，却似乎也是一个问题。另一方面，物理学家对信息从黑洞逃逸的方式仍然是一无所知，对于霍金辐射所代表的量子态也依然一无所知，对黑洞蒸发的末期也缺乏有力地预言，而这些或许我们很快就会得到答案，或许只有等到量子引力被发现的那一天，所有问题的答案才会逐渐浮出水面。

### 参考文献

- [1] Hawking S W. *Physical Review D*, 1976, 14(10): 2460
- [2] Penington G. *Journal of High Energy Physics*, 2020, 2020(9): 1
- [3] Almheiri A, Engelhardt N, Marolf D *et al.* *Journal of High Energy Physics*, 2019, 2019(12): 63
- [4] Hawking S W. *Communications in Mathematical Physics*, 1975, 43(3): 199
- [5] Page D N. *Physical Review Letters*, 1993, 71(23): 3743
- [6] Susskind L. *Journal of Mathematical Physics*, 1995, 36(11): 6377
- [7] Maldacena J. *International Journal of Theoretical Physics*, 1999, 38(4): 1113
- [8] Ryu S, Takayanagi T. *Physical Review Letters*, 2006, 96(18): 181602
- [9] <https://www.simonsfoundation.org/mathematics-physical-sciences/it-from-qubit/>
- [10] Faulkner T, Lewkowycz A, Maldacena J. *Journal of High Energy Physics*, 2013, 2013(11): 74
- [11] Engelhardt N, Wall A C. *Journal of High Energy Physics*, 2015, 2015(1): 73
- [12] Almheiri A, Mahajan R, Maldacena J *et al.* *Journal of High Energy Physics*, 2020, 2020(3): 1
- [13] Maldacena J, Susskind L. *Fortschritte der Physik*, 2013, 61(9): 781
- [14] Ahmed A, Hartman T, Juan M *et al.* *Journal of High Energy Physics*, 2020, arXiv:1911.12333
- [15] Penington G, Shenker S H, Stanford D *et al.* *Replica wormholes and the black hole interior*. 2019, arXiv preprint arXiv:1911.11977
- [16] Almheiri A, Hartman T, Maldacena J *et al.* *The entropy of Hawking radiation*. 2020, arXiv preprint arXiv:2006.06872

# 安捷伦科技

## HGC-536 便携式真空计套装



支持多种单位,可记录压力曲线

Micro USB 和 5 号电池双电源供电

带背光 LED 显示屏

经济耐用可替换的全金属热电偶真空规管

带磁铁和支架,可吸可立,使用方便

带柔软垫层的手提箱,坚固耐用,方便运输、携带

柔软橡胶保护套,握感舒适,皮实耐摔



安捷伦科技(中国)有限公司 真空产品热线:  
800 820 6778 (固定电话拨打) 400 820 6778 (手机拨打)

了解更多,请扫描左侧二维码阅读介绍文章,或登陆安捷伦官方网站:[www.agilent.com](http://www.agilent.com)  
(搜索“HGC-536”)。