

# 黑体辐射公式的多种推导及其在近代物理构建中的意义(I)

曹则贤

(中国科学院物理研究所 北京 100190)

## Derivations of black-body radiation formula and their implication to the formulation of modern physics

CAO Ze-Xian

(Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**摘要** 黑体辐射是近代物理史上只会下金蛋的鹅，是近代物理的摇篮。黑体辐射研究的意义还在于这是唯一一个涉及  $c$ ,  $k$ ,  $h$  三个普适常数的物理情景。黑体辐射谱抗测量误差的特性带来了辐射标准和绝对温度参照，谱分布公式对模型的不敏感则使得黑体辐射成为独特的物理研究母题。黑体辐射谱分布公式，普朗克多角度推导过，德拜推导过，艾伦菲斯特推导过，劳厄推导过，洛伦兹和庞加莱深入讨论过，泡利推导过，玻色推导过，爱因斯坦在 20 多年的时间里多角度推导过且产出最为丰硕，近代还有从相对论角度的推导，每一个角度的推导都带来了物理学的新内容，这包括量子力学、固体量子论、受激辐射、量子统计、相对论统计，等等。认真回顾黑体辐射研究的历史细节，考察其中的思想概念演化，不啻于体验一次教科书式的学(做)物理之旅，比如也可以尝试给出能量局域分立化的简单新证明。

**关键词** 黑体，黑体辐射，热辐射，空腔辐射，气体运动论，热平衡，不可逆过程，熵，绝对温度，基尔霍夫定律，斯特藩—玻尔兹曼公式，维恩位移公式，维恩谱分布，瑞利—金斯谱分布，能量均分原理，普朗克方程，普朗克函数，普朗克谱分布，振子，能量量子，不连续性，量子力学，作用量子化，相空间体积量子化，零点能，全同粒子，玻尔兹曼统计，光电效应，受激辐射，玻色—爱因斯坦统计，玻色—爱因斯坦凝聚，费米—狄拉克统计，热力学，电磁学，统计力学，量子，光子，涨落，波粒二象性

**Abstract** Black-body radiation, or Hohlraumstrahlung or Wärmestrahlung, is a duck that laid gold eggs in modern physics. In a sense it is the cradle for modern physics. The significance of black-body radiation lies in the fact that it is the only physical situation involving all the three universal constants, i.e.,  $c$ ,  $k$  and  $h$ . Being immune to experimental errors, it provides a norm for the radiators, and serves the standard for absolute temperature. The derivation of the spectral distribution formula sets an exemplar model for physics research. The correct spectral distribution formula has been derived by Planck, Debye, Ehrenfest, Pauli, Bose and Einstein based on various distinct assumptions in the early period of last century, and even derivations from the theory of relativity have been obtained in recent years, which lead to a lot of modern physics establishments such as quantum mechanics, the quantum theory of solids, stimulated emission of radiation, quantum statistics, relativistic statistics, etc. A detailed review of the study of black-body radiation problem brings us to a voyage through the legendary history of modern physics helping us get the feel of doing physics, for instance, the author was inspired to find a new simple proof for the necessity of radiation energy localization.

**Keywords** black-body, black-body radiation, heat radiation (Wärmestrahlung), cavity radiation (Hohlraumstrahlung), kinetic theory of gas, thermal equilibrium, irreversible process, entropy, absolute temperature, Kirchhoff's law, Stefan-Boltzmann's law, Wien's displacement law, Wien's spectral formula, Rayleigh-Jeans formula, energy equipartition, Planck's equation, Planck's function, Planck's spectral distribution

formula, oscillator/resonator, energy quantum, discontinuity, quantum mechanics, action quantization, phase space quantization, zero-point energy, particle identity, Boltzmann statistics, photo-electric effect, stimulated radiation, Bose-Einstein statistics, Bose-Einstein condensation, Fermi-Dirac distribution, thermodynamics, electrodynamics, statistical physics, quanta, photon, fluctuation, wave-particle duality

DOI: 10.7693/wl20211106

对相对论、量子力学的推崇源自对经典物理的无知。

——作者

**引子** 黑体辐射研究起源于十九世纪中叶的热辐射体和辐射标准研究，属于对工业应用需求的响应。从对实验结果之诠释——主要是普朗克谱分布公式——的论证引出了一系列新概念和新物理，包括量子力学、固体量子论、受激辐射、量子统计和玻色—爱因斯坦凝聚等，都是黑体辐射研究的直接结果。此外，这项研究还充实了热力学，带来了对光的本性的深入理解。鉴于黑体辐射的超强学术繁殖能力——这一点来自黑体辐射分布谱公式对模型的不敏感，可以说 black-body radiation is the matrix of modern physics (黑体辐射是近代物理之本)，或者说 black-body radiation is a goose that lays golden eggs (黑体辐射是一只会下金蛋的鹅)。关于黑体辐射的实验研究，除了维恩之外，还有柏林的物理技术研究机构的近代物理实验五杰。关于黑体辐射的理论研究，先后出场的物理巨擘，据不完全统计，有基尔霍夫、亥尔姆霍兹、斯特藩、玻尔兹曼、维恩、瑞利爵士、普朗克、洛伦兹、爱因斯坦、金斯爵士、艾伦菲斯特、庞加莱、纳坦松、德拜、劳厄、泡利、玻色等人，且各有建树。他们的研究方式之多样让人眼花缭乱，他们的研究手法之娴熟让人五体投地，他们的学术功底之深厚让人叹为观止。黑体辐射研究是近代物理研究方法的教科书，回顾这段波澜壮阔的历史，能让我们多少学会一些物理研究的真谛。

本文大致分为如下章节：

- 1 黑体与辐射的基尔霍夫定律
- 2 黑体辐射理论研究初步
- 3 黑体辐射谱测量
- 4 对维恩分布公式的质疑与瑞利—金斯公式
- 5 普朗克关于黑体辐射谱分布公式的三种推导

6 爱因斯坦的第一轮推导

7 洛伦兹的推导

8 金斯的坚持与转变

9 德拜的推导

10 艾伦菲斯特的推导

11 庞加莱的充要条件证明

12 劳厄的小插曲

13 泡利的推导

14 玻色的推导

15 爱因斯坦再次出场

16 玻色—爱因斯坦统计与费米—狄拉克统计

17 黑体辐射与相对论

18 浑身都是物理的普朗克谱分布公式

19 光是局域量子化存在的新简单论证

20 多余的话

初识黑体辐射问题于大学普通物理课上。在我拿到的那些光学、原子物理以及量子力学课本中，黑体辐射问题会在半页到两页不等的幅度上被轻描淡写地、略显随意地提过。普朗克被描述为一个拟合人家实验曲线的革命者(有点矛盾哈)，他最先引入了量子的概念从而开启了量子力学时代。然而，事实远不是这么回事儿。当我2008年读到一篇名为“Max Plack——Revolutionär wider Willen”(普朗克——违背意愿的革命家)的文章时，我才知道1900—1901年期间普朗克到底推导了什么，以及接下来二十多年里，即到1924年Quantenmechanik(量子力学)一词出现，他自己的心理历程。我慢慢地才知道，黑体辐射问题是近代物理的摇篮，一批物理巨擘们通过对这个问题的研究为我们带来了近代物理之大部，包括量子力学、量子统计、固体量子论等近代物理分支，对光之本性的深刻认识，以及受激辐射这

个激光的基础概念，此外还有化学势、零点能等关键概念。回顾黑体辐射的研究历程会是一个不可多得的近代物理研究方法论课程，我深信“*It is always very useful to get acquaintance with the development of original ideas and methods—even if some had led to dead ends or detours (熟悉原始思想与方法的发展历程，尽管它们有些走了弯路或者进入了死胡同，总是非常有用的)*”。本文中，我将循着物理大师们的原初路径，试着就黑体辐射问题找到一些深刻的洞见。我希望，本文会是一篇物理学思想史研究的范文，虽然我知道这是奢望。特别地，我希望通过撰写此文的实践支持我一贯的观点：物理学史是物理这门学问的历史。物理学史研究天然地关注物理自身并致力于襄助物理学的发展与传承。

我设想读者都和我一样思维不是那么敏捷，因此本文中我会尽可能多地关注一些细节和逻辑联系。此外，遇到值得击节赞叹处我还会偶尔在括号里加上一句半句的感慨，请读者原谅我这没见过世面的样子。因为笔者水平有限，对本文提到的诸多关键文献其实并没有认真阅读以领会其精妙处，故文中难免存在诸多学术性瑕疵和技术性缺陷。我自己可能需要一段时间才能注意到其中的问题，未来我会在重新阅读思考以后再回头增补、修订。懂物理的朋友们自然能轻松识别出这些瑕疵与缺陷，引用时自行改正过来就好；随便抄袭本文者可能会闹笑话，一朝露馅要勇于自认倒霉，勿谓言之不预。

本文中我会故意穿插使用涉及到的物理巨擘姓名和关键概念的西文拼法与相应的汉译，其基本原则是方便读者迅速过渡到西文文献。同黑体辐射具体研究(者)相关的文献或者针对性特别强的文献会直接加在文内，方便我的叙述也方便读者的查询(其实是为了避免改造为某种特殊的格式却被弄得面目全非)，文后附有更多的一般性参考文献。然而，由于某些原始文献不易找到，因此还是有很多遗漏处。所有的英语文献会原封不动地呈现；对于非英文文献，我会将文章名或者书名译成汉语。此外，本文没有统一物理量的符号，而是尽可能地忠实于原文，请读者注意。

## 1 黑体与辐射的基尔霍夫定律

光是人类同远方唯一的连接，光是第一物理对象和工具。光与物质间的相互作用天然地是物理学的主题。当一束光照射到一块物体(假设是固体，不发光——这个说法在学过黑体辐射以后会发觉不对)上时，光会被反射、吸收(可能还引起再发射)，一部分会透过去。对于普通的物体，如果其对可见光(波长约在390—780 nm之间)的透过率和反射率足够小，它就会给人以黑色的印象。不透可见光意味着材料对可见光有强烈的吸收，则材料的能隙要小于1.5 eV，或者其等离激元频率要高于 $4 \times 10^{14}$  Hz。常见的无定形炭对可见光有强烈的吸收，是黑的，故有炭黑一说(可见光吸收率可达0.96)。炭的一种 $sp^2$ -键结合的晶体，石墨，其带隙约为-0.04 eV，为半金属，对红外光全面地强烈吸收，因此它更黑。但是，石墨晶体对可见光有强烈的反射，故高品质的石墨晶体有金属光泽(图1左)。近年来超黑材料(superblack materials)的研究方兴未艾，其关键是把窄带隙材料的表面加以无序化、粗糙化以消除反射。当前所获得的超黑材料，比如黑硅，对可见光的反射率已几乎为零，其黑色艳得邪恶(图1右)。

经验告诉我们，物体吸收了光，就会变热。中国北方的人们冬天喜欢晒太阳，而且知道穿黑棉袄、黑棉裤取暖效果比较好。据信法国物理学家菲涅尔(Augustin-Jean Fresnel, 1788—1827)针对牛顿在*Opticks*(光学)一书中表达的“作为颗粒的光穿越充满热介质的空间畅通无阻”的观点(好像书里面没有这个观点。牛顿冤枉)曾反驳道，光



图1 不同程度的黑。左图：几乎不透光但反光的石墨晶体；右图：恐怖的超黑材料

照下的物体其热会无限增加[Charles Coulston Gillispie, *The Edge of Objectivity: An Essay in the History of Scientific Ideas*, Princeton University Press (1960)]。然而,一个物体如何能容纳其吸收的无穷多的热呢?吸收光的物体,其温度不会总升高吧?如果是这样,只要照射时间足够长,弱光也能把一块物体给汽化了。1858年,苏格兰物理学家斯图尔特(Balfour Stewart, 1828—1887)发现,涂上灯黑(lamp-black,用今天的话说,是微米炭颗粒沉积物)的表面能吸收所有照射其上的光,因而同其他表面相比具有最大的光吸收能力,但它同时也拥有最强的光发射能力。可惜,斯图尔特逻辑能力不强,未能抽象出一个普适性原理:存在(哪怕是仅存在于想象中)一个普适的具有最大光吸收——当然也是最大光发射——能力的表面,此事儿与光波长和温度无关。但是,斯图尔特用射线的反射与折射(遵循Stokes—Helmholtz的reciprocity principle,互反原理<sup>1)</sup>)来讨论他的实验结果。他得到了一个重要结论,就是在一个处于热平衡的、不管是什么材料做成的空腔里,从内壁任何部分辐射的热与灯黑的辐射相同[Balfour Stewart, *An account of some experiments on radiant heat*, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 22, 1-20(1858); D. M. Siegel, Balfour Stewart and Gustav Robert Kirchhoff: two independent approaches to Kirchhoff's radiation

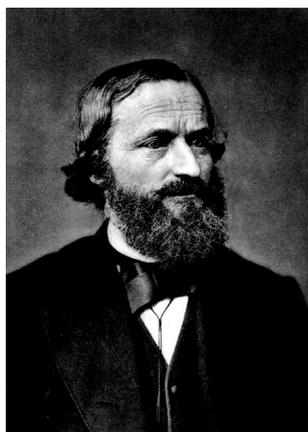


图2 基尔霍夫

law, *Isis* 67(4), 565-600(1976)]。

一般文献讨论黑体辐射会从基尔霍夫定律开始。基尔霍夫(Gustav Kirchhoff, 1824—1887,图2),德国物理学家,1847年毕业于柯尼希堡(Königsberg,现属俄罗斯)大学,1850—1854年

在布雷斯劳(Breslau,现属波兰)大学任教,然后转往海德堡大学,1875年转往柏林大学任理论物理教授。基尔霍夫研究电以及光谱,做出了奠基性的贡献,其中最值得称道的是他和本森(Robert Bunsen, 1811—1899)一起发明了光谱仪。1859年,基尔霍夫计算了无阻导线中电信号的速度,得出了电信号速度为光速的结论[Gustav Kirchhoff, *On the motion of electricity in wires*, *Philosophical Magazine* 13, 393-412(1857); P. Graneau, A. K. T. Assis, Kirchhoff on the motion of electricity in conductors, *Apeiron* 1(19), 19-25(1994)]。可惜,一般电学教材基本不谈论电力传播速度问题。

1859年,基尔霍夫在光谱研究中发现了(气体分子的)吸收谱线和发射谱线重合的现象。进一步地,基尔霍夫研究热平衡时固体腔内的热吸收与发射,发现对于给定的波长,发射能力与吸收率之比不依赖于具体的物体。热平衡下的辐射是各向同性的。辐射密度在各个方向都相同的发射体是Lambert发射体(命名来自Johann Heinrich Lambert, 1728—1777)。1860年,基尔霍夫提出了完美黑(vollkommen schwarze)的概念。对于那些能吸收所有照临其上的光的物体,“我将那样的物体称之为完全黑的,或者就简称为黑的(Ich will solche Körper vollkommen schwarze, oder kürzer schwarze, nennen)”。既不反射也不让辐射透过,那意味着对照临其上的光的完全吸收。黑体(black-body)一词,德语为schwarzer Körper或者Schwarzerkörper,由基尔霍夫在其1860年题为“论物体之热与光的发射能力和吸收能力之间的关系”的文章(p.277)中首先提出[Gustav Kirchhoff, *Über das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme and Licht*, *Annalen der Physik und Chemie* 109(2), 275-301(1860)]。一说是1862年基尔霍夫造了黑体辐射这个词。

黑体辐射,德语Schwarzkörperstrahlung,爱因斯坦喜欢用schwarze Strahlung(黑的辐射),见爱因斯坦1910的文章。爱因斯坦还曾用过腔体(Hohlkörper)而不是腔空间(Hohlraum)的说法,见

1) Reciprocity principle这个词儿很重要,笔者有长篇讨论,见“物理学咬文嚼字”078篇,《物理》,2016,45(7): 469。

爱因斯坦 1907 的文章。许多英文文献干脆就叫热辐射(thermal radiation, heat radiation)。基尔霍夫关于热辐射的定律可以表述为：“任何物体(做成的空腔)，其热平衡时的发射能力与吸收率之比是一个普适的、只依赖于温度的函数，该函数是完美黑体的特征。”用大白话说，就是好的吸收体也是好的发射体(Ein guter Absorber ist auch ein guter Emitter)。黑体的辐射谱密度与方向无关，与空腔辐射的谱密度相同(Die spektrale Strahldichte des Schwarzen Körpers muss daher von der Richtung unabhängig und mit der spektralen Strahldichte der Hohlraumstrahlung identisch sein)。基尔霍夫的发现，用公式可表示为在平衡条件下， $\int_0^\infty a_\lambda K_\lambda d\lambda = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda$ ，其中  $e_\lambda$  是物体的发射能力， $a_\lambda$  是物体的吸收系数，而  $K_\lambda$  是入射的辐射强度。平衡是针对所有波长的平衡，故  $a_\lambda K_\lambda = e_\lambda$ ， $K_\lambda = e_\lambda / a_\lambda$ 。所谓的基尔霍夫定律，即就是说平衡时的辐射强度谱分布函数  $K_\lambda$  是一个仅依赖于温度的简单函数，记为  $K_\lambda(T)$  或者  $K(\lambda, T)$ 。黑体辐射等价于热平衡时空腔的辐射，因此它应该纯粹是热的性质<sup>2)</sup>，而与空腔的体积、形状、材料无关。也就是说，黑体辐射语境中的黑是一种极限性质。在空腔内插入任何物体，不影响空腔辐射的物理，故有普朗克模型中有炭粉的说法；哪怕是壁的 absorption 为零的情形， $a_\lambda = 0$ ，也成立，故后来有黑体辐射模型用的是全由镜子组成的空腔<sup>3)</sup>、或者腔中有只对特别频率的光透明的薄片(请记住这一点)。基尔霍夫的证明上来就用热力学第二定律，而那时热力学第二定律是崭新的。基尔霍夫因此相信，黑体辐射的这个谱密度分布是一个简单函数。基尔霍夫认为找出这个函数算得上非常有意义的成就(crowning achievement)。当然了，他也非常明白实验上会有很多困难要克服。基尔霍夫是在海德堡大学研究光谱时得到了黑体辐射定律的，他后来把黑体辐射研究带到了柏林，黑体辐射研究最终在柏林结出了硕果。实际

情况是，在基尔霍夫定理提出后，经过 40 年的艰难探索，谱密度函数在 1900 年真地就被找到了。

基尔霍夫留下了如下与热辐射研究有关的著作：

(1) Gesammelte Abhandlungen (全集), Johann Ambrosius Barth (1882), 玻尔兹曼编辑。

(2) Gesammelte Abhandlungen: Nachtrag (全集增补), Johann Ambrosius Barth (1891), 玻尔兹曼编辑。

(3) Vorlesungen über mathematische Physik, 4 Bände (数学物理讲义, 四卷本), B. G. Teubner (1876—1894).

Band 1: Mechanik (卷一、力学), B. G. Teubner (1876).

Band 2: Mathematische Optik (卷二、数学光学), B. G. Teubner (1891).

Band 3: Electricität und Magnetismus (卷三、电与磁), B. G. Teubner (1891), 普朗克编辑。

Band 4: Theorie der Wärme (卷四、热论), B. G. Teubner (1894), 普朗克编辑。

注意，基尔霍夫的全集是玻尔兹曼(Ludwig Boltzmann, 1844—1906)编辑的，数学物理讲义第三、四卷是普朗克(Max Planck, 1858—1947)编辑的。玻尔兹曼和普朗克是接下来的黑体辐射研究的主角，进一步地是后来的统计力学的奠基人。什么是学术传承？这就是学术传承。学术传承的前提是有学术可供传承。

还有几个因素要注意到。其一，基尔霍夫 1860 年提出辐射定律的时候，克劳修斯(Rudolf Clausius, 1822—1888)刚提出熵概念不久(1852—1856 年间)。其二，那时候连麦克斯韦方程组还没呢，更不知道热辐射是电磁波。其三，在 1887—1888 年，德国的赫兹证实电磁有波的存在形式。热辐射、电磁波、熵，再加上玻尔兹曼在 1872 年和 1877 年提出的量子化的能量(在玻尔兹曼那里是分子动能)，未来这几个因素凑到一起就擦出大

2) 我瞎猜，超导、超流也是一种热力学现象，应参照黑体辐射研究历程加以研究才好。进一步地，它应该被当作一种极限现象，因而期待某种逻辑上的跳跃。

3) 镜子是个对特定的光波长成立的概念。哪有对全波长都表现为镜子的表面呢。

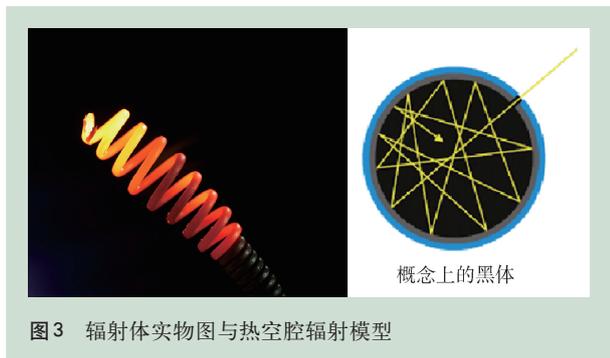


图3 辐射体实物图与热空腔辐射模型

火花了。

一个发光体，特征的物理量是它的发光能力及谱分布。室温下一般物体的热发射，人眼看不到，这时候无照明状态下的物体就是黑的。随着温度的升高，(黑色的)物体会逐渐变为灰色、暗红、亮红、黄色、白色、蓝白色(图3)。白色对应高温，故有白热化、白炽的说法。对铁匠铺里的炉子的粗略观察可以得出结论：随着温度升高，发光向短波长方向移动，光也变得更加强烈。黑体的辐射、热平衡时空腔的辐射，以及热平衡时有发射体的空腔的辐射，都应该表现出同样的谱特征。这是黑体辐射所涉及到的模型研究的思想基础。

顺带说一句，对应黑体还有白体(white body)的说法。对所有波长的电磁辐射都表现出零吸收

的假想物体被称为白体。不过关于何为黑，何为白，值得认真探讨一番。考察一块均匀的、表面光滑的固体，其对入射光的行为可以由透过率(transmission) $\tau$ 、吸收率 $\alpha$ 和反射率 $\rho$ 来表征， $\rho+\alpha+\tau=1$ 。所谓的黑体对应 $\alpha=1$ ， $\tau=0$ ， $\rho=0$ ；白体对应 $\rho=1$ ， $\alpha=0$ ， $\tau=0$ ；而透明物体对应 $\rho=0$ ， $\alpha=0$ ， $\tau=1$ 。不过，类似 $\rho+\alpha+\tau=1$ 这样的公式表达的是算术，而非真实的物理。反射率 $\rho$ 反映的是物体表面的性质，严格地说是界面的性质，吸收行为则是由材料的体性质(bulk property)和几何共同决定的，至于透过率，那只是 $\tau=1-\rho-\alpha$ 的算术结果。一块材料表面的吸收能力(absorptance)反映其吸收辐射能量的有效性，用吸收能量对入射能量之比来表示。如果考察光在物体中的传输，入射强度为 $I_0$ 的光，在距离 $d$ 处强度衰减为 $I_t$ ，透过率为 $T=I_t/I_0$ ，则 $-\ln T$ 就是所谓的absorbance。如果强度衰减只是由吸收造成的(不考虑散射)， $-\ln T=\mu d$ ，此处的 $\mu$ 就是吸收系数(absorption coefficient)，它是材料的本征体性质。由此看来，所谓的黑体是指表面的(等效)吸收能力(absorptance) $\alpha=1$ 的物体。由于考虑的是表面性质，其与具体的材料无关倒也合理。

(未完待续)

## 新书推荐

读者和编者

**内容简介：**《云端脚下》是一本视界垂直的书，讲述从一元二次方程、三次方程、四次方程到代数不可解的五次方程，引出复数与超复数、线性代数以及群论，最终成就了量子力学、相对论和规范场论的伟大历程，再现人类在数学和物理领域里三千余年的智慧结晶。这是一条从 $ax^2+bx+c=0$ 到 $F_{\mu\nu}=[D_\mu, D_\nu]$ 再到 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的铺满鲜花与荆棘的探索之路，每一个新时节的少年都不妨借此愉快地来一场挑战个人耐力与智力的朝圣之旅。

**推荐理由：**本书是中国科学院物理研究所曹则贤研究员的倾情之作。多年来，曹则贤研究员在从事物理研究的同时坚持从事物理教学和科学传播事业。本书是他的一个大胆尝试，试图给出从一元二次方程到规范场论的路线图，补足其间一些跳跃的细节，顺带讨论了拓荒者们的思想历程。特别地，书中包含了大量珍贵的原始文献。对于广大数学与物理爱好者、教育者来说，本书是一本极好的参考书。

