# 量纲分析和量纲制

郑伟谋[†]
(中国科学院理论物理研究所　北京　100190)

# Dimensional analysis and dimension systems

ZHENG Wei-Mou[†]
( Institute of Theoretical Physics，Chinese Academy of Sciences，Beijing 100190，China )

2021－10－28收到
† email：zheng@mail.itp.ac.cn
DOI：10.7693/wl20211202

**摘　要**　物理定律不依赖于测量单位的选择。量纲分析探讨这种不变性及其后果和应用。无纲量为单位变换下的不变量，物理规律最终必然只能用无纲量表达。从一个问题中的物理变量可构造出的无纲量数要少于原始变量数，带来简化，构造的无纲量可更深刻反映物理量间的内在关系。量纲概念足够深刻，但方法足够简单，应该是物理训练的重要内容。文章阐述量纲分析的基本概念、原理及其应用，大部分内容来自文献，着重讨论量纲制及其与单位制的关系，企图厘正文献中的一些混乱。特别指出，仅就量纲分析操作而言，可以只用MLT量纲制。

**关键词**　量纲，量纲分析，无纲量，量纲制

**Abstract**　Physical rules are independent of measuring units. Dimensional analysis explores such invariance, its outcomes and applications. Dimensionless quantities are the invariants under changes of units. Physical rules must ultimately be presented only in dimensionless quantities. The number of dimensionless quantities that can be extracted in a problem is less than that of the original variables, which results in simplification. The dimensionless quantities such extracted may deeply reflect the intrinsic relation among physical variables. The concept of dimension is profound, but its use is simple, so dimensional analysis should be an important section of physics training. Some fundamental concepts and principles involving dimensional analysis and its applications are expounded, including dimension systems and their relation to units systems. Examples are taken from the literature, where there is still some confusion, which I shall attempt to clarify. It is emphasized that, when applying dimensional analysis, we can just use the mass-length-time dimension system.

**Keywords**　dimension，dimensional analysis，dimensionless quantities，dimension systems

物理定律的对称性意味着物理定律在各种变换下的不变性。一个简单原理是物理定律不依赖于测量单位的选择。量纲是物理量不受单位变换而改变的品性，量纲分析探讨这种不变性及其后果和应用。一类特殊的物理量是无纲量，为单位变换下的不变量，物理规律最终必然只能用无纲量表达。从一个问题中的物理变量可构造出的无纲量数要少于原始变量数，带来简化，而且，无纲量可更深刻反映物理量间的内在关系。

量纲分析方法是探讨科学规律、解决科学和工程问题的一个普适工具，非常值得学习和掌握。量纲分析既可以用于实验设计和数据整理，也可以在求解问题前就对问题有个定量和定性的把握，且有助于加深对物理规律的认识。面对复杂问题时，建立数学模型可能非常困难，或者方程非常复杂难以求解，或者难以理解所得解的意义。有时需要做试验，而实际尺寸很难在试验条件中实现，必须缩小尺寸做模型试验，必须满足

一定的相似条件，这种条件必须建立在量纲分析和相似论的基础上。

量纲分析很难说是从何时开始的。Dimension一词，1833年泊松首先使用，在此之前用齐次性homogeneity。1822年傅里叶明确表述，物理定律应与单位无关，写在其名著《热的解析理论》(*Analytical Theory of Heat*)中[1]。这导致一个重要结论：任何有意义的定律，对于每一个计量单位都必须是齐次方程式。很多科学大师如牛顿、欧拉和麦克斯韦等用量纲的概念处理问题。1871年瑞利关于天空蓝色的解释和后来对风中绳弦发声的研究[2, 3]，1883年雷诺关于雷诺数的工作，都是量纲分析的早期范例。量纲分析的正规形式为Π-定理：如果一个物理关系含有$n$个独立变数与$m$个基本量纲，则它可用$n-m$个无量纲量表示。利用物理定律的量纲平衡(齐次)原理可确定各物理量之间的关系，从而从定性到半定量至定量地解决问题。未查到中文“量纲”的起源，“量纲分析”在日文中称为“次元解析”。关于量纲分析的文献很多，无法一一列举，如中文书[4，5，6]，最近又出了一本[7]，布里奇曼的英文书[8]是经典，稍晚的可举[9]，书中有丰富的文献和习题，还有[10]。

## 1　从一个故事和一个例子谈起

传统炸弹，通过在有限的空间里短时释放大量高温高压气体获得机械效能。原子弹是没有伴随气体的强爆炸点源，没人了解其机械效能，当时就有爆炸专家猜测原子弹威力没有期望的那么大。大家认为全英国只有一个人可以解决这个问题，他就是剑桥大学的泰勒(G. I. Taylor)教授。Taylor认为点源强爆炸瞬间释放巨大的能量$E$，将急剧地压缩和加温其周围的空气，使之以超声速的球形冲击波向外急速膨胀。他列出了问题的流体力学偏微分方程组，但当时无法求解这个非线性方程组。这时Taylor想到了量纲分析，设空气绝热系数为$\gamma$，在时刻$t$爆炸的球形冲击波的波阵面半径为$R$，波阵面为球形边界面，内部是超热火球，外部是密度为$\rho_0$的正常大气，其压强比球内压强小几个数量级，可以忽略不计。最终这个复杂问题只由5个参量描述，可写为

$$R=f(E,\ \gamma,\ \rho_0,\ t)\ ,$$

此处$f$代表某种函数关系。

取质量$M$、长度$L$和时间$T$为基本量纲，上述5个参量的量纲为$[R]=L, [E]=ML^2T^{-2}, [\gamma]=1, [\rho_0]=ML^{-3}, [t]=T$。Taylor知道，5个参量中$\gamma\equiv\Pi_2$已经是无量纲，由其余4个仅可构造出唯一无量纲量$\Pi_1=RE^{-1/5}\rho_0^{1/5}t^{-2/5}$，物理过程最终只由这两个量描述，可写$\Pi_1=S(\Pi_2)$，此处$S$为任意函数，即波阵面半径$R=S(\gamma)E^{1/5}\rho_0^{-1/5}t^{2/5}$。由之还可得波阵面的速度$v(t)=(2/5)S(\gamma)E^{1/5}\rho_0^{-1/5}t^{-3/5}$，随时间的增大而衰减并趋于零，波阵面的加速度$a(t)=-(6/25)S(\gamma)E^{1/5}\rho_0^{-1/5}t^{-8/5}$，波阵面处的压强$p(t)=C(\gamma)E^{2/5}\rho_0^{3/5}t^{-6/5}$，等等。1941年6月27日，Taylor给英国有关机构提交了保密报告。1947年美国公开发表第一颗原子弹爆炸从0.10 ms到1.93 ms等时间间隔的14帧火球照片。Taylor根据火球照片在1950年公开发表原子弹的爆炸当量估计：$E=7.19\times10^{13}$ J≈1.7万吨TNT当量，美国军方很是恼火，因为这个爆炸当量当时还是高度绝密的参数。这类推理大概也可用于分析地下和水下核试验。在简化处理时当然忽略了许多细节，如初始爆炸的机械和化学过程、火球并非理想球形、火球受地面限制等。

量纲分析的目的是组织变量成为无纲量并减少变量数，它带来许多好处，首先是节约财力和时间。设想已知一浸没在液流中的物体所受阻力$F$依赖于其线度$L$、流体速度$v$、密度$\rho$和粘度$\mu$，$F=f(L,v,\rho,\mu)$。设物体形状复杂，准确求解不可能，只能做试验定$F$。如果每个自变量取10个值，试验点达$10^4$，但量纲分析后的关系约化为$F/\rho v^2L^2=g(\mathrm{Re}),\ \ \mathrm{Re}\equiv\rho vL/\mu$，仅一个自变量即雷诺数。函数$g$当然不同于$f$，但包含后者的所有信息。适当的10个试验点可以得到类似精度的$g$，而且，原先$10^4$试验点可以标在同一条$g$曲线上。第二个好处是帮助试验设计和理论分析，识别重要物理过程，剔除次要变量，例如，雷诺数衡量惯性力和粘滞力的相对权重。第三个好处是提供标度律和相似性，设计模型替代原型，例

如，机翼举力试验可保持同雷诺数在小风洞中用小模型做，且知道 $F\propto\rho v^2L^2$ 。此例稍后还会详细讨论。

## 2 量纲分析的基本概念和方法

### 2.1 量纲制、量纲表示矢量、量纲表示矩阵和Π-定理

物理学是一门高度定量化的学科。物理量离不开测量，测量给出物理量的值。各物理量间由定义或物理定律联系，可选少数几个物理量作为基本量，并为之规定基本量度单位，构成单位制。约定基本量不可能依基本物理定律彼此导出。此处特别将基本量集合称为量纲制，不问其单位；单位制决定量纲制，但反之不然。其他物理量通过定义或基本物理定律作为导出量。量纲“意会”容易“言传”难，基本量不依赖于其单位选择的属性是其量纲，如量纲之一长度，地球半径的量纲是长度。选定基本量和单位制后，导出量的单位可用基本单位表出，这种表达式称为导出量的量纲式，导出量与此相关的不依赖于单位选择的属性是其量纲，描述导出量与基本量间与量值无关的简约关系。例如，在MLT量纲制有三个基本量：质量、长度和时间，对应的三个基本量纲分别记作质量$M$、长度$L$和时间$T$，如$L$不可能依基本物理定律由$M$和$T$导出，而速度 $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 是导出量，是长度除以时间的结果，其量纲记作 $[v]=LT^{-1}$，单位改变时 $v$ 的测量值改变，但量纲不变。物理量的量纲只关注物理量在基本单位改变时不变的属性，不同质的物理量可以有相同的量纲，如功和力矩。

在MLT量纲制中，一般的导出量 $z$ 的量纲可写作基本量纲的幂次形式 $[z]=L^\alpha M^\beta T^\gamma$ ，此处幂次 $\alpha, \beta, \gamma$ 也称作因次，早期用于表示量纲。设导出量 $z$ 在单位 $\hat{L}_0, \hat{M}_0, \hat{T}_0$ 下的值为 $z_0$ ，在单位 $\hat{L}_1, \hat{M}_1, \hat{T}_1$ 下的值为 $z_1$ ，则 $z=z_0\hat{L}_0^\alpha\hat{M}_0^\beta\hat{T}_0^\gamma=z_1\hat{L}_1^\alpha\hat{M}_1^\beta\hat{T}_1^\gamma$，即

$$z_1=z_0(\hat{L}_0/\hat{L}_1)^\alpha(\hat{M}_0/\hat{M}_1)^\beta(\hat{T}_0/\hat{T}_1)^\gamma. \qquad (1)$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是完全的基本量纲，一般量 $z$ 的量纲可写作

$$[z]=X_1^{a_1}X_2^{a_2}\cdots X_m^{a_m}, \qquad (2)$$

形式上写

$$\ln[z]=a_1\ln X_1+a_2\ln X_2+\cdots+a_m\ln X_m,$$

可将量纲表示为 $m$ 维矢量空间中的矢量 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)^T$ ，而 $\ln X_j$ 为正交基矢，此处上标 $T$ 记将行矢量转化为列矢量的转置操作。无纲量 $\zeta$ 的量纲为 $[\zeta]=X_1^0X_2^0\cdots X_m^0$ ，约定 $[\zeta]=1$ ，对应于矢量空间的原点。显然，无纲量的值与单位制的选择无关，是不变的常数。

因为物理定律不依赖于测量单位的选择，物理关系式中出现的求和如 $u+v$ ，求和项的量纲必须一致，即 $[u]=[v]$ ，亦即量纲一致性或齐次性原理，数学上与齐次函数有关。如果函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对于非零的 $\lambda$ 有 $f(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^k f(\boldsymbol{x})$ ，则称 $f$ 为 $k$-阶齐次函数。显然，齐次函数的单项式为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^k$ 。齐次函数的基本定理即欧拉定理： $\boldsymbol{x}\cdot\nabla f(\boldsymbol{x})=kf(\boldsymbol{x})$ 。由量纲的齐次原理可引伸出另一条原理即量纲的幂次原理：任何导出量的量纲是基本量纲幂次的单项式，因为导出量的物理定律定义式中各相加项的量纲必须一致。乘积量如 $z=uv$ 的量纲，如果 $[u]=X_1^{b_1}X_2^{b_2}\cdots X_m^{b_m}$, $[v]=X_1^{c_1}X_2^{c_2}\cdots X_m^{c_m}$ ，则自然 $[z]=X_1^{b_1+c_1}X_2^{b_2+c_2}\cdots X_m^{b_m+c_m}$ 。超越函数如 $e^z$, $\sin z$ 有幂级数展开如 $e^z=1+z+z^2/2+\cdots$ ，要求宗量 $z$ 一般应为无纲量。以关系式 $A=B\sin\alpha-(D+D_1)/E+F$ 为例，应有 $[\alpha]=1$, $[D]=[D_1]$, $[A]=[B]=[D/E]=[F]$ 。如果违反量纲一致性，关系式必定是错的。

在量纲的矢量空间表示下，可讨论几个重要推广。首先，一个量的量纲对应该矢量空间中的一个矢量。所谓几个物理量的量纲彼此独立，是指它们的量纲表示矢量线性无关。一组$N$个物理量的量纲表示矢量，可写成 $N\times m$ 的量纲表示矩阵的形式。其独立量纲数，是指$N$个量纲表示矢量中线性无关矢量数的最大值，即量纲表示矩阵的秩，不妨将之记作$m$。进一步还可以讨论基矢变换：$m$个基矢一般可用$m$个量纲彼此独立的一组物理量替换，为区分原先的基本量纲量，可称后者为参考量纲量。参考量纲量的量

纲表示矩阵必定是满秩的。设参考量纲量为 $y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$\cdots$，$y^{(m)}$，$\ln Y_i \equiv \ln([y^{(i)}]) = \sum_j a_{ij} \ln X_j$，则参考量纲量的量纲表示矩阵为 $A=(a_{ij})$。以$\mathcal{X}$标记分量为 $\ln X_i$ 的列矢量，即 $\mathcal{X}=(\ln X_1, \ln X_2, \cdots, \ln X_m)^T$，相应地有$\mathcal{Y}$，则$\mathcal{Y}=A\mathcal{X}$。设参考量纲量 $y^{(j)}$ 在基本单位 $\{\hat{X}_i\}$ 下的值为 $y_0^{(j)}$，在基本单位 $\{\hat{X}_i'\}$ 下的值为 $y_1^{(j)}$，记单位缩放因子 $\hat{X}_i'/\hat{X}_i \equiv \gamma_i$，则参照(1)，有

$$\ln y_1^{(i)} = \ln y_0^{(i)} - \sum_j a_{ij} \ln \gamma_j \quad .$$

以$\mathcal{Y}_0$标记分量为 $\ln y_0^{(i)}$ 的列矢量，如果选择 $\ln \gamma_i = w_i$ 满足 $A\boldsymbol{w}=\mathcal{Y}_0$，则 $\ln y_1^{(i)}=0$，即可以通过选择适当的基本单位缩放因子使得所有参考量纲量 $y_1^{(i)}=1$，$i=1, 2, \cdots, m$。因为矩阵$A$是满秩的，总可以求解：$\boldsymbol{w}=A^{-1}\mathcal{Y}_0$。

如果对于基本量纲量，$[z]=X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_m^{\alpha_m}$，而对于参考量纲量，$[z]=Y_1^{\beta_1}Y_2^{\beta_2}\cdots Y_m^{\beta_m}$，则由$\mathcal{Y}=A\mathcal{X}$，有 $\alpha_i=\sum_j \beta_j a_{ji}$，同样，$\beta_i$ 可由 $\{\alpha_j\}$ 通过逆变换得到。设 $x_i$ 是量纲为基本量纲 $X_i$ 的量，即 $[x_i]=X_i$，则 $zx_1^{-a_1}x_2^{-a_2}\cdots x_m^{-a_m} \equiv \pi_z$ 为无纲量，即 $[\pi_z]=1$，且可写为

$$z=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}\pi_z=(y^{(1)})^{\beta_1}(y^{(2)})^{\beta_2}\cdots(y^{(m)})^{\beta_m}\pi_z \quad . \tag{3}$$

如果 $z$ 的量纲表示矢量与变量 $u$，$v$，$\cdots$，$w$ 的量纲表示矢量线性相关，则 $z$ 的量纲 $[z]$ 可用量纲 $[u]$，$[v]$，$\cdots$，$[w]$ 的有理幂次的乘积表示，量纲式(2)是一特例。设一组$n$个物理量的量纲表示矩阵的秩为 $m \leqslant n$，则由此$n$个量可构造出 $l=n-m$ 个无纲量。

量纲分析的基础是1914年由Buckingham提出的一条定理[11]。1922年布里奇曼在其专著*Dimensional Analysis*中将之命名为Π-定理[8]。Vaschy在1892年及Riabouchinsky在1911年曾独立发表了类似工作。布里奇曼由于高压物理的研究获得1946年诺贝尔物理学奖。设想一个物理问题由 $n$ 个独立变量 $z^{(1)}$，$z^{(2)}$，$\cdots$，$z^{(n)}$ 完全描述：$f(z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(n)})=0$。此处“独立”的意义，一般指$n$个变量中的任意 $n-1$ 个取确定值时，余下的一个仍可在一个连续范围内变化。此处的独立性，应与前面的量纲表示矢量的线性无关性明确区分，不可混淆。设以上$n$个独立变量的量纲表示矩阵的秩为 $m=n-l$，不妨令 $z^{(l+1)}$，$z^{(l+2)}$，$\cdots$，$z^{(n)}$ 为$m$个参考量纲量，并记作 $y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$\cdots$，$y^{(m)}$。参照(3)式，将前 $l$ 个 $z^{(k)}$ 表作 $z^{(k)} \equiv p^{(k)}(y^{(1)})^{\beta_{k1}}(y^{(2)})^{\beta_{k2}}\cdots(y^{(m)})^{\beta_{km}}$，则

$$f(z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(n)})=f(z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(l)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(m)})=0 .$$

前面已经证明，适当选择单位制可使得所有 $y^{(i)}$ 的值为1，此时

$$\begin{aligned} & f(z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(n)}) \\ = & f(p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(l)}, 1, 1, \cdots, 1) \\ \equiv & F(p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(l)})=0, \end{aligned}$$

表明物理问题的函数关系一定可以写成无纲量的函数的形式，此处$F$不同于$f$，但包含后者的所有信息。这就是Π-定理：含$n$个独立变量的物理关系式，如果其量纲表示矩阵的秩为$m$，则物理关系一定可以用 $l=n-m$ 个无纲量的函数表示。这是物理规律不依赖于单位选择的自然结果，反映了物理定律一个简单却非常重要的不变性原理。此处$l$个无纲量分别由$l$个独立变量得到，彼此自然不等价，即无纲量有独立性，或者说，无纲量中 $l-1$ 个固定时，余下的一个仍可在一个连续范围内变化。

## 2.2 量纲分析的步骤

量纲分析的步骤如下：

第1步，选择量纲制，列出问题所有的独立关键参量，设共有$n$个；

第2步，确定所有$n$个参量的量纲；

第3步，确定量纲表示矩阵的秩$m$。往往从$n$个变量中适当选取$m$个量纲独立的参考量纲量；

第4步，构造出 $l=n-m$ 个不等价的无纲量 $\pi_j$。往往用$m$个参考量纲量，对余下的$l$个参量逐一构造无纲量；

第5步，再次验证所有无纲量的确无量纲，适当整理取某些无纲量的简化组合，使之是科学界通用的已命名无纲量，通常让每个待考察的原始变量只出现在一个无纲量中，或方便于考察极

限情形；

第6步，写出问题最终的无纲量关系。在理想情形下，可表现为简单的幂次形式，通常也称之为标度律(scaling law)。

上述步骤给出的问题自由度一般为 $l=n-m$ 。如果实际问题的 $n$ 个独立变量中有 $n_1$ 个取固定值，如问题中出现的有纲物理常数，设此 $n_1$ 变量的量纲表示矩阵的秩为 $m_1$ ，则由之可构造出 $l_1=n_1-m_1$ 个取固定值的无纲量，问题的有效自由度降为 $n-m-l_1$ 。

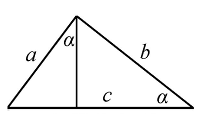
量纲分析的确有些技巧，量纲分析解决复杂问题往往给人一种神奇的美的享受，量纲分析的范例不少是科学大作。如何确定问题的关键物理量，涉及如何简化问题，物理因素有哪些，孰轻孰重，需要有高深的科学修养、丰富的物理知识以及对问题的深刻理解，特别是对于新出现的科学问题。加进关系不大的多余物理量，增加分析的复杂性，但丢失关键物理量导致失败，显然不能解决问题。基本量纲量和参考量纲量的选择有随意性，一种选择会比另一种方便，无纲量的具体形式也可随之不同，但不同的无纲量组彼此等价，最终的无纲量数即物理问题的自由度是不变的。

## 3 应用例

定性思考和半定性实验，力求对问题的性质和解的概貌有所估计，这种能力靠物理直觉和洞察力，靠经验和功力，需要长期思考和培养。“学而不思则罔，思而不学则殆。”

### 3.1 证明勾股弦定理

一个直角三角形的面积 $A$ 由斜边 $c$ 和一个锐角 $\alpha$ 完全决定，各量量纲为 $[c]=L$, $[A]=L^2$, $[\alpha]=1$ 。量纲表示矩阵的秩为1，可构造两个无纲量： $\pi_0=A/c^2$ 和 $\pi_1=\alpha$ ，可写 $\pi_0=\Phi(\pi_1)$ ，即 $A=c^2\Phi(\alpha)$ ，函数 $\Phi$ 的形式可以不知道。将原先的大三角形，如图分割成与原三角形相似的两个三角形，则应有



勾股弦定理

$A=c^2\Phi(\alpha)=a^2\Phi(\alpha)+b^2\Phi(\alpha)$ ，得 $c^2=a^2+b^2$ 。

### 3.2 管道流动的阻力

考虑圆管道内流动流体所受的管壁摩擦切应力 $\tau$ ，主要的相关物理量为管直径 $d$ 、管壁线粗糙度 $\epsilon$ 、流体密度 $\rho$ 、粘度 $\mu$ 和中心流速 $v$ ，在MLT量纲制中， $[d]=[\epsilon]=L$, $[\rho]=ML^{-3}$, $[v]=LT^{-1}$, $[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$, $[\tau]=ML^{-1}T^{-2}$ ，量纲表示矩阵的秩为3，无纲量数为 $6-3=3$ 。容易证实，可取 $d$, $\rho$, $v$ 为参考量纲量。为求对应于 $\tau$ 的无纲量 $\pi_0$ ，写 $\pi_0=\tau d^{\alpha}\rho^{\beta}v^{\gamma}$ ，分别计算 $M$、$L$、$T$ 的总幂次，得量纲平衡方程：

$1+\beta=0$, $-1+\alpha-3\beta+\gamma=0$, $-2-\gamma=0$ ，得 $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=-2$ ，即 $\pi_0=\tau/\rho v^2$ 。当然可以写下参考量纲量的量纲表示矩阵，求逆后再系统地构造无纲量。不过，通常不难手调而直接写出无纲量，其余两个为 $\pi_1=\rho vd/\mu\equiv\mathrm{Re}$ , $\pi_2=\epsilon/d$ ，其中Re为著名的雷诺数。根据Π-定理，可写 $\pi_0=f(\pi_1, \pi_2)$ ，即 $\tau=\rho v^2 f(\mathrm{Re}, \epsilon/d)$ 。管道流动有层流和湍流不同形式， $\tau$ 的行为很不同。

### 3.3 单摆的周期

考虑重力场中的摆运动，讨论摆周期，除周期 $T$ 外，关键变量还应有摆长 $l$ 、摆球质量 $m$、重力加速度 $g$ 和总能量 $E$ 。在MLT基本量纲量下， $m$, $g$, $l$, $T$, $E$ 的量纲分别为 $[m]=M$, $[g]=LT^{-2}$, $[l]=L$, $[T]=T$, $[E]=ML^2T^{-2}$ 。选 $m$, $g$, $l$ 为参考量纲量，可验证量纲表示矩阵的确满秩，且 $M=[m]$, $L=[l]$, $T=[l/g]^{-1/2}$ 。运用Π-定理，由 $T$, $E$ 构造出无纲量共2个，为 $T\to\pi_1=T\sqrt{g/l}$, $E\to\pi_2=E/(mlg)$ ，应可写 $\pi_1=\Phi(\pi_2)$ ，即 $T=\sqrt{l/g}\,\Phi\left(E/mgl\right)$ 。引入 $\omega\equiv\sqrt{g/l}$ ，如果 $\pi_2\ll 1$ ，可写 $\Phi(\pi_2)=C_0+C_1\pi_2+\cdots\approx C_0$ ，准至最低阶，得 $T=C_0\sqrt{l/g}=C_0/\omega$ ，表明周期 $T$ 与 $m$ 和 $E$ 无关，并不显然。实际的周期由第一类完全椭圆积分给出，为 $T=4K(k^2)/\omega$ ，此处参数 $k$ 取决于摆的能量。

### 3.4 液滴的振动

忽略重力场，考虑球形小液滴在自身表面张力$\gamma$作用下的振动周期$T$，此处的振动指液滴形状改变。振动周期$T$依赖于$\gamma$及液滴的球半径$r$和密度$\rho$：$T=f(\gamma, r, \rho)$。在MLT量纲制中，各量的量纲为$[T]=T$，$[\gamma]=MT^{-2}$，$[r]=L$，$[\rho]=ML^{-3}$，由之可构造唯一的无纲量$T/\sqrt{\rho r^3/\gamma}$，得$T\propto\sqrt{\rho r^3/\gamma}$。在此问题中也许需要顾及如粘滞性和可压缩性，液滴足够小时它们也许不重要，当然需要经验和实验检验。

### 3.5 液体表面张力测量

测液体表面张力$\gamma$的一个方法，是测从半径为$r$的管口脱落下来的液滴质量$m$。基本理论基于平衡状态，粘滞不影响，可略。简单理论认为$mg=2\pi r\gamma$，如果也考虑液滴上方液柱，设管口处液体压强为$p$，有$mg+p\pi r^2=2\pi r\gamma$。如果紧邻管口处的液滴表面为圆柱形，则根据弯曲液面内外压差公式，$p=\gamma/r$，代入上式得$mg=\pi r\gamma$。显然在液滴脱落的瞬间表面不可能为圆柱形，但很难准确计算，不过仍可用量纲分析。此处五个关键物理量为$\rho$，$g$，$\gamma$，$m$，$r$，可构造两个无量纲量$\gamma r/mg$，$\gamma/\rho gr^2\equiv(a/r)^2$，得一般关系$\gamma r/mg=\phi(a/r)$，此处$\phi$为某个函数，实验发现它在$a/r$的一个范围内为常数，$\gamma=0.263mg/r$，相当于$mg=1.12\pi r\gamma$。对于很小和很大的$a/r$，$\gamma$的修正因子略小。

### 3.6 悬臂梁形变

求悬臂梁在尖端加负载$P$时的形变位移$\delta$。设梁长为$L$，截面惯性矩为$I$，弹性模量为$Y$，且$\delta=f(P, I, L, Y)$。在MLT量纲制中，$[\delta]=L$，$[L]=L$，$[P]=MLT^{-2}$，$[I]=L^4$，$[Y]=ML^{-1}T^{-2}$，量纲表示矩阵的转置如下表所示，其第一行乘以2与第三行相加得全零行，秩小于3，实为2，无纲量数为5−2=3，无纲量为$\pi_0=\delta/L$，$\pi_1=P/YL^2$，$\pi_2=L^4/I$，根据$\Pi$-定理，可写$\delta=LF(P/YL^2, L^4/I)$。考虑梁的小形变正比于负载，则应有$\delta=L(P/YL^2)\Phi(L^4/I)$，如果进而要求$\delta\propto 1/I$，得$\delta\propto L(P/YL^2)(L^4/I)=PL^3/YI$。

| | $\delta$ | $P$ | $L$ | $I$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $L$ | 1 | 1 | 1 | 4 | −1 |
| $T$ | 0 | −2 | 0 | 0 | −2 |

悬臂梁的刚度$\sigma$由引起梁端发生单位位移形变的力衡量。设长、宽、高分别为$l$，$b$，$h$，杨氏模量为$Y$。如果允许剪切，则还需考虑剪切模量$\mu$。在MLT量纲制中各量的量纲为$[\sigma]=MT^{-2}$，$[l]=[b]=[h]=L$，$[Y]=[\mu]=ML^{-1}T^{-2}$，量纲仅出现$L^\alpha$和组合$MT^{-2}$，量纲矢量矩阵的秩仅为2，由6个量可构造4个无纲量：$\pi_0=\sigma/Yl$，$\pi_1=b/l$，$\pi_2=h/l$，$\pi_3=Y/\mu$，得$\sigma=Yl\Phi(b/l, h/l, Y/\mu)$。容易看到，梁刚度与宽度成正比，应可分出因子$b/l$。刚度对高度的依赖不像如此简单，借助其他知识进一步可写为$\sigma=Yl(b/l)(h/l)^3\Psi(Y/\mu)=Yb(h/l)^3\Psi(Y/\mu)$。

### 3.7 LC回路的振荡周期

LC回路的电压变化$\sim L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t\sim(1/c)\int I\mathrm{d}t$。LC回路的振荡周期$\tau$的有关变量可取电压$V$、电流$I$、电感$L$和电容$c$。在电荷-能量-时间的QET量纲制中，各量的量纲为$[\tau]=T$，$[V]=EQ^{-1}$，$[I]=QT^{-1}$，$[L]=ET^2Q^{-2}$，$[c]=Q^2E^{-1}$。量纲矢量矩阵的秩为3，可构造无纲量$\pi_0=\tau/\sqrt{Lc}$，$\pi_1=\tau V/LI$，前者仅是$\tau$和电路常数的组合。于是，可写周期$\tau=\sqrt{Lc}\,\Phi(\pi_1^2/\pi_0^2)=\sqrt{Lc}\,\Phi(V^2c/LI^2)$，此处已取无纲量组合以使函数自变量不再含$\tau$。对于稳恒回路，函数$\Phi$取常数，得熟知的结果。在MLT量纲制中，电荷、能量和时间的量纲为$[Q]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$，$[E]=ML^2T^{-2}$，$[T]=T$，量纲矢量矩阵满秩，所以两个量纲制完全等价。

### 3.8 星体公转周期

考虑自由空间质量为$m_1$和$m_2$的两个星体彼此公转的周期$T$。记引力常数为$G$，星体距离为

$R$，设 $T=f(m_1,\ m_2,\ G,\ R)$。在MLT量纲制中，各量量纲为 $[m_1]=[m_2]=M$，$[G]=M^{-1}L^3T^{-2}$，$[R]=L$，可构造无纲量 $\pi_0=TGm_1/R^3$，$\pi_1=m_2/m_1$，所以 $T=\sqrt{R^3/Gm_1}F(m_2/m_1)$。考虑行星绕日运动，如果 $m_1\gg m_2$，则 $T\propto\sqrt{R^3/Gm_1}$ 或 $T^2/R^3$ 为常数，即行星轨道的开普勒第三定律。此处引力常数进入分析，涉及引力质量和惯性质量转换的问题。

### 3.9 水面波

决定水面波的因素有二：表面张力使弯曲的表面展平，重力使倾斜的表面恢复水平。设波速为 $v$，波长为 $\lambda$，水密度为 $\rho$，表面张力系数为 $\gamma$，重力加速度为 $g$。在MLT量纲制中，$[v]=LT^{-1}$，$[\lambda]=L$，$[\rho]=ML^{-3}$，$[\gamma]=MT^{-2}$，$[g]=LT^{-2}$。表面张力起作用时，略 $g$，唯一的无纲量对应于 $v\propto\sqrt{\gamma/\rho\lambda}$。重力起作用时，略 $\gamma$，得 $v\propto\sqrt{g\lambda}$，即正比于自由落体通过一个波长距离所获得的速度，且不出现密度；值得注意，此时3个量 $v$，$g$，$\lambda$ 的量纲表示矩阵的秩仅为2。此处未计及水深 $h$ 的影响，相当于取 $h\gg\lambda$ 的极限。考虑无纲量 $\lambda^2\rho g/\gamma\gg1$ 的浅水波情形，量纲法给出 $v=\sqrt{g\lambda}\Phi(\gamma/\lambda^2\rho g)\propto\sqrt{g\lambda}$。海啸是由地震引起的海洋巨浪，其波长达数百千米，与平均海深比，属浅水波，海啸波长曾是估计平均海深的最早手段。海浪随着海滩水深减小而波速变小，后浪逐前浪，逼高的浪头可达数十米。由量纲法可写 $v=\sqrt{g\lambda}\Phi(\lambda/h)$，记无纲量 $\eta\equiv\lambda/h$，则 $\eta\to0$ 时，$v\propto\sqrt{g\lambda}$，而 $\eta\to\infty$ 时，$v\propto\sqrt{g\lambda}\eta^{-1/2}=\sqrt{gh}$，与理论结果 $v=\sqrt{g\lambda/2\pi}\tanh(\sqrt{2\pi h/\lambda})$ 一致。

### 3.10 弹性球的撞击形变

考虑表面涂墨的弹性球沿垂直方向撞击平板弹跳在平板上的印迹。设球有理想弹性，平板完全平滑，质量很大，不移动也不发生形变。关键量除待求的印迹半径 $d$ 外，有球直径 $D$、撞击速度 $v$、密度 $\rho$ 及描述球弹性的模量 $Y$ 和泊松比 $\gamma$，质量可由体积和密度算出而不必考虑，最终写 $d=d(v,\ \rho,\ D,\ Y,\ \gamma)$。可以设想，重力和空气阻力也有影响，但为可略的次要因素。在MLT量纲制中，各量量纲为 $[d]=[D]=L$，$[v]=LT^{-1}$，$[\rho]=ML^{-3}$，$[Y]=[P]=ML^{-1}T^{-2}$，$[\gamma]=1$。量纲表示矩阵的秩为3，无纲量数为 $6-3=3$，无纲量为 $\pi_0=d/D$，$\pi_1=Y/\rho v^2$，$\pi_2=\gamma$，根据 $\Pi$-定理，可写 $\pi_0=f(\pi_1,\ \pi_2)$，即 $d=Df(Y/\rho v^2,\ \gamma)$，印迹的5个依赖变量骤减为2。量纲分析给不出函数 $f$ 的具体形式，需要通过理论或实验定 $f$。原始的变量空间5维，工作量大，降为2维后工作量大减，并且，如果实物球的直径很大，现在可用小球做模拟试验，而且可用不同材质的球如铁球或橡胶球做。模拟试验表明，$d$ 对 $\gamma$ 的依赖很弱，即实验点 $\pi_0$，$\pi_1$ 几乎落在一条曲线上，可写 $d=DF(Y/\rho v^2)$。

假若关键变量中遗漏了 $Y$，将错误地得出 $d=Df(\gamma)$，后果显然是致命的。不过，如果详细考察实验数据，有可能发现有关键变量遗漏，虽然不能确定缺失的具体变量。相反，如果关键变量中添加了重力加速度 $g$，将导致新增无纲量即无纲重力 $\pi_3=gD/v^2$，关系式变为 $d=D\Phi(Y/\rho v^2,\ \gamma,\ gD/v^2)$，问题的复杂性不必要地增加。但是，如果 $v$ 不足够大使得无纲重力 $\pi_3$ 不小，也许重力会有可观察的效应，需要检验。总之，简化问题的叙述，突出本质性因素，是解决物理问题的第一步。参考量纲量的选取及构造出的无纲量不唯一，但数目唯一，彼此等价，例如，两个无纲量的乘积仍为无纲量。通常让单个无纲量只代表单个关注的自变量，该无纲量由无量纲化相应的单个原始变量得到，即一无纲量对一有纲变量。

### 3.11 平行板边界层问题

在无重力场的沿 $x$ 方向速度为 $U$ 的均匀流中，放置宽为 $l$ (沿 $z$ 方向)无限长度沿 $x$ 方向的薄板，流体运动由纳维—斯托克斯(NS)方程和连续性方程描述 $(\rho(\partial_t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})=-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{u},\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0)$，问题看似简单，实则很难，原因在于其非线性的

本质，来自流体与其自身相互作用的反馈机制。1904年普朗特(Prandtl)提出革命性的边界层概念，将流动分为靠近表面的粘滞流边界层和远处的无粘流，雷诺数足够高则边界层很薄。边界层压强项可略，方程为

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\quad ,$$

边界条件对于 $x>0, y>0$ 为 $u(0,y)=U$, $u(x,\infty)=U$，$u(x,0)=v(x,0)=0$。相关量为 $l$，$x$，$y$，$u$，$v$，$U$，$\nu=\mu/\rho$，各有量纲 $[l]=[x]=[y]=L$，$[u]=[v]=[U]=LT^{-1}$，$[\nu]=L^2T^{-1}$，可构造无纲量 $\mathrm{Re}\equiv\rho Ul/\mu=Ul/\nu$, $\pi_x=Ux/\nu$, $\pi_y=Uy/\nu$, $\pi_u=u/U$, $\pi_v=v/U$。无量纲化相当于取 $U=\nu=1$，方程和边界条件变为 $uu_x+vu_y=u_{yy}$, $u_x+v_y=0$; $u(0,y)=u(x,\infty)=1$，$u(x,0)=v(x,0)=0$，此处用下标标记偏导，如 $u_x=\partial u/\partial x$。雷诺数Re作为量纲分析的直接结果出现，衡量惯性力和粘滞力之比。量纲分析指导将原始方程写成无量纲化的形式。

无量纲化后的方程和边界条件仍存在对称性，它们在变换 $x\to a^2x$，$y\to ay$，$u\to u$，$v\to v/a$ 下不变，表明 $x/x_0=(y/y_0)^2$。引入 $\xi=y/\sqrt{x}$，令 $\psi(x,y)\equiv\sqrt{x}f(\xi)$，$u=\psi_y=f'$，则由连续性方程，$v=-\psi_x=(\xi f'-f)/2\sqrt{x}$。NS方程变为 $2f'''+ff''=0$，边界条件成为 $f(0)=f'(0)=0$，$\lim\limits_{\xi\to\infty}f(\xi)=1$，整个问题化为单参量。

## 4 量纲制的基本量个数

在CGS单位制或高斯单位制中基本单位只有3个，在MKSA单位制中有4个，而在国际单位制SI中有7个。基本单位的个数，就是基本量纲量的个数。增加基本量纲量如引入温度或电流，便于与力学过程相区分，分析热学或电学过程所起的作用，但增加基本量纲量的个数，根据Π-定理，似乎将减少无纲量的数目。物理问题的自由度显然不会因单位制的选择而改变，增加基本量纲量一般也增加相关的物理量，如引入基本量温度后需要相应引入有纲量玻尔兹曼常数，问题的自由度最终不变。仅就量纲分析操作而言，可以只用MLT量纲制。例如，对于SI单位制的公式，在MLT量纲制中电磁学常数量纲可取 $[\epsilon_0]=1$，$[\mu_0]=[c^{-2}]=T^2L^{-2}$。物理量如空间矢量，量纲制或单位制如坐标系，物理量不依赖于单位制，但物理量的表示随单位制而变。物理量的量纲不依赖于量纲制中基本量单位的选择，但依赖于量纲制如MLT或MLTΘ (Θ表示温度)的选择。

### 4.1 流场中物体的传热

量纲分析的一位先驱瑞利在1915年讨论流体传热问题：在匀速运动的不可压无粘性流体中放置一物体，其与远处流体的温差为 $\theta$，求单位时间内由物体传出的热量 $H$。瑞利认为关键物理量有6个，为 $H$ 及物体线度 $l$、远处流速 $v$、温差 $\theta$、流体单位体积热容 $c$ 和热导率 $\kappa$，选五元量纲制：除MLT外另加温度Θ和热量 $Q$，有 $[l]=L$，$[v]=LT^{-1}$，$[\theta]=\Theta$，$[c]=QL^{-3}\Theta^{-1}$，$[H]=QT^{-1}$，$[\kappa]=QL^{-1}T^{-1}\Theta^{-1}$。量纲表示矩阵的秩为4，无纲量数为2，得无纲量 $\pi_1=H/l\kappa\theta$，$\pi_2=lvc/\kappa$，所以 $H=l\kappa\theta\Phi(lvc/\kappa)$。瑞利的推理引起争议。其实随着新增的基本量纲量温度Θ和热量 $Q$，引入了新关键量即热功当量 $J$ 和玻尔兹曼常数 $k_B$，有 $[J]=ML^2T^{-2}Q^{-1}$, $[k_B]=ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$，量纲表示矩阵的秩变为5，无纲量数为 $8-5=3$，新增无纲量 $\pi_3=Jcl^3/k_B$。如果只用MLT量纲制，以等价的 $k_B\theta$ 取代 $\theta$，则 $[l]=L$，$[v]=LT^{-1}$，$[k_B\theta]=ML^2T^{-2}$，$[c]=L^{-3}$，$[\kappa]=L^{-1}T^{-1}$，$[H]=ML^2T^{-3}$。量纲表示矩阵的秩为3，无纲量数为 $6-3=3$，得无纲量 $\pi_1'=H/l\kappa k_B\theta$，$\pi_2'=v/l^2\kappa$，$\pi_3'=l^3c$，不难看出 $\pi_2=\pi_2'\pi_3'$，现在 $H=k_B(l\kappa\theta)\Psi(v/l^2\kappa, cl^3)$，与瑞利分析修正后的结果一致。两种量纲制下量纲表示矩阵的转置如以下二表所示。

| | $l$ | $v$ | $\theta$ | $c$ | $\kappa$ | $H$ | $J$ | $k_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $L$ | 1 | 1 | 0 | −3 | −1 | 0 | 2 | 2 |
| $T$ | 0 | −1 | 0 | 0 | −1 | −1 | −2 | −2 |
| Θ | 0 | 0 | 1 | −1 | −1 | 0 | 0 | −1 |
| $Q$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | −1 | 0 |

|  | $l$ | $v$ | $k_B\theta$ | $c$ | $\kappa$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $L$ | 1 | 1 | 2 | −3 | −1 | 2 |
| $T$ | 0 | −1 | −2 | 0 | −1 | −3 |

### 4.2 管道流动的传热

考虑圆管道内稳恒流动流体的每单位温差下单位时间内通过单位面积的传热量即传热率$h$问题，主要的相关物理量为管直径$d$、管长$l$、流体密度$\rho$、粘度$\mu$、热导率$\kappa$、平均流速$v$及温差$\theta$和比热$c$，在MLT量纲制中，$[h]=L^{-2}T^{-1}$，$[d]=[l]=L$，$[\rho]=ML^{-3}$，$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$，$[v]=LT^{-1}$，$[\theta]=ML^2T^{-2}$，$[\kappa]=L^{-1}T^{-1}$，$[c]=M^{-1}$，量纲表示矩阵的秩为3，无纲量数为$9-3=6$，对应$h$的无纲量$\pi_0=hd/\kappa\equiv\mathrm{Nu}$，称为Nusselt数，$\pi_1=\rho vd/\mu\equiv\mathrm{Re}$，是雷诺数，$\pi_2=c\mu/\kappa\equiv\mathrm{Pr}$，是Prandtl数，描述粘滞和传热的相互影响，$\pi_4=d/l$，描述几何形比，$\pi_5=c\theta/v^2$对应$\theta$，$\pi_6=\kappa l^2/v$。根据$\Pi$-定理，可写$\mathrm{Nu}=f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr},\ d/l,\ c\theta/v^2,\ \kappa l^2/v)$，即$\tau=\rho v^2 f(\mathrm{Re},\ \epsilon/d)$。量纲分析直接给出了重要的无量纲数。在MLTΘ量纲制中，$\pi_6$对应于新增的有纲玻尔兹曼常数$k_B$。

### 4.3 饮料加冰冷却

热饮料加小方冰块冷却比加同质量的大方冰块快。通常的解释是：小冰块的总表面积大，传热多，所以冷却快。但是，线度为$l$的冰块面积$\propto l^2$，总体积$V$的冰块数$\sim V/l^3$，冷却速率应该$\propto 1/l$，得冷却时间$T\propto l$。不过通常的解释并不准确，量纲分析的结果是$T\propto l^2$。问题的有关量除$l$，$T$外，为温差$\theta$、冰的热导率$\kappa$和饮料体积比热$c$。在MLT量纲制中，$[l]=L$，$[T]=T$，$[\theta]=ML^2T^{-2}$，$[c]=L^{-3}$，$[\kappa]=L^{-1}T^{-1}$，量纲表示矩阵的秩为3，无纲量数为$5-3=2$，无纲量为$\pi_0=Tl\kappa, \pi_1=l^3c$，根据$\Pi$-定理，可写$T=(1/l\kappa)F(cl^3)$。考虑$cl^3\ll 1$，对$F$展开至线性项，得$T\propto(1/l\kappa)cl^3=cl^2/\kappa$。如果采用MLTΘ量纲制，则引入新有纲量玻尔兹曼常数$k_B$，各量量纲为$[l]=L$，$[T]=T$，$[\theta]=\Theta$，$[c]=ML^{-1}T^{-2}\Theta^{-1}$，$[\kappa]=MLT^{-3}\Theta^{-1}$，$[k_B]=ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$，量纲表示矩阵的秩为4，无纲量数为$6-4=2$，无纲量为$\pi_0'=T\kappa/l^2c$，$\pi_1'=l^3c/k_B$，根据$\Pi$-定理，可写$T=(l^2c/\kappa)\Psi(l^3c/k_B)$。不难看出，$\pi_0'\sim\pi_0/\pi_1$，$\pi_1'\sim\pi_1$，不同量纲制的结果等价。两种量纲制下量纲表示矩阵的转置如以下二表所示。代谢率与动物体重的3/4次幂呈正比，即克莱伯的实验总结定律(Kleiber's law)，而德国生理学家鲁伯纳根据表面散热速率得出的却是2/3次幂，不符合实际。加冰冷却问题中的幂次估计的不一致性，也许提供有益的启示。

|  | $l$ | $T$ | $\theta$ | $c$ | $\kappa$ | $k_B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $L$ | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 2 |
| $T$ | 0 | 1 | 0 | −2 | -3 | −2 |
| Θ | 0 | 0 | 1 | −1 | −1 | −1 |

|  | $l$ | $T$ | $\theta$ | $c$ | $\kappa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $L$ | 1 | 0 | 2 | −3 | −1 |
| $T$ | 0 | 1 | −2 | 0 | −1 |

## 5 理论物理应用

### 5.1 黑体辐射

自由电磁场的辐射压$p$与辐射能密度$u$间有关系$p=\frac{1}{3}u$。玻尔兹曼运用热力学由内能$U=3pV$，$u=(\partial U/\partial V)_T=T(\partial S/\partial V)_T-p=T(\partial p/\partial T)_V-p=\frac{1}{3}(\mathrm{d}u/\mathrm{d}T-u)$，推出斯特藩定律$u=\sigma T^4$，且给出熵$S=\frac{4}{3}\sigma VT^3$。1893年维恩用当时不很流行的热力学方法处理黑体辐射。维恩设想提高辐射谱密度的两个独立过程，一为升温，另一为绝热压缩，认为只要最终温度相等，则二者谱密度分布相同。维恩考虑半径为$R$体积为$V$的球腔以速度$v=\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$作准静态绝热压缩，由等熵$S=\frac{4}{3}\sigma VT^3=$常数，得$VT^3$或$RT$为常数。运用多普勒频移和

速度的关系，他得到 $d\lambda/\lambda = dR/R$ 。记绝热压缩 $dR$ 前后的温度分别为 $T_0$ 和 $T$，则 $\lambda T = \lambda_0 T_0$ 。将能量密度 $u=\sigma T^4$ 分配到各波长，应可写 $u(\lambda, T)= T^5 f(\lambda T)$ ，或者 $\tilde{u}(\nu, T)=T^3 F(T/\nu)$ 。由量纲分析看，函数 $F$ 的宗量应取无纲量，需要引入普朗克常数 $h$ 和玻尔兹曼常数 $k_B$ ，将 $T/\nu$ 改造成无纲量 $h\nu/k_BT$ 。另外，$[\tilde{u}d\nu]=[E/V]=ML^{-1}T^{-2}$ 。取 $\tilde{u}$，$\nu$，$c$，$h$，$k_BT$ 为独立变量，可构造另一无纲量 $\tilde{u}/h\nu^3c^{-3}$ ，最后，$\tilde{u}(\nu, T)=h(\nu/c)^3F(h\nu/k_BT)$ ，与维恩公式一致，由之对 $\nu$ 积分得斯特藩的 $T^4$ 定律，不同于维恩，此处直接由量纲分析得到。

Jeans曾详细考察过黑体辐射问题，他设想黑体腔内充稀薄电子气，保持温度 $\theta$ ，电子间彼此作用，也与辐射场作用，电子吸收辐射又发射辐射，并达平衡。辐射场能量密度 $u$ ，应与电子质量 $m$、温度 $\theta$ 、电荷 $e$ 和光速 $c$ 有关，而与电子数密度无关，因为电子平均动能仅取决于温度。在MLT量纲制中，各量的量纲为 $[u]=ML^{-1}T^{-2}$，$[m]=M$，$[e]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$，$[\theta]=ML^2T^{-2}$，$[c]=LT^{-1}$，可构造两个无纲量 $\pi_0=ue^6\theta^{-4}$, $\pi_1=\theta/mc^2$ 。于是，$u=e^{-6}\theta^4F(\theta/mc^2)$，含任意函数 $F$。函数 $F$ 的自变量 $\pi_2 \sim v^2/c^2$ ，相当于电子热速度与光速之比，通常温度下很小，有理由写 $u \propto e^{-6}\theta^4$ ，与斯特藩定律一致。黑体辐射问题离不开量子常数 $h$，但以上推导不出现 $h$。斯特藩系数隐含 $h$，以上给出的斯特藩系数含 $e$，显然需要小心解读。

## 5.2 原子半径

考虑氢原子，关键量应有电子质量 $m_e$ 、电荷 $e$ 及真空介电常数 $\epsilon_0$ ，实际上要定出原子半径还需普朗克常数 $h$。为方便，将SI的MLTI量纲置换成MLTQ，即电流换成电荷，此时 $[e]=Q$，$[m_e]=M$，$[\epsilon_0]=M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$，$[h]=ML^2T^{-1}$ 。由此四量可构造长度量 $r=\epsilon_0h^2/m_ee^2$ ，但仅 $m_e$，$e$，$\epsilon_0$ 不足以构造出长度量。如果添加光速 $c$，因为 $[c]=LT^{-1}$ 且由前四量可构造时间量 $t=\epsilon_0^2h^3/m_ee^4$ ，得无纲量 $e^2/\epsilon_0hc$ ，对应精细结构常数 $\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0hc$，长度量的一般形式取 $r=\epsilon_0h^2/m_ee^2\Phi(\alpha)$ ，对于非相对论情形，可取 $\Phi(\alpha)=1$ ，得前面的结果。当原子特征速度与光速相比不是太小时，相对论修正结果含光速 $c$。在MLT量纲制中不必考虑 $\epsilon_0$ ，$[e]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$，$[m_e]=M$，$[h]=ML^2T^{-1}$ ，得长度量 $r=h^2/m_ee^2$ ，与上述长度量一致。

## 5.3 电子经典半径

如果电子的静能量 $m_ec^2$ 完全来自电磁能，则电子有多大？这是电子经典半径问题，结果是 $r_e= e^2/4\pi\epsilon_0m_ec^2 \approx 2.8\times10^{-15}$ m，但实验值小于 $10^{-22}$ m，即量子半径远小于经典半径。前面知道，仅 $m_e$，$e$，$\epsilon_0$ 不足以构造出长度量 $r$ ，或者说仅 $r$，$e$，$\epsilon_0$ 不足以构造质量 $m_e$ 。电磁相互作用由光子传递，加上光速 $c$ 很自然，由量纲平衡得估计 $m_e=De^2/\epsilon_0rc^2$ ，与上述电子经典半径式一致。电子半径实验值比经典估计小7个量级，指示量子处理的必要性。

## 5.4 静电场能量

自由静电场能量的有关量包括电荷 $e$、电场强度 $E$ 和待求的能量密度 $u$。在MLT量纲制中，各量的量纲为 $[e]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$，$[E]=[e/r^2]=M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$，$[u]=ML^{-1}T^{-2}$ 。量纲矢量矩阵的秩为2，可构造唯一的无纲量 $\pi_0=u/E^2$ ，所以 $u\propto E^2$ ，实际的比例常数为1/2 。如果量纲制增加基本变量电荷 $Q$，则引入新变量即真空介电常数 $\epsilon_0$ ，在MLTQ量纲制中，各量的量纲为 $[e]=Q, [E]=QL^{-2}, [u]=ML^{-1}T^{-2}$，$[\epsilon_0]=Q^2T^2M^{-1}L^{-3}$ 。现在量纲矢量矩阵的秩变为3，但仍可构造唯一的无纲量 $\pi_0'=u/\epsilon_0E^2$，与 $\pi_0$ 等价。如果考虑在介质中，则需计及介质介电常数 $\epsilon$ ，因为 $[\epsilon]=1$ ，结果含 $\epsilon$ 的任意函数，须另外确定。

## 5.5 理想气体的压强

气体分子运动论认为压强 $p$ 来自分子对器壁的碰撞，理想气体分子无大小，设分子质量为 $m$，数密度为 $n$，温度 $\theta$ 衡量分子的运动能量。在

MLT量纲制中，各量的量纲为 $[p]=ML^{-1}T^{-2}$，$[m]=M$，$[n]=L^{-3}$，$[\theta]=ML^2T^{-2}$，量纲矢量矩阵的秩为3，可构造唯一的无纲量 $\pi_0=p/n\theta$，得 $p\propto n\theta$。如果用MLTΘ 量纲制，各量的量纲为 $[p]=ML^{-1}T^{-2}$，$[m]=M$，$[n]=L^{-3}$，$[\theta]=\Theta$，量纲矢量矩阵满秩，不存在无纲量。但实际上Θ引入有纲量玻尔兹曼常数 $k_B$，且 $[k_B]=ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$，量纲矢量矩阵的秩为4，可构造唯一的无纲量 $\pi_0=p/nk_B\theta$，得一致结果 $p\propto nk_B\theta$。

### 5.6 宏观性质和原子间力

现在分析物体宏观性质可能如何依赖于原子间力。设原子间力取 $f=Br^{-n}-Ar^{-2}$，此处 $n>2$ 固定，$A$，$B$ 为正但对不同材料可变，$A$ 项描写远程吸引，$B$ 项描写近程排斥。假定关键量有压强 $p$、温度 $\theta$、原子质量 $m$ 及力系数 $A$ 和 $B$。在MLT量纲制中，各量的量纲为 $[p]=ML^{-1}T^{-2}$，$[\theta]=ML^2T^{-2}$，$[m]=M$，$[A]=ML^3T^{-2}$，$[B]=ML^{n+1}T^{-2}$，可构造两个无纲量 $\pi_p=pA^{-(n+2)/(n-2)}B^{4/(n-2)}$ 和 $\pi_\theta=\theta A^{-(n-1)/(n-2)}B^{1/(n-2)}$。于是，可写 $\pi_p=F(\pi_\theta)$，压强 $p$ 和温度 $\theta$ 不再独立，此处的任意函数 $F$ 对于不同的 $A$ 和 $B$ 仍然同一，$\pi_p$ 和 $\pi_\theta$ 相当于范德瓦耳斯的对应态，是约化压强和温度。对于任何其他物理量 $q$，如热导率，可用 $m$，$A$，$B$ 无纲量化成 $\pi_q$，并可写 $\pi_q=\Phi(\pi_p,\pi_\theta)$。

考虑固体比热的一个问题：决定固体弹性的原子间力是否同样决定红外光学频率。为分析此问题，考虑特征频率 $\nu$、压缩率 $\kappa$、原子的质量 $m$ 和体积数密度 $n$，在MLT量纲制中，各自的量纲为 $[\nu]=T^{-1}$，$[\kappa]=[1/p]=M^{-1}LT^2$，$[n]=L^{-3}$，$[m]=M$，可构造唯一的无纲量 $m\nu^2\kappa n^{1/3}$，得 $m\nu^2\kappa n^{1/3}=$ 常数。以铜的实际值估计，常数值为0.18，仍处在1上下，可视作合理。

如果企图建立引力的电磁理论，则尝试考虑引力常数 $G$、电子电荷 $e$、质量 $m$ 和光速 $c$，在MLT量纲制中，各自的量纲为 $[G]=M^{-1}L^3T^{-2}$，$[e]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$，$[m]=M$，$[c]=LT^{-1}$，由唯一的无纲量得 $G\propto(e/m)^2$。以实际值估计的比例常数为 $2.4\times10^{-43}$，极不合理，表明应该放弃将引力归于电磁的想法。虽然量纲法不能确定比例因子，但实际估算值可指示分析的合理性。任何物理关系应该反映量纲关系，量纲分析可考察物理关系的真实性。

### 5.7 范德瓦耳斯方程和对应态

范德瓦耳斯方程 $p=NT/(V-Nb)-a(N/V)^2$ 是描述临界现象的一个模型。在三相点附近，密度很高，吸引势相对于陡峭的排斥势而言很弱且几乎彼此相消，每个分子可看作处于均匀的负势背景中。此背景势应与密度成正比，对内能有贡献 $-aN^2/V$，相应有压强修正 $-a(N/V)^2$，得范德瓦耳斯方程。虽然范德瓦耳斯方程最初目的在于说明临界现象，但却更适于描述三相点附近。范德瓦耳斯方程可粗略地描述气液凝聚。低温的等温线有一个最大和一个最小。上升温度至一个特定值，等温线的最大和最小重合为一点，此点满足拐点条件：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T=0,\quad\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T=0\quad.$$

第一个方程表明压缩率无限。解此二方程可得

$$V_c=3Nb\,,\quad p_c=a/(27b^2)\,,\quad T_c=8a/(27b)\,.$$

此处 $T_c$ 即为临界温度。引入无量纲约化变量

$$\tilde{v}=V/V_c\,,\quad\tilde{p}=p/p_c\,,\quad\tilde{t}=T/T_c\quad,$$

可得对应态定律：

$$\left(\tilde{p}+\frac{3}{\tilde{v}^2}\right)\left(\tilde{v}-\frac{1}{3}\right)=\frac{8\tilde{t}}{3}\quad.\tag{4}$$

即范德瓦耳斯方程在临界温度附近有“普适”形式，与体系的物质构成细节无关，其意义深刻：即使范德瓦耳斯方程不可用，用对应态的无量纲量处理实验数据如将不同实验的数据绘制在一张图上，可揭示普适类。对应态强调物理问题中出现的各种特征尺度。

## 6 有纲物理常数的压缩与恢复

物理常数如重力加速度，常常以关键物理参量的形式进入物理问题。例如，考虑重力场中垂

直悬挂弹簧末端质量为$m$的质点的运动，设弹簧的自然长度为$l$，劲度系数为$k$，求弹簧长度$x(t)$随时间$t$的变化。牛顿方程为$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2=-k(x-l)+mg$，初条件为$x(0)=l,\ \mathrm{d}x(0)/\mathrm{d}t=0$。物理方程中常数的压缩，相当于经常看到的“可以选择单位使得$m=g=k=1$”的说法，此时牛顿方程变为$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2=-x+l+1$，初条件仍为$x(0)=l$，$\mathrm{d}x(0)/\mathrm{d}t=0$。量$m$，$g$，$k$的量纲分别为$M$，$LT^{-2}$，$MT^{-2}$，容易验证其量纲表示矩阵满秩，且$M=[m]$，$L=[gm/k]$，$T=[m/k]^{1/2}$。常数压缩过的方程解为$x=l+1-\cos t$。由之不难恢复物理常数。常数压缩实质上是作无量纲化。因为相对于常数压缩的单位选择，总有$m^{\alpha}g^{\beta}k^{\gamma}=1$，不管$\alpha$，$\beta$，$\gamma$取何值，所以任何量可乘以这样的因子，只是需保证量纲正确。例如，由解给出的频率$\omega=1$，因$[\omega]=T^{-1}$，$\omega=1$意味着$\omega=\sqrt{k/m}$。考虑到$[x]=L$，常数恢复后$x=l+(gm/k)[1-\cos(\sqrt{k/m}\,t)]$，满足要求：量纲正确，且$m=g=k=1$时退化为约化解。

现在再就单摆运动讨论物理常数的压缩与恢复。适当选择单位使得$m=g=l=1$，则体系的拉氏量退化为$\mathcal{L}=K-V=\frac{1}{2}\dot{\theta}^2-(1-\cos\theta)$，运动方程退化为$\ddot{\theta}+\sin\theta=0$，动量为$p_{\theta}=\dot{\theta}\omega=1$。至于物理常数的恢复，如由$[\omega]=t^{-1}$，得$\omega=\sqrt{g/l}$。

谐振子的拉氏量$\mathcal{L}=K-V=\frac{1}{2}m\dot{v}^2-\frac{1}{2}mkx^2$，适当选择单位使得$m=k=1$，则体系的拉氏量退化为$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\dot{x}^2-x^2)$，运动方程退化为$\ddot{\theta}+x=0$，解$\sim\mathrm{e}^{\pm it}$，频率$\omega=1$。考虑到$[m]=M$，$[x]=L$，$[k]=MT^{-2}$，$[\omega]=T^{-1}$，常数恢复后$\omega=\sqrt{k/m}$，满足量纲要求，且$m=k=1$时退化为约化解$\omega=1$。在氢原子的量子问题中，适当选择单位使得$m=\hbar=k_e e^2=1$，则体系能级为$E_n=-\frac{1}{2}n^3$。

物理常数压缩的范例，是基于三大物理常数$\hbar$，$G$，$c$的普朗克自然单位：$\hbar=G=c=1$。在MLT单位系中，$[\hbar]=ML^2T^{-1}$，$[G]=M^{-1}L^3t^{-2}$，$[c]=LT^{-1}$，所以，$\sqrt{\hbar G/c^3}$，$\sqrt{\hbar G/c^5}$，$\sqrt{\hbar c/G}$，分别有长度、时间和质量的量纲，为普朗克基本长度、时间和质量，即所谓的绝对单位制。出现在公式中的物理量，实际上是相对于这三者的无纲量。有纲常数如引力常数通过自然定律引入，值随单位的选择而变。将与普适自然定律联系的基本常数取作1，可以反过来将度量单位决定于自然定律。选择哪些常数或定律，未必唯一；普朗克选择常数$G=c=h=1$。有时人们要求太多，如追问如此定出的长度单位是否有本质性的意义。普朗克的方案可以扩充，如另选玻尔兹曼常数$k_{\mathrm{B}}=1$，引入温度单位。

## 7 相似性理论和模型试验

量纲分析可用于复杂问题，通常描述问题的方程未知，更不消说解，但量纲分析将问题归结为少数无纲量的任意函数。工程技术领域中常用模拟试验代替真实试验如小模型风洞试验，经济又方便，且可超越实际限制。模型试验包括用模型动物进行的医学试验。1868年，弗劳德(W. Froude)彻底改革船舶设计，提出弗劳德数($v^2/gl$)用以指导小模型试验。他曾被嘲笑说，小模型也许带来无穷的乐趣，但没有任何实际意义，不过工程界最终转变了态度。模型试验的理论基础是基于量纲分析的相似性理论。虽然量纲分析中出现的任意函数的具体形式未知，只要保持无纲量不变，则模型的行为与原型等价。如果适当选取无纲量的组合，让它们在原型中固定，则所涉及函数的自变量数可以减少，模型试验可简化。当然，此处的相似性未必是几何相似性。只有同量纲量可以比较，体系间的物理相似性由无纲量刻画。另外，相对于描述问题的方程，定解条件如初条件和边条件的相似性应该一并考虑。

### 7.1 流体中运动物体的阻力

以在流体中运动的物体受阻问题为例讨论，特例包括空中飞行的炮弹或飞机、下落的雨滴和水下潜艇，物体的形状复杂，但可明确给定。假定重力影响可忽略，除待分析的阻力$\tau$外，至少应考虑物体的速度$v$、代表线度$l$及流体密度$\rho$、粘度$\mu$、声速$v_{\mathrm{ph}}$，还有描述形状的各种形比

参数，仅以单个符号$\gamma$记。形比为无纲量，在MLT量纲制中，其余6个量的量纲为$[\tau]=MLT^{-2}$，$[v]=[v_{ph}]=LT^{-1}$，$[l]=L$，$[\rho]=ML^{-3}$，$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$，可构造出无纲量$\pi_0=\tau/v^2l^2\rho$，$\pi_1=\rho vl/\mu\equiv\mathrm{Re}$，$\pi_2=v/v_{ph}$，一般关系可表作$\pi_0=F(\pi_1,\ \pi_2,\ \gamma)$，即$\tau=\rho l^2v^2F(\pi_1,\ \pi_2,\ \gamma)$。

在$\pi_2\ll1$的低速情形下，$\pi_2$影响可略，要求阻力正比于速度，得$\pi_0\pi_1=f(\gamma)$，即$\tau=vl\mu f(\gamma)$，具有斯托克斯阻力公式的形式，相当于$1/\pi_0$的小Re展开。此时保持完全几何形比相似的条件下，模型试验只有单参数。再增大速度，虽然$\pi_2$的影响仍可略，但密度的效应已需考虑，此时应取$\pi_0=f_2(\pi_1,\ \gamma)$，即$\tau=v^2l^2\rho f_2(\mathrm{Re},\ \gamma)$。保持完全几何形比相似的条件下，模型试验还需保证雷诺数一致。再继续增大速度，物体速度和流体介质声速可比，此时介质难以逃脱物体，粘滞效应次要，可设想$\pi_0=f_3(\pi_2,\gamma)$，即$\tau=v^2l^2\rho f_3(v/v_{ph},\gamma)$。此时模型试验受到严重限制。

如果考虑斯托克斯低速小球的阻力与重力平衡达到稳态速度，则$\tau\propto(\rho_0-\rho)d^3g$，相当于变量$\tau$以$g$替代，此处$\rho_0$为物体密度，此时$\pi_2\to\pi_2=\rho_0/\rho$，$\pi_0\to\pi_0=(\rho_0/\rho-1)dg/v^2$。流体力学公式为$v=\frac{8}{9}(\rho_0-\rho)gd^2/\mu$，相当于$\pi_0\pi_1=\frac{9}{8}$，与Π-定理不矛盾。

### 7.2 管道泊肃叶流动

考虑水平圆管道内流体的流动，主要物理量为管直径$d$、流体密度$\rho$、粘度$\mu$、平均流速$\bar{v}$和压强梯度$\gamma\equiv\Delta p/\Delta l$。在MLT量纲制中，$[d]=L$，$[\rho]=ML^{-3}$，$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$，$[\bar{v}]=LT^{-1}$，$[\gamma]=ML^{-2}T^{-2}$，可构造两个无纲量$\pi_1=\rho d\bar{v}/\mu\equiv\mathrm{Re}$和$\pi_2=\gamma d/\rho\bar{v}^2$，前者是流体力学中非常重要的无纲参数雷诺数。记管道截面$S=\pi d^2/4$，则根据Π-定理，可写$\pi_2=\Phi(\pi_1)$，进而管道截面总压力梯度$\Gamma\equiv\gamma S=\frac{1}{4}\pi\rho\bar{v}^2d\Phi(\mathrm{Re})$。函数$\Phi(\mathrm{Re})$称为管道阻力系数。流量$Q_v\equiv\bar{v}S$，由$\mathrm{Re}\,\pi_2=\gamma d^2S/\mu Q_v$，得$Q_v=\pi\gamma d^4/4\mu\,\mathrm{Re}\,\Phi(\mathrm{Re})\equiv(\gamma d^4/\mu)\Psi(\mathrm{Re})$。

管道流动问题已归结为求函数$\Phi(\mathrm{Re})$，实验测定$\Phi$时，可用不同的流体、流速、密度、管径和压差，实验数据按$\pi_2$和$\pi_1=\mathrm{Re}$应落在同一条曲线上。管道流动有层流和湍流不同形式，函数$\Phi(\mathrm{Re})$相应有两支，小Re支对应层流。

泊肃叶流考虑的问题很类似，主要物理量为管直径$d$、流体密度$\rho$、粘度$\eta$、平均流速$\bar{v}$、管长$l$和压降$\Delta P$。物理量数仍为6，现在$[\Delta P]=ML^{-1}T^{-2}$，$[l]=L$，量纲表示矩阵的秩仍为3。无纲量除$\mathrm{Re}=\rho dv/\eta$外，另有$\Delta P/\rho v^2$和$d/l$。最终$\Delta P=\rho v^2\Phi(\mathrm{Re},d/l)$。

## 8 标度律

伽利略曾明确地表述："体形越小，其相对强度越大。因此，一只小狗能够背负两三只与自身同等大小的狗，但我相信，一匹马连一匹与自身同等大小的马都驮不了。"这些动物的机体构成相似，密度$\rho$及其他材料性能彼此相似。衡量材料机械强度的量是体模量$B$，量纲如压强即如单位面积受力。动物所受的重力与体积即线度$l$的立方成正比，承重的截面积$A\propto l^2$，应该将$\rho gl^3/l^2=\rho gl$与体模量比较，强度要求$\rho gl<B$，小动物胜出。

鸵鸟是世界上最大的鸟，不会飞是因为翅膀退化吗？飞翔的必要条件是举力$f$克服体重$W$，按高雷诺数估计的举力$f=CS\rho v^2$，式中$S$为翅膀面积，$\rho$为空气密度，$v$是起飞速度，$C$为无纲比例因子，得起飞条件$v>\sqrt{mg/CS\rho}$。从简单的几何相似性出发，因$m\propto l^3$，$S\propto l^2$，有$v\propto\sqrt{l}$。燕子的最小飞行速度约20 km/h，鸵鸟的$l$约大25倍，临界起飞速度应大5倍为100 km/h，鸵鸟奔跑不慢，但最高速度不过40 km/h，不足以起飞。

狭义的标度律，通常表现为单项式。标度律，从严谨的量纲分析来看，是必要而未必充分，相当于简化版的量纲分析。如果问题足够简单且有能力把握问题的关键量，使得无纲量只有一个，此时标度律是确定的。从完整的量纲分析出发，再区分退化情形，得到标度律，才是稳妥

的做法，可以参考前面关于饮料加冰冷却的例子及流体中运动物体的阻力的例子讨论。标度律，几何上对应于分形。标度律被用于描述各种复杂现象，如前面提到的代谢率与动物体重的克莱伯3/4次幂定律。

## 8.1 承重圆柱的标度律

建筑物的承重圆柱，其重量随着体积增长而增长，其构成材质的机械性能变化不大。设柱长为$l$，截面半径为$r$，密度为$\rho$，弹性模量为$Y$。重压下发生侧弯的弯弧半径为$R$，张角为$\theta$，则$\theta \sim l/R$，柱高相对变化为$\Delta l/l=[R\theta-2R\sin(\theta/2)]/R\theta \sim \theta^2$。将承重侧弯的圆柱看作是垂直放置的弹簧，则弹性能$\sim\theta^2$。弹性曲线的能量正比于平方曲率沿曲线的积分$R^{-2}l$，而$Y$与压强同量纲，由量纲分析给出的圆柱形变弹性能$\sim Yr^4\theta^2/l$。仅考虑自重，形变引起的重力势能改变为$mg\Delta l \sim r^2 l\rho g\cdot l\theta^2=r^2l^2\rho g\theta^2$。稳定条件要求形变弹性能大于重力势能改变，$\gamma Yr^4\theta^2/l>r^2l^2\rho g\theta^2$，此处$\gamma$为无纲比例因子，临界柱长为$l_c=(\gamma Yr^2/\rho g)^{1/3}\sim r^{2/3}$，表明柱长增大比半径慢。各量量纲$[l]=[r]=L$, $[\theta]=1, [\rho]=ML^{-3}, [g]=LT^{-2}, [Y]=ML^{-1}T^{-2}$，无纲量$\pi_0=Y/\rho gl, \pi_1=\theta, \pi_2=r/l$，为得到上面的标度律，需要一些额外的知识。梁柱的负载由其横截面积支撑，在构成材质不变的条件下，其强度取决于其横截面积，随着线度增长强度变弱，需增大横截面以保证强度。人们往往习惯于线性思考，忘记标度律。树干的半径和高度，或者动物四肢的半径和长度，包括心率与代谢率等，会随体形的增长而发生不同比例的变化，1/4-次幂标度律是生物学的普遍特征[12]。

## 8.2 大气声波：等温或绝热？

声波中压强和密度在变，意味着温度也在变。如果运动足够快，来不及传热，过程绝热；如果运动足够慢，可充分传热，过程等温，前者和后者似乎分别对应高、低频。然而，实际并不如此简单，高频波的波长短，传热距离也短，有利于等温，低频波有相反趋势。量纲分析可解决直觉上的矛盾。傅里叶定律描述热传导：$\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T$，热量守恒：$\rho C_v\partial T/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{q}=0$，联合得热扩散的方程为$\partial T/\partial t=D\nabla^2T$，此处扩散系数$D=\kappa/\rho C_v$有量纲$[D]=L^2T^{-1}$。声波中波长$\lambda$和频率$\nu$是关键量，分别有量纲$[\lambda]=L$，$[\nu]=T^{-1}$，可构造无纲量$\pi\equiv D/\lambda^2\nu$。如果$D$很大，表明热扩散很快，声波等温，否则绝热。但是$D$为有纲量，无法简单说大小，必须以无纲量$\pi$衡量大小，决定过程是否等温。大气声速约340 m/s，且色散不显著。因为声速$v_{\rm ph}=\lambda\nu$，等温判据可写作$D\nu/v_{\rm ph}^2>1$，或$\nu>v_{\rm ph}^2/D\equiv\nu_c$。大气的$\nu_c\sim1000$ Hz，频率在此以下的声波绝热。

## 8.3 瑞利的蓝天解释

最早解释蓝天的是Tyndall，他做红外实验需要极清洁的空气，发现不洁空气中的尘埃会散射光，打进一束强光可检测空气是否清洁。他还发现散射光偏蓝，透射光偏红，并大胆联系到蓝天解释。Tyndall的解释不完全对，日光非白光，接近黑体谱，散射体主要不是尘埃，看到的不是波长更短的紫色，这与人眼的光敏感性有关。瑞利进一步审视了Tyndall的解释。光如何被尘埃散射？此处不涉及光是波或是粒子的量子问题，即可将之看作经典电磁波。受电磁波驱动，原子如受激偶极子，即原子吸收电磁场能量而振动，又在各个方向再发射辐射。这是瑞利散射，是原子或小粒子对光的一种弹性散射，粒子尺度可只比波长小一量级。设幅度$E_i$均匀的电磁波投射到体积$V\sim L^3$上，如果线度$L\ll\lambda$，远小于波长，整个体积将同相位受激振荡，有散射幅$E_s\sim L^3$。散射强度$I_s=E_s^2$，在各方向随距离$r$以$1/r^2$衰减：$I_s\sim L^6/r^2$。考虑到$E_s\propto E_i$及量纲平衡，应有$I_s\sim E_i^2L^6/r^2\lambda^4\sim\nu^4$，得瑞利的$\nu^4$-律。白云，看起来灰白，其水滴尺寸比分子大得多，散射以米氏散射为主，不大依赖于波长。

## 8.4 科尔莫戈罗夫湍流能谱

1941年科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)发表了各向同性稳态湍流能谱即湍流能量依湍涡尺度分布的公式。虽然未必与实验一致，却是湍流理论的奠基性工作。记相应于湍涡尺度 $l$ 的波数 $k=2\pi/l$ ，湍涡 $k_1$，$k_2$ 到 $k_3$ 的能量转移满足选择定则 $k_3=k_1+k_2$ ，有两类极端情形： $k_3\approx 2k_1$ 或 $k_3=k_1+\delta\approx k_1$ ，Kolmogorov考虑前者。在所谓的波数惯性区内耗散不重要，Kolmogorov公式适用于惯性区。设湍涡尺度为 $d$，特征速度为 $u$，则特征时间 $\tau=\pi d/u$ 。稳态下能量在不同尺度间的转移率 $\varepsilon$ 应对所有尺度等同，提供给 $d_{\max}$ 的能量等于在 $d_{\min}$ 耗散的能量，且 $[\varepsilon]=[E/mt]=L^2T^{-3}$ 。湍涡速度 $u$ 应只依赖于 $d$ 和 $\varepsilon$ ，由量纲法得 $u\sim(d\varepsilon)^{1/3}$ ，特征时间 $\tau\sim d^{2/3}\varepsilon^{-1/3}$ 。最小湍涡取决于粘性 $\nu$ ，因为湍涡越小粘性越重要。由 $[\nu]=[\mu/\rho]=L^2T^{-1}$ ，得 $d_{\min}\sim\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$ 。体系尺度 $L\sim d_{\max}$ ，相应的速度 $U\sim(\varepsilon L)^{1/3}$ ，得长度标度比 $d_{\max}/d_{\min}=L/\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}=(UL/\nu)^{3/4}=\mathrm{Re}^{3/4}$ ，此处推导用到 $\varepsilon\sim U^3/L$ ，进而速度标度比 $u_{\max}/u_{\min}\sim(\varepsilon d_{\max}/\varepsilon d_{\min})^{1/3}=\mathrm{Re}^{1/4}$ 。定义 $E(k)$ 为能量密度，即 $E(k)dk$ 有能量/质量的量纲，所以 $[E(k)]=L^3T^{-2}$，$E(k)\sim k^{-3/5}\varepsilon^{2/3}$。

# 9 结语

物理定律不依赖于测量单位的选择，是最基本也最简单的对称性。物理规律最终必然只能用无纲量表达，由此带来独立有效物理量数的约化即降低问题的自由度，且更深刻反映物理量间的内在关系。通过简单分析一个问题中各物理量的量纲，可以给出问题的有效变量数目和可能形式，限制这些物理量间的某种可能关系。虽然量纲法不能预言明确的函数关系，但其结论也表现出与任何具体的函数形式无关的普适性。量纲分析方法是探讨科学规律、解决科学和工程问题的一个普适工具，非常值得学习和掌握。但十分奇怪的是，虽然量纲分析的原理极其简单，如此重要的量纲分析方法，却一般不在物理课程中系统讲授。量纲分析的范例不少是科学大作。量纲法不能事先确定关键物理量是哪些，决定量纲分析成败的，是如何确定问题的关键物理量，涉及如何简化问题，物理因素有哪些，孰轻孰重，需要有高深的科学修养、丰富的物理知识以及对问题的深刻理解，特别是对于新出现的科学问题，如处理涉及生命的现象。一旦单位制确定，量纲制也确定，但反之不然。仅就量纲分析操作而言，可以只用MLT量纲制。一个问题的有效变量数目和形式，不会因量纲制不同而有本质改变。量纲法属于定性和半定量方法，许多物理人理解定性方法似乎是不得以而为之，其实数学上的定性方法回答有无，往往并非定量方法可比。量纲分析在各个领域均有应用，流体力学是传统领域，生物医学则是新兴领域。本文的大部分内容只是一些文献的整理和总结，也企图厘正文献中的一些混乱。

**参考文献**


[1] Fourier J B J. Analytical Theory of Heat. New York：Dover Pub.，1955

[2] 谈庆明. 量纲分析. 合肥：中国科技大学出版社，2007

[3] 孙博华. 量纲分析与Lie群. 北京：高等教育出版社，2016

[4] 赵凯华. 定性与半定量物理学. 北京：高等教育出版社，2007

[5] 梁灿彬，曹周健. 量纲理论与应用. 北京：科学出版社，2020

[6] Rayleigh J S W，Strutt B J W. The Theory of Sound. MacMillan，1877

[7] Rayleigh J S W. Nature，1915，95：66

[8] Bridgman P W. Dimensional Analysis，2nd ed. New Haven：Yale University Press，1931

[9] White F M. Fluid Mechanics，4th ed：Ch. 5 Dimensional Analysis and Similarity. McGraw-Hill College，1998

[10] Sonin A A. The Physical Basis of Dimensional Analysis，2nd Ed. Cambridge：MIT，2001. http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/DA unified.pdf

[11] Buckingham E. Phys. Rev.，1914，4：345

[12] West S G 著，张培 译. 规模：复杂世界的简单法则. 中信出版集团，2018