庞加莱的狭义相对论之二 物理学定律的对称性

金晓峰†
(复旦大学物理学系 上海 200438)

2022－03－26收到
† email：xfjin@fudan.edu.cn
DOI：10.7693/wl20220408

庞加莱1905年的两篇同题文章《论电子的动力学》，虽被主流学术界遗忘一百多年，但终究会被载入史册从而成为整个物理学经典中之经典。他所发现的洛伦兹群，已与量子观念一起构成了现代物理学公认的两大基石之一。他所建立的四维时空的赝欧几里得几何，让时间t与空间x，y，z一样变为相对量，进而产生出同时性的相对性、时间膨胀、长度收缩等人们至今仍津津乐道的话题。他所建立的四维相对论运动方程，终结了牛顿运动方程对物理学长达两百余年的统治，使之变为狭义相对论的低速近似规律。他所证明的电动力学的完整协变性，让运动物体的电动力学从物理学前沿研究变成相关应用学科的必备基础，也变成大学课堂上聚讼纷纭的永恒主题。

我们在上期《庞加莱的狭义相对论之一：洛伦兹群的发现》(《文一》)中，介绍了庞加莱《七月文章》的重要发现之一：洛伦兹变换(boost)与空间转动一同构成了一个群。这个洛伦兹群的存在，直接导致了四维时空的赝欧几里得几何(pseudo- Euclidean geometry)，从而奠定了狭义相对论的运动学基础。在四维时空中看，两个惯性系之间的相对运动就相当于四维笛卡尔坐标轴转了一个角度，而保持间隔$s^2=x^2+y^2+z^2-(ct)^2$或微分时空间隔$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-(cdt)^2$不变(“赝”反映在这里的负号上)。正是这一时空几何性质让时间t与空间x, y, z一样变为相对量，并产生如“同时性的相对性”、“时间膨胀”、“长度收缩”等陌生而有趣的概念。百年之后回头看，对洛伦兹群发现的重要性怎么强调都不为过，因为它已与量子观念一起构成了现代物理学公认的两大基石之一。庞加莱的这一发现，或许可以看作是对毕达哥拉斯“万物皆数”的绝佳阐释，恰如著名数学家盖尔方特所说：“数学是文化的一部分，……优美、简单、精确和不可思议的思想这四个东西的组合，正是数学的核心。”

对于物理学定律的对称性，费曼曾说：“我如此详细地谈论这个具体例子，是因为它开启了物理学定律的对称性研究。正是庞加莱，他提出了可以对方程做什么而使之不变的分析；也正是庞加莱，他主张对物理定律的对称性给予重视。空间平移，时间延迟等对称性并不很深刻，但是，由均匀一致速度带来的对称性却非常有趣，而且产生了一系列后果。不止于此，这些后果还可以被拓展到我们未知的定律之中。”(I bring this particular example up in such detail because it is really the beginning of the study of symmetries in physical laws. **It was Poincaré's suggestion to make this analysis of what you can do to the equations and leave them alone. It was Poincaré's attitude to pay attention to the symmetries of physical laws.** The symmetries of translation in space, delay in time, and so on, were not very deep; but the symmetry of uniform velocity in a straight line is very interesting, and has all kinds of consequences. Furthermore, these consequences are extendable into laws that we do not know.) 那么，究竟什么是物理学定律的对称性呢？对称性对任何人都不陌生，日常生活中随处可见，比如，圆形的餐桌，正方形的地砖，左右对称的人脸等等，数不胜数。我们发现：任意一个对称的几何图形，总存在一些让图形保持不变(leave them alone)的操作(what you can do)。比如，将圆形的餐桌转过任一角度，图形不会变；将正方形的地砖转过90°、180°、270°、360°，图形也不变；将左(或右)半脸作镜面反射，图形也不变等等。用数学的语言讲，对任一给定的几何图形，保持图形不变的操作被称为对称操作，所有这些对称操作的集合可以构成一个群。换句话说，我们称这个几何图形具有该群的对称性。所谓物理学定律的对称性，即相应物理公式的对称性，顾名思义，也就是保持方程形式不变的对称操作，这些操作也构成一个群；类似的，我们也称

这个物理学定律具有该群的对称性。下面我们将会看到，庞加莱在《七月文章》中如何具体证明麦克斯韦—洛伦兹方程组等一系列物理定律具有洛伦兹群的对称性，这正是费曼所说的“It was Poincaré’s suggestion to make this analysis of what you can do to the equations and leave them alone. It was Poincaré’s attitude to pay attention to the symmetries of physical laws.”其中，他最先发现了电磁作用量的洛伦兹不变性(the invariant action)。十多年后的1918年，Emmy Noether正是从研究对称操作下的作用量不变性出发，揭示出对称性与守恒量之间的密切关系(Noether定理)，充分彰显了物理学定律的对称性研究之重要性。同时，正是基于对方程的对称性要求，庞加莱发现了电子的四维相对论运动方程这一原本并不存在的全新方程，这也正如费曼所说的“But the symmetry of uniform velocity in a straight line is very interesting, and has all kinds of consequences. Furthermore, these consequences are extendable into laws that we do not know.”

本文接下来将详细介绍庞加莱《七月文章》的下述两项重要成果：(1)严格证明电动力学的完整协变性。庞加莱不仅证明了麦克斯韦方程组的协变性，而且还证明了带电粒子运动方程的协变性，从而彻底解决了长期争论不休的动体电动力学这个难题。(2)发现电子的四维相对论运动方程。庞加莱首先证明了作用量的洛伦兹不变性，并以此为基础获得了电子的四维相对论性运动方程，一举奠定狭义相对论的动力学基础，从此终结了牛顿运动方程对物理学长达两百余年的统治，使之成为狭义相对论的低速近似规律。

1 矢量的洛伦兹变换

意识到四维时空具有洛伦兹群的对称性极其重要，它直接导致了一系列影响深远的重要后果，或许这就是数学“不可思议的思想”。庞加莱正是从这里出发，**严格证明了**电动力学定律具有洛伦兹群的对称性；必须强调指出，电动力学完整的协变性，不仅包含麦克斯韦方程组的协变性，而且还包含带电粒子运动方程的协变性。下面我们将看到，洛伦兹和爱因斯坦都证明了无源麦克斯韦方程组的协变性。对于有源麦克斯韦方程组，洛伦兹做错了，而爱因斯坦只证明了它们与相对性原理是兼容的(爱因斯坦原话的英文翻译是agree with)，只有庞加莱严格证明了它们的协变性，即由洛伦兹变换从 S 系中的方程组严格导出 S' 系中形式完全相同的方程组。对于带电粒子的相对论运动方程，爱因斯坦没能得到，而庞加莱得到并证明了它的协变性。

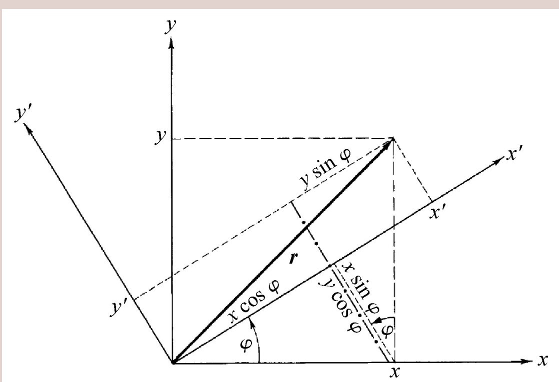

图1　二维空间的转动示意图

难道庞加莱有什么“独门神器”吗？别说，他还确实有，那就是四维时空的赝欧几里得几何！为了清楚地说明这点，让我们以二维空间的转动为例[1]。如图1所示，将(x, y)坐标轴逆时针旋转 φ 角度可得(x', y')坐标轴，矢量 $\boldsymbol{r}$ 在这个转动过程中保持不变，它在 S' 系和 S 系的关系式如下：

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi\ ,$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi\ .$$

很显然，二维间隔 $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ 是坐标轴转动前后的一个不变量。这个二维空间的欧几里得几何性质，将直接导致一个重要后果，即这个空间中的矢量 $\boldsymbol{W} = (W_x(x,y),\ W_y(x,y))$ 一定满足与 $\boldsymbol{r}$ 矢量同样的变换方式，即

$$W_x' = W_x\cos\varphi + W_y\sin\varphi\ ,$$
$$W_y' = -W_x\sin\varphi + W_y\cos\varphi\ .$$

换句话说，对于在(x, y)坐标系中的一对量 W_x 和 W_y，如果它们在坐标轴转动后按上式变换成(W_x', W_y')，那我们就定义 W_x 和 W_y 是一个矢量 $\boldsymbol{W}$ 的分量。有了这样的简单铺垫，回头来看洛伦兹群的任一对称操作会产生什么结果。为简单起见，这里仍只考虑 y, z 不变的特殊情况，即坐标轴在 x— $\mathrm{i}ct$ 平面内旋转角 θ 后的洛伦兹变换[2]。与上述讨论完全类似，我们有：

$$x' = x\cos\theta + (\mathrm{i}ct)\sin\theta\ ,$$
$$\mathrm{i}ct' = -x\sin\theta + (\mathrm{i}ct)\cos\theta\ .$$

令 $\theta = \mathrm{i}\varphi$ 上式就变成我们熟悉的变换(《文一》的式(5))：

$$x' = x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi\ ,$$
$$ct' = -x\sinh\varphi + ct\cosh\varphi\ ,$$

这里

$$\sinh\varphi=\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,$$

$$\cosh\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ .$$

代入上式，便得到我们熟悉的洛伦兹变换式：

$$\begin{aligned}x'&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x-vt)\ ,\\ t'&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\ .\end{aligned}\tag{1}$$

很显然，这里的时空间隔 $x^2-(ct)^2=x'^2-(ct')^2$ 是坐标轴转动前后的一个不变量。而这一赝欧几里得几何性质，同样将直接导致一个重要后果，即时空矢量 $\boldsymbol{W}=(W_x, W_t)$ 的变换必须与(1)式的形式完全相同，即：

$$\begin{aligned}W_x'&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(W_x-vW_t)\ ,\\ W_t'&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(W_t-\frac{v}{c^2}W_x\right)\ .\end{aligned}\tag{2}$$

显然，若没有四维时空的图像，这个结果是不可想象的。接下来我们将会看到，这一矢量变换式在相对论动力学中起了至关重要的作用，这也可以算是庞加莱的“独门神器”吧。

庞加莱当然非常清楚这一点。在《文一》中笔者曾经指出，他显然比任何人都清楚《七月文章》的第4节应该放在第1节才是顺理成章的文章写法，但为了避免“喧宾夺主”，他没有这么做。或许不少读者对此不以为然，认为这只是笔者的过度解读而已。事实上，庞加莱在《六月文章》(即《七月文章》的详细摘要)的引言(背景介绍)之后，紧接的是下面这段话(完全是第4节的结论)：

“在这个(洛伦兹)变换中，x 轴扮演了特殊的角色，但我们显然可以构造这样的变换，在这里某一条通过原点的直线将扮演这个角色。所有这样的变换加上所有的空间转动的整个集合构成了一个群；但这必须要求 $l=1$，这正是洛伦兹用另一种方式得到的结果。

显然，庞加莱在这里明确告诉我们，洛伦兹群是整个工作的基础，而且惯性系间沿 x 轴以 v_x 运动的特例，被推广到了相互间以 $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$ 的一般运动。但为什么 (x', y', z') 和 (x, y, z) 轴相互间的平动，会得出与空间转动相关的结论呢？唉，他没说！庞加莱文章难懂的一个重要原因就是，他总给出一些重要的结论，但中间步骤却总需要读者自己补上。补不上，则完全不知所云；补上了，立马觉得他真是深不可测。比如，他在这里省略了下列推理过程：当 S' 系相对于 S 系以 $\boldsymbol{v}_1$ 运动，它们之间的洛伦兹变换 (boost) 记为 $L(\boldsymbol{v}_1)$；类似地，若 S'' 系以 $\boldsymbol{v}_2$ 相对于 S' 系运动，则它们之间就存在 boost $L(\boldsymbol{v}_2)$；如果 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 不在同一方向，当然可以按照庞加莱的相对论速度相加公式得到这两个速度的合成速度 $\boldsymbol{v}_3$，这实际上就是 S'' 系相对于 S 系的运动速度，当然也存在相应的 boost $L(\boldsymbol{v}_3)$。与一维的情形完全不同，三维情形下的 $L(\boldsymbol{v}_3)\neq L(\boldsymbol{v}_2)L(\boldsymbol{v}_1)$，而有 $L(\boldsymbol{v}_3)=RL(\boldsymbol{v}_2)L(\boldsymbol{v}_1)$，这里的 R 是嵌入在四维时空中的三维空间转动。换句话说，当 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 不平行时，洛伦兹群的对称操作要求 S'' 系相对于 S 系转过一个空间角度，这是由四维时空的赝欧几里得几何所决定的。由此我们知道单独的 boost $L(\boldsymbol{v})$ 并不构成一个群，这就是为什么庞加莱每次在讲到洛伦兹群时，总说由洛伦兹变换 $L(\boldsymbol{v})$ 与空间转动(R)一同构成。不得不说，这种类型的结果，除了数学“不可思议的思想”，很难想象可以通过思想实验或别的任何方法来得到。庞加莱的《六月文章》正是在讲完了这段群论的结论之后才开始阐述具体结果。

首先，庞加莱更正了洛伦兹1904年文章中的两个错误。当然，一如既往，他不说洛伦兹做错了，而是说“(我)这里的公式与洛伦兹之前得到的不太一样(different somewhat)”，典型的庞加莱风格！因为要证明有源麦克斯韦—洛伦兹方程组的协变性，所以必须要知道电荷密度 ρ 与电流密度 $\rho\boldsymbol{u}$ 在洛伦兹变换下如何变换，这是问题的核心也是难点。下面是庞加莱的正确结果：

$$\begin{aligned}\rho' u_x'&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(\rho u_x-v\rho)\ ,\\ \rho' u_y'&=\rho u_y\ ,\\ \rho' u_z'&=\rho u_z\ ,\\ \rho'&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\rho-\frac{v(\rho u_x)}{c^2}\right)\ .\end{aligned}\tag{3}$$

这里的 v 是 S' 系相对于 S 系的运动速度(沿 x 方向)。将(3)式与(2)式进行比较，马上就会发现：$\rho u_x=W_x$，$\rho=W_t$；现在若将 y, z 也考虑进来，不难看出 $(\rho\boldsymbol{u}, \rho)$ 构成了四维时空的一个矢量。

其次，庞加莱给出了洛伦兹变换下力的正确变换公式。必须指出，无论是证明(庞加莱版本)或者说明(爱因斯坦版本)有源麦克斯韦方程组的协变性，相对于证明无源麦克斯韦方程组的协变性，都是一

个重要进展，但这还不是电动力学或电磁规律的完整协变性。只有在进一步证明带电粒子在电磁场中的运动方程也是协变的，电动力学的协变性才算完整；这当然要以能得到电子相对论运动方程，即超越牛顿第二定律的运动方程为前提。在当今的教科书和文献上，相对论运动方程几乎都被冠以爱因斯坦的名字，但不得不说，这个方程与爱因斯坦真没关系，因为至少到1907年他还不知道如何对力进行变换(具体内容见后)。下面是庞加莱对三维力的变换结果。

$$f_x{}'=\frac{f_x-v(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\qquad f_y{}'=f_y\ ,\ f_z{}'=f_z\ . \tag{4}$$

这里的 f 是单位体积的力。将这里的 f_x 变换式与(2)式进行比较，难道不是很显然，还应该存在第四维力 $f_t=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}$ 吗？当然是！庞加莱在《七月文章》第9节中，明确将 (f_x, f_y, f_z, f_t) 称作是四维时空中的一个点，“因此 (f_x, f_y, f_z, f_t) 以 (x, y, z, t) 的同样方式变换”。上面是对单位体积的力作变换，下面是庞加莱对单位电荷的力作变换：

$$F_x{}'=\frac{\rho}{\rho'}\frac{F_x-v(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,\qquad F_y{}'=\frac{\rho}{\rho'}F_y\ ,\ F_z{}'=\frac{\rho}{\rho'}F_z\ . \tag{5}$$

这里的公式(3)、(4)、(5)是庞加莱《六月文章》给出的除洛伦兹变换式外仅有的三个数学式子，每个公式都非常重要。(3)式是严格证明有源麦克斯韦方程协变性的基础；(4)和(5)式是得到电子相对论运动方程的基础。这正是笔者在《文一》中说下面这段话的依据：“当庞加莱写下‘洛伦兹群的任一变换，…是保持 $x^2+y^2+z^2-(ct)^2$ 不变的一个线性变换’时，作为大数学家和大数学物理学家的庞加莱，心里一定清楚，整个问题已经解决，剩下的只是一些细节了。”下面我们将重点展示庞加莱在《七月文章》中如何证明电动力学的完整协变性，以及如何发现电子的四维相对论运动方程。事实上，他的其他内容也都极其精彩，但我们只能忍痛割爱了。

2 麦克斯韦方程组的完整协变性

庞加莱《七月文章》第1节是“洛伦兹变换”，他一口气罗列出下面11个他称作基本方程的公式：

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}+\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{H}\ ,$$

$$\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}\ ,\quad \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\nabla\varphi\ ,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}=-\nabla\times\boldsymbol{E}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0\ ,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho\ ,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi+\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\ ,$$

$$\Box\varphi=-4\pi\rho\ ,$$

$$\Box\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{u}\ ,$$

$$\Box=\nabla^2-\frac{\partial}{c^2\partial t^2}\ ,$$

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{\rho}{c}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\ . \tag{6}$$

然后根据下列洛伦兹变换式：

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x-vt)\ ,$$

$$y'=y\ ,\quad z'=z\ ,$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ . \tag{7}$$

逐一证明了这11个方程的协变性，即在 S 系中成立的公式，经洛伦兹变换后，在相对于 S 系沿 x 方向以 v 运动的 S' 系中形式完全不变(只是相关物理量从不带撇的变成带撇的而已)。

我们不打算重现他的全部证明，仅仅给出下面几个爱因斯坦1905年文章中没做(如I)或做不了(如II和III)的证明。

(I)对连续性方程 $\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0$ 的协变性证明非常关键。这需要既独立获得 $\boldsymbol{u}$ 的变换(即相对论性的速度相加公式)，也独立获得 ρ 的变换才可能达到。因为洛伦兹两个都没得到，所以他没能说明有源麦克斯韦方程组的协变性；因为爱因斯坦只得到了前者而没有得到后者，所以他只能证明麦克斯韦方程组与相对性原理是兼容的；因为庞加莱得到了两者，所以只有他才能严格证明有源麦克斯韦方程组的协变性。

庞加莱考虑在 S 系中以速度 $\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$ 运动着的一个球状电子(Let a sphere be carried along with the electron in a uniform translational motion)(笔者提醒：**是在 S 系中看起来的球状，不是静止着的一个球状电子！**)，球面满足方程：

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t)^2=r^2\ .$$

球的体积为 $4\pi r^3/3$ 。但这个电子在 S' 系中将满足什么样的方程呢？庞加莱说，洛伦兹变换式(7)将让这个运动着的电子在 S' 系中变成一个椭球；只要将(7)式的逆变换直接代入上式，便可得到相应椭球方程(见原文)，椭球体积为：

$$\frac{4}{3}\pi r^3\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{vu_x}{c^2}}\ .$$

这个结果非常重要。让我们看看下

面两个特例：

(1)假定电子静止在 S 系中，即上式中的 $u_x=0$，则上式意味着在 S' 系中的观察者将看到一个在 x 方向上洛伦兹收缩的椭球。这与我们今天的教科书上一般习惯于在 S 系中观察 S' 系中静物的洛伦兹收缩完全一样(庞加莱在之后的章节当然也做了)；事实上，这才是《文一》中提及的庞加莱所说 S 系与 S' 系"互为完全相同的影像(become exact images of each other)"的真正含义。

(2)假定 S' 系的运动速度与电子的 x 方向运动速度相对于 S 系是一样的，即 $u_x=v$，则上式意味着在 S' 系(即电子的静止参照系)中的观察者将看到一个在 x 方向上膨胀的椭球。这正是前面笔者提醒的意思，因为在 S 系中运动着的电子如果看上去是一个球，那么在与电子相对静止的 S' 系中，它就不会再是一个球了。

有了上述结果，再假定电子电荷不随洛伦兹变换而变，庞加莱立刻得到电荷密度的变换：

$$\rho'=\frac{\rho-\dfrac{v(\rho u_x)}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \quad , \tag{8}$$

这正是前面(3)式中的最后一个式子。

另外，在 S' 系中的电子速度，根据定义 $u_x'=\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$，如果对(7)式的第一和第四式取微分，然后相除，马上得到

$$u_x'=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}(x-vt)}{\mathrm{d}\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right)}=\frac{u_x-v}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} \quad ,$$

这就是《文一》中提到的庞加莱只用了一行数学推导，就得到了相对论的速度相加公式(速度变换式)。类似地，

$$u_y'=\frac{u_y\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{\left(1-\dfrac{vu_x}{c^2}\right)} \quad ,$$

$$u_z'=\frac{u_z\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{\left(1-\dfrac{vu_x}{c^2}\right)} \quad .$$

这样，再与 ρ 的变换结合起来，庞加莱就得到了他《六月文章》给出的($\rho\boldsymbol{u}$，ρ)的全部变化关系，即(3)式。接着庞加莱进一步证明，他这样得到的 ρ' 和 $\rho'\boldsymbol{u}'$ 确实满足连续性方程：

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\nabla'\cdot(\rho'\boldsymbol{u}')=0 \quad .$$

作为比较，洛伦兹在1904年文章中得到如下结果：

$$\rho'=\frac{\rho}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \ , \quad u_x'=\frac{u_x-v}{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \ ,$$

$$u_y'=\frac{u_y}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}, \quad u_z'=\frac{u_z}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \ .$$

显而易见，这些速度和电荷密度的变换没有一个是正确的，因此这样的 ρ' 和 $\rho'\boldsymbol{u}'$ 也不可能满足连续性方程。虽然爱因斯坦从洛伦兹变换得到了正确的速度变换式，但没有从洛伦兹变换得到电荷密度变换式(8)，所以他只能证明麦克斯韦方程组与相对性原理是兼容的，即假定麦克斯韦方程组在 S 和 S' 系中都成立，从而推导出电荷密度的变换式(8)，但这与证明麦克斯韦方程组确实具有洛伦兹协变性是有差别的。真正的证明应该如庞加莱所做，即假定麦克斯韦方程组在 S 系中成立(没有要求在 S' 系成立)，则根据洛伦兹变换，该方程组在 S' 系中也必然成立(形式不变)。

(II) $\Box\varphi=-4\pi\rho$ 和 $\Box\boldsymbol{A}=-\dfrac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{u}$ 的协变性证明也很重要。利用(7)式直接可证达朗贝尔算符是一个不变量 $\Box'=\Box$，即 $\Box$ 是一个四维时空标量；从(3)式已知($\rho\boldsymbol{u}$，ρ)是一个四维时空矢量，所以不难看出 S 系中方程式 $\Box\varphi=-4\pi\rho$ 和 $\Box\boldsymbol{A}=-\dfrac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{u}$ 中的($c\boldsymbol{A}$，φ)也是一个四维矢量，这样便有如下变换式：

$$cA_x'=\frac{cA_x-v\varphi}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \quad ,$$

$$A_y'=A_y \quad , \quad A_z'=A_z \quad ,$$

$$\varphi'=\frac{\varphi-\dfrac{v(cA_x)}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \quad . \tag{9}$$

由此便能证明：

$$\Box'\varphi'=-4\pi\rho' \quad ,$$

$$\Box'\boldsymbol{A}'=-\frac{4\pi}{c}\rho'\boldsymbol{u}' \quad ,$$

以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t'}-\nabla\varphi' \ ,\\ \boldsymbol{H}'&=\nabla'\times\boldsymbol{A}' \ .\end{aligned} \tag{10}$$

其中($\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$)与($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$)的关系如下：

$$E_x'=E_x \quad , \quad E_y'=\frac{\left(E_y-vH_z/c\right)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad ,$$

$$E_z'=\frac{\left(E_z+vH_y/c\right)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad , \quad H_x'=H_x \quad ,$$

$$H_y'=\frac{\left(H_y+vE_z/c\right)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad ,$$

$$H_z'=\frac{\left(H_z-vE_y/c\right)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad . \tag{11}$$

(III)洛伦兹力 $\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\dfrac{\rho}{c}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})$ 的协变性证明也非常重要。爱因斯坦就是因为不知道力如何变换，所以没能得到电子的相对论运动方

程。利用前面得到的(3)和(11)式，庞加莱证明，变换后力的形式完全不变：$\boldsymbol{f}'=\rho'\boldsymbol{E}'+\frac{\rho'}{c}\left(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{H}'\right)$，从而得到力的变换：

$$f_x'=\frac{f_x-v(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\quad,$$

$$f_y'=f_y\quad,\quad f_z'=f_z\quad.$$

与前面的(2)式进行比较，很明显$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})$也构成了一个四维矢量。

庞加莱在第1节最后有下面的一段讨论，有趣而且重要，因此我们直接将原文翻译如下：

“假如电子的惯性(笔者注：即质量)是纯电磁起源的，而且假定它们只受电磁力的作用，那么在电子内部的平衡条件：$\boldsymbol{f}=0$，根据力的变换式(4)，这等价于$\boldsymbol{f}'=0$。因此，平衡条件不受(洛伦兹)变换的影响。不幸的是，这样一个简单的假定是不允许的，因为如果我们假设$\boldsymbol{u}=0$，便意味着$\boldsymbol{E}=0$。这样$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，也就是$\rho=0$(笔者注：推出了电子不带电的荒唐结果)。

类似的结果对一般情况(general case)也成立。所以，我们必须认为不仅仅只存在电磁力，而且应该有其他的力或约束。我们因而必须确定支配这些力或约束的条件，使得电子的平衡不受(洛伦兹)变换的影响，这将会在之后的一个章节中来做(笔者注：第6节)。”

这段话包含了两个非常重要的信息。一方面，由力的变换式(4)可知，$\boldsymbol{f}=0$这个等式相对于洛伦兹变换是协变的，这就明确表示，牛顿第一定律或说惯性定律对于经典力学和相对论力学同样适用。这就是为什么在狭义相对论中，这个从经典力学发展而来的惯性系概念也是整个新理论的基础。由于惯性定律常常冠以伽利略的名字，因此当狭义相对论的四维时空观，颠覆了伽利略时空观(绝对时间)，而将其视为一种极限情形(光速→∞)时，不免容易造成误解，以为惯性定律(牛顿第一定律)也不成立了。另一方面，庞加莱的结果表明，由于同性电荷的排斥作用，一个稳定的电子，除了电磁力外，必定存在非电磁的其他力来平衡同性电荷排斥力。值得提醒一下，庞加莱的“电子”(electron)一词，在其所有著作中都不仅仅用来指代我们今天所讲的电子，它同样适用于我们今天所讲的原子核以及正负离子，实际上与我们今天所说的无论带正电还是带负电的“带电粒子”更加吻合。他的《六月文章》和《七月文章》都以“On the dynamics of the electron”为标题，把它翻译成“论带电粒子的动力学”实际上更合适。

顺便说一下，洛伦兹的电动力学理论被称为洛伦兹电子论，这里的电子也作同样理解，它既指带负电也指带正电的带电粒子。特别是，麦克斯韦—洛伦兹方程组又被称为微观的麦克斯韦方程，就是因为在这组方程组的模型里，只有处于确定空间位置的带正负电荷的粒子及其它们的运动(构成电流)，剩下的就是真空(以太)。正像朗道的《连续介质电动力学》第一页上所说：“连续介质电动力学的基本方程组是通过对真空中的电磁场方程组进行平均而得到的。这一从微观得到宏观方程组的方法是由洛伦兹于1902年最先使用的。”简言之，宏观麦克斯韦方程组可由微观麦克斯韦—洛伦兹方程组平均而来。正因为后者比前者更加基本而且普遍，所以狭义相对论的奠基者洛伦兹、庞加莱、爱因斯坦事实上都是针对麦克斯韦—洛伦兹方程组来展开讨论的。这也是为什么朗道理论物理系列教程，在第二册《经典场论》中先讨论麦克斯韦—洛伦兹方程组，然后在第五册《连续介质电动力学》中讨论宏观麦克斯韦方程组的道理。

3 最小作用量原理

庞加莱《七月文章》的第2节和第3节分别是“最小作用量原理”和“洛伦兹变换与最小作用量原理”。他比任何人都敏锐地意识到，最小作用量原理与洛伦兹群是否兼容是一个非常重要的问题，这正是他在第3节中关注的核心问题。他首先在第2节中将整个麦克斯韦电动力学建立在最小作用量原理之上，然后在第3节中严格证明了作用量是洛伦兹变换下的不变量，这为接下来讨论电子的相对论动力学奠定了基础。

从最小作用量原理出发，庞加莱得到了电磁场的作用量表达式

$$J=\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t\left(\frac{\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\right)\quad,\quad(12)$$

并证明了它在洛伦兹变换下是一个不变量，即$J'=J$，也就是说作用量也具有洛伦兹群的对称性，这对于之后的物理学发展至关重要。其中，他顺便证明了$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$也是一个不变量，即$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\mathrm{d}t'=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$；从四维时空的角度看，体积元不随坐标轴旋转而变是显而易见的，但这一赝欧几里得几何性质，却使得为什么长度收缩和时间膨胀总是相生相伴、形影不离，为什么收缩因子和膨胀因子永远互为倒数这类似乎难以理解的问题一下子变得一目了然、清澈见底。另外，他还证明：作用在电子上单

位体积电磁力 $\boldsymbol{f}$ 的虚功，即在虚位移 $\delta\boldsymbol{\xi}=\left(\delta\xi_x,\delta\xi_y,\delta\xi_z\right)$ 下的表达式 $\delta J=\int\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$ 也是一个不变量，即

$$\delta J=\delta J'=\int\boldsymbol{f}'\cdot\delta\boldsymbol{\xi}'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\mathrm{d}t' \quad .$$

这个证明过程非常漂亮，正是在这个证明过程中，庞加莱用最严密的数学语言清楚地阐明了“同时性的相对性”和“洛伦兹收缩”。另外，完全不涉及力的电磁性质和粒子的带电性，庞加莱在此再次给出了力的变换式：

$$f_x'=\frac{f_x-v(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\ ,\quad f_y'=f_y\ ,$$

$$f_z'=f_z\ ,\quad \boldsymbol{f}'\cdot\boldsymbol{u}'=\frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}-\frac{vf_x}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\quad .$$

最后，庞加莱也明确指出 $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2$ 是洛伦兹变换下的不变量。或许很少有人知道，这个电动力学中最重要的不变量之一是庞加莱最早发现的。

庞加莱《七月文章》的第4节我们已在《文一》详细介绍过，这里不再赘述。第5节叫“朗之万波”(Langevin’s waves)，讨论一个运动电子所产生的电磁场。庞加莱首先用推迟势的方法，从 $\Box\varphi=-4\pi\rho$ 和 $\Box\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{u}$ 再现了朗之万的结果，即朗之万所称的“速度波”(与加速度无关)，和“加速度波(正比于加速度)。接着他说：“由于洛伦兹变换，对这两种波的计算可以极大地简化。事实上，可将这个变换用在这个体系上，使电子处在静止的参照系中”。当今的电动力学教科书无疑都会介绍这个问题的相对论处理，但有几人知道这最早也是庞加莱得到的呢？

4 经典电子模型的庞加莱张力

《七月文章》第6节“电子的收缩”非常有趣也极其重要，但也是被误读最多的一部分。庞加莱在此主要讨论了这样一个看上去很简单的问题：在 S 系中，一个匀速直线运动的电子究竟具有什么形状？在电子静止的 S' 系中，它又是什么形状？当时存在三个模型：(1)Abraham模型：在 S 系中运动的电子是一个球，在 S' 系中静止的电子是一个椭球，其三个半轴分别为 $(\frac{lr}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}},lr,lr)$ (这里的 l 仍是《文一》中讨论过的洛伦兹变换式中的标度变换量)；(2)朗之万模型：在 S' 系中静止的电子是一个球，在 S 系中是沿 x 方向收缩但沿 yz 方向膨胀的一个椭球，其体积保持不变，三个半轴分别为 $(\frac{r\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{l},\frac{r}{l},\frac{r}{l})$，同时 $l^3=\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$；(3)洛伦兹模型：在 S' 系中静止的电子是一个球，在 S 系中是沿 x 方向收缩但沿 yz 方向不变的一个椭球，其三个半轴分别为 $(\frac{r\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{l},\frac{r}{l},\frac{r}{l})$，同时 $l=1$。

原则上，庞加莱在第4节“洛伦兹群”中已严格证明 $l=1$ 是唯一正确的结果，即只有洛伦兹模型是正确的。同时，庞加莱比任何人都清楚，不同参照系之间的长度和时间相对性，完全是基于光速不变及各向同性公设(postulate)的测量问题(我们将会在下一篇文章《文三》中详细讨论)，换句话说，是一个纯粹的运动学问题。那么，对一个已经有明确答案的运动学问题，庞加莱为什么还要从动力学的角度，花那么大的功夫去讨论呢？这不显得有点画蛇添足吗？

事实上，庞加莱在这里探讨了一个非常深刻的问题，充分体现了他作为大数学家、大数学物理学家的“不可思议的思想”。他关心的问题是：如果洛伦兹模型是正确的，那它与物理学最重要的基本原理之一——最小作用量原理——兼容吗？为此，他考察一个最简单的情况：对于一个在 S 系中作匀速直线运动的电子，它的能量、拉格朗日量和动量应该如何表达？由于这三者不是相互独立的，所以考察它们之间的关系，可以用来判断上述三个模型与这一作用量原理的兼容性。如果我们就此打住，让读者自己猜一下庞加莱得到的答案，估计会让绝大多数人大跌眼镜。完全出乎预料，朗之万模型竟然是唯一能与这个从作用量角度出发的基本原理兼容的模型！换句话说，庞加莱从动力学角度得到的结果与从运动学角度得到的结果完全矛盾！这就回到了庞加莱在第1节末尾说的那段话：

“所以，我们必须认为不仅仅只存在电磁力，而且应该有其他的力或约束。我们因而必须确定支配这些力或约束的条件，使得电子的平衡不受(洛伦兹)变换的影响”。

这就是所谓庞加莱张力的来源。没有它，不仅电子不可能稳定存在，而且电子模型跟狭义相对论也不可能相容。为了解决这一矛盾，庞加莱这么说：

“因此我们这样表述下列问题：除了电磁力外，我们必须引进什么样的附加力，可以得到洛伦兹的模

型，或更一般地说，得到不同于朗之万模型的结果。”

在引进了附加势之后，洛伦兹模型得到了挽救，而朗之万模型就变得不合理了(引起了发散)。最重要的一个结论是：这个附加力(也就是庞加莱张力)正比于电子的体积，它相当于一个负压，补偿了同号电荷间相互排斥引起的电子不稳定性，至少定性解释了为什么自然界确实存在稳定的电子，同时还与洛伦兹群的对称性完全兼容。

虽然庞加莱在此更多是着眼于理论的自洽，而不是有关电子质量的电磁或非电磁起源，但由他引进的庞加莱张力却在之后几十年的粒子物理研究中成为一个重要问题，在物理学史的重要性不言而喻，详细讨论可见《费曼物理学讲义》第二册第28章[3]。虽然经典电子模型今天已经过时，而且电子的质量起源，至少就其主要部分而言也不是电磁的，而是源于电弱统一理论中的规范对称性自发破缺，有兴趣的读者可参阅卢昌海博士的文章《质量的起源》[4]。但有趣的是，庞加莱张力与此并不矛盾，因为将电子看成点电荷后，庞加莱张力也自然趋近于零。事实上，这与麦克斯韦—洛伦兹方程组的基本特征完全吻合，正像David Griffiths在其《电动力学导论》教科书中所说：“以电荷密度和电流密度的形式表达的麦克斯韦电动力学，一个点电荷必须被看作是尺度趋近于零的一个广延电荷。”[5]

5 带电粒子的相对论运动方程

庞加莱《七月文章》第7节“缓慢加速的运动”(quasi-stationary motion)是继第4节“洛伦兹群”之后的又一华彩乐章，在这里庞加莱发现了电子的相对论性运动方程，从此结束了牛顿运动方程长达两百余年的统治。他这样开头：

“尚待考察的是，这样一个电子收缩的假定(笔者注：即洛伦兹收缩)是否可以解释绝对运动的不可能性(笔者注：即相对性原理)，我将从研究一个孤立电子，或说处于远处其他电子作用下电子的缓慢加速运动开始。(It remain to be seen if this hypothesis on the contraction of electrons accounts for the impossibility of manifesting absolute motion, and we shall begin with studying the quasi-stationary motion of an isolated electron, or one subjected only to the action of other distant electrons)。”

这段话很重要，而且在我们之后的《文三》和《文四》中还会涉及，因此将原文附上，以免误解。这里只想简单提一句，hypothesis在庞加莱的语义中有三种不同的意思(见庞加莱的《科学与假设》)，此处所用只是指尚待经验确认的事实，而绝非以它作为前提来推导什么结果。

接着庞加莱明确解释了由Abraham(1902年)引入的“缓慢加速的运动”这一概念的含义。要点有二：(1)电磁辐射可以忽略，(2)只计及拉格朗日量对电子运动速度的偏导数而忽略对加速度的偏导数。这样的电子满足运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right)=-\int \boldsymbol{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad , \quad (13)$$

这里的 L 是电子的拉格朗日量，$\boldsymbol{f}=(f_x, f_y, f_z)$ 是作用在这个电子上的由其他电子所产生的电磁场力。对一个自由电子缓慢加速的运动，我们注意到 L 只与 $\boldsymbol{v}$ 的大小 $v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^{\ 2}+v_y^{\ 2}+v_z^{\ 2}}$ 有关，与方向无关。假定电子的实际加速运动沿 x 轴开始：$v_{\parallel}=v_x=v$, $\boldsymbol{v}_{\perp}=(v_y, v_z)=0$，庞加莱证明：

$$\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v_{\parallel}}{\mathrm{d}t}=\int f_{\parallel}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad ,$$

$$\frac{P}{v}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t}=\int \boldsymbol{f}_{\perp}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad ,$$

这里的 $P=|\boldsymbol{P}|$，是动量的大小，$f_{\parallel}=f_x$，$\boldsymbol{f}_{\perp}=(f_y, f_z)$，这样他就清楚地解释了 $\frac{\partial P}{\partial v}$ 和 $\frac{P}{v}$ 就是Abraham所称的电子纵向质量 $m_{\parallel}$ 和横向质量 $m_{\perp}$。

庞加莱认为，对于一个运动着的电子，从远处看它就像一个点电荷，产生的电磁场能量似乎是储存在全空间那样；然而，在这里的讨论需要将能量看作都集中在电子之上。事实上，这两种观点确实是等价的，见Griffiths的《电动力学导论》p.96-97[5]和Purcell的《电磁学》p.33-34[6]。庞加莱在第6节证明了在 S 系中一个匀速运动电子的拉格朗日量：

$$L=\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(\frac{\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\right)=L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

(见原文第6节)，而 S' 系的拉格朗日量 $L'=\int \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\left(\frac{\boldsymbol{E}'^2-\boldsymbol{H}'^2}{8\pi}\right)$，由于在电子自身静止的 S' 系中 $\boldsymbol{H}'=0$，所以计算变得极其简单。假定电子的电荷均匀分布在空心的二维球壳上，那么[3]：

$$L'=\frac{1}{8\pi}\int E'^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{e^2}{2r_0}\equiv m_0c^2 \quad .$$

这样，在 S 系中，自由电子的拉格朗日量最后可以表达成：

$$L=m_0c^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad , \quad (14)$$

与我们今天的教科书比较，由于定义不同，只是 L 的正负号相反而

已。庞加莱在第9节中把这个我们今天称为电子静质量的 m_0 叫做电子的“实验质量”。庞加莱基于拉格朗日量(14)式，由 $P=-\dfrac{\partial L}{\partial v}$ ，以及刚得到的 $m_{\parallel}$ 和 $m_{\perp}$ 的定义，直接得到下面一系列结果，包括电子的四维相对论性运动方程(16)和(17)：

$$P=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ , \tag{15}$$

$$m_{\perp}=\frac{P}{v}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\ ,$$

$$m_{\parallel}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}=\frac{m_0}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}\ ,$$

$$\boldsymbol{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\frac{m_0\boldsymbol{v}}{c^2}}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\ , \tag{16}$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)\ . \tag{17}$$

在这里，笔者不得不暂停一下插几句评论。就笔者所知，迄今为止，所有学术期刊上最流行(是否“最权威”不知道)，至少是篇幅最长的有关庞加莱对相对论贡献的研究，当属A. I. Miller的“A study of Henri Poincare’s ‘Sur la Dynamique de l’Electron’”[7]。《文一》已经提过，该文对于庞加莱《七月文章》第4节中最重要的一句话不知所云，竟然完全略去了；在这里，又不知所云地照抄了上面许多公式，特别是(16)式，但也竟然完全不知这就是电子的相对论性运动方程。很遗憾，这样的研究所得到的有关庞加莱对狭义相对论贡献的结论，其价值如何，笔者只能让读者自行判断了。

如笔者在《文一》所说，因为庞加莱让 $c=m_0=1$ ，这使得今天教科书上那些熟悉的相对论公式面目全非，加上他总是跳过那些对他是小儿科但对我们恐怕并不显然的步骤，所以读他的文章确实吃力。比如在得到(16)式的结果前，我们一般会期待这样的解释：(13)式实际上就是 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$ ，其中 $\boldsymbol{P}\equiv-\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ ；对(14)式求偏导，可得 $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=-\dfrac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ ；于是

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)\ ;$$

分部求导，便最后得到(16)式。有趣的是，事实上下面的表达式：

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) \tag{18}$$

而不是(16)式，才是我们今天熟悉的教科书上的相对论性运动方程。庞加莱之所以要展开成(16)式的样子，是因为第一项对应了质量为 $m_{\perp}$ 的横向运动，第二项对应了质量为 $m_{\parallel}$ 的纵向运动，这是当年实验测量真正关心的问题。另外，根据第6节的结果 $E=L+vP$ (见原文)以及(14)和(15)式，立刻可得：

$$E=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\equiv mc^2\ , \tag{19}$$

这不就是(17)式括号里的能量项吗？这个常常被普罗大众认为是最著名的物理学公式 $E=mc^2$ ，在庞加莱的工作中只是一个极其自然的结果。

接着庞加莱又证明了上述相对论运动方程(16)式在洛伦兹群下是协变的。至此，庞加莱真正严格证明了电动力学的完整协变性：不仅麦克斯韦方程组，而且带电粒子的运动方程都具有洛伦兹群的对称性。他确实干净彻底地解决了电子的动力学问题，这与他《六月文章》和《七月文章》的题目《论电子的动力学》完全契合。同时，他所建立的四维时空，四维时空不变量，四维矢量等概念，之后又成为闵可夫斯基工作的基础。因此，可以毫不夸张地说：在1905年，庞加莱凭一己之力，是世界上唯一既建立了狭义相对论运动学，又建立了狭义相对论动力学的人。同一年中的爱因斯坦，确实独立建立了狭义相对论的运动学，可他的电子运动方程做错了，而且电子的横向质量 $m_{\perp}$ 也做错了(见爱因斯坦1905年原文[8])。1906年普朗克成为历史上得到电子相对论运动方程的第二人，而正确的相对论运动方程第一次出现在爱因斯坦的文章中已是1907年的事了[9]，他如此写到：“按普朗克的方式来定义力。质点运动方程的重新表述，如此清楚地证明了它们与经典力学运动方程的相似性，也取自普朗克的工作。”(“**Force is defined as in Planck’s study**. The reformulations of the equations of motions of material points, which so clearly demonstrated the analogy between these equations of motion and those of classical mechanics, **are also taken from that study.**)显而易见，爱因斯坦自己也认为将牛顿第二定律推广到相对论运动方程这一步不是他的贡献。

至此，庞加莱不仅建立了电子

的相对论运动方程，而且还严格证明了其协变性。按理说，这一切不都完美了吗？但大师毕竟是大师，到此他仍不肯松手；或许这也是数学“不可思议的思想”的又一次完美体现吧。他这样写到：“然而，这并不意味着只有洛伦兹的假定($l=1$)才会导致这样的结果”，言下之意，朗之万的 $l=\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{1/6}$ 不可能导致这样的结果吗？接着，庞加莱给出了第二种方法得到电子的相对论运动方程。出发点是拉格朗日方程，用到了四维力的洛伦兹变换，即遵循时空 $(x, y, z, t)\rightarrow(x', y', z', t')$变换的方式，完全没有涉及电子和力的任何电磁性质，而是在最一般的意义下证明了只有 $l=1$ 才是唯一可能的选择！换句话说，庞加莱的相对论运动方程不仅适用于带电粒子，也适用于一般的物质。

在正式引用庞加莱的下列总结性陈述之前，笔者注意到：无论是杨振宁先生[10]，还是A. Pais[11]在讲到庞加莱没有达到相对论时都引用庞加莱1904年在St Louis大会上的发言。不错，庞加莱在1905年6月之前确实还没有达到相对论，但在1905年6月之前爱因斯坦不也没有达到吗？显然，将1904年的庞加莱与1905年6月之后的爱因斯坦做比较既有失公平也没有意义。事实上，不可能有任何人在读了庞加莱的下列陈述后仍会认为他在《七月文章》中没有达到相对论：

“因此，洛伦兹的假定(笔者注：$l=1$)才是唯一能与绝对运动之不可能性(笔者注：即相对性原理)兼容的假定；如果一个人承认这种不可能性，那他必须承认运动着的电子会沿运动方向收缩成一个旋转椭球，其他两轴的长度不变；他还必须承认，正像我们在上一节中展示的那样，存在一个正比于电子体积的附加势。洛伦兹的分析被完全证实了，但我们可以更好地解释其背后的真正原因：这个原因必须从第4节内容中去寻找。那些不改变运动方程的变换构成一个群，而且只有在 $l=1$ 时才成立。就像我们不可能意识到一个电子是处于绝对静止状态还是绝对的运动状态，我们必须要求当一个电子处于运动时，它将会发生形变，准确地按照这个群的相应变换强加给它的那样去进行变化。”

从这段原话我们不难看出，(1)庞加莱显然很明白，他的第4节是整个狭义相对论最核心的内容，特别是，洛伦兹群和四维时空的概念是理解洛伦兹收缩的基础，进而使绝对运动之不可能性成为一个不可动摇的事实。(2)在一个不存在绝对运动的世界中，一切相对匀速直线运动的惯性系，都以洛伦兹群相互关联着，这使得在任一惯性系中为真的物理定律(公式)，在其他惯性系中也一定为真，即定律(公式)的形式在其他惯性系中保持不变。这就是所谓物理定律必须具有洛伦兹群对称性的真正含义。

《七月文章》的第8节叫“任意运动”，是将上节缓慢加速的运动推广到一般的运动。最后一节(第9节)是“有关重力的假设”，庞加莱希望将狭义相对论的结果推广到引力场，建立符合洛伦兹群的引力相互作用，并修改牛顿的万有引力定律。他甚至指出了引力相互作用是以光速传播的引力波等概念，但总体而言，这部分工作只是一种有趣的尝试，距离爱因斯坦十年后建立的广义相对论还相距甚远，因此我们就不再展开介绍了，只提及几个重要结论：(1)因为庞加莱想通过各种四维时空不变量的组合来猜测和构造新理论，所以他在这里比第4节更详细地讨论了四维时空性质，比如，明确给出四维坐标的表示$(x, y, z, \mathrm{i}ct)$，明确给出四维时空间隔 $x^2+y^2+z^2-(ct)^2$ 和微分间隔 $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2-(c\mathrm{d}t)^2$。(2)除了前面给出的四维矢量$(c\boldsymbol{A}, \varphi)$, $(\rho\boldsymbol{u}, \rho)$, $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})$之外，这里他还给出了四维速度 $\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right)$，或四维动量 $\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}, \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right)$ $(m_0=c=1)$，以及四维力 $\left(\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}, \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right)$ 等一系列四维矢量。

至此，我们对庞加莱1905年狭义相对论(《六月文章》和《七月文章》)的介绍就全部结束了。下面用几句话再次总结一下他对狭义相对论的原创性贡献：(i)他首先发现了洛伦兹群；(ii)首先建立了四维时空的赝欧几里得几何；(iii)首先证明电磁作用量的洛伦兹不变性；(iv)首先建立了电子的相对论运动方程；(v)首先证明了电动力学的完整协变性。

最后，我们对后两篇文章的主题做一交代。在下一篇文章(《文三》)中，将详细介绍庞加莱在通往狭义相对论之路上的重要思想和观念(1905年前)，特别是，他如何看待以太，如何看待运动，如何看待时间和空间，如何看待相对性原理和光速不变原理，如何看待科学中的假设、定律和原理，以及如何评

价一个科学理论等；在最后一篇文章(《文四》)中，将详细介绍庞加莱与洛伦兹、爱因斯坦、闵可夫斯基等同时代人在相对论问题上的交流及其互相影响。

参考文献

[1] Arfken G B，Weber H J. Mathematical Methods for Physicists，4th edition. Academic Press，1995

[2] Panofsky W K H，Phillips M. Classical Electricity and Magnetism，2nd edition. Dover Publications Inc.，1962，p.298

[3] Feynman R E，Leighton R B，Sands M. The Feynman Lectures on Physics，Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Company，1964

[4] 卢昌海. 因为星星在那里：科学殿堂的砖和瓦. 北京：清华大学出版社，2015

[5] Griffiths D. Introduction to Electrodynamics，4th edition. Cambridge University Press，2017

[6] Purcell E M，Morin D J. Electricity and Magnetism，3nd edition. Cambridge University Press，2013

[7] Miller A I. Archive for History of Exact Sciences，1973，10(3-5)：207

[8] The Collected Papers of Albert Einstein，Vol. 2. Princeton University Press，1989，p. 169

[9] The Collected Papers of Albert Einstein，Vol. 2. Princeton University Press，1989，p.254

[10] 杨振宁. 爱因斯坦：机遇与眼光. 见：杨振宁文集. 上海：华东师范大学出版社，1998

[11] Pais A. Subtle is the Lord. Oxford University Press，1982

悟理小言

传语风光共流转，暂时相赏莫相违

下方照片拍摄于2002年8月在东京举行的“Localization 2002”国际会议，是我最后一次在重要场合使用透明片演讲。年轻的师生可能没见过透明片及旧式投影仪。照片中的会议主持人是当时国际著名的芬兰Helsinki University of Technology (现已合并入Aalto University)的低温物理实验室主任Mikko Paalanen教授。

Electron localization是指金属中的导电电子波函数，因为系统过于无序，多重散射和量子干涉效应导致其被局限在一个位能势垒出现大幅度涨落的微小空间区域，形成局域化波函数，而不能延伸在整个样品中，维持延展性波函数的类平面波形式，因此固体(在低温时)失去导电能力，变成了绝缘体。

Localization的理论概念是P. W. Anderson于1958年率先提出的，但在论文发表后的十几年间，除了N. F. Mott的高度垂青和屡次引用之外，很少有其他科学家注意或理解。约20年后，Anderson和Mott (及J. H. Van Vleck)因在这个方向的前瞻开拓性研究，获得了1977年诺贝尔物理学奖。

“Anderson localization”理论终于被科学界接受之后，却又物极必反，常引来众多科研人员的信手拈来，随意拿去用于解释许多各式各样的实验数据，导致Anderson后来曾感慨说：“My name is being used to describe too many phenomena of which I have never heard.”

因为相信宇宙、万物以及人是不完美的，而且正是由于不完美所以呈现多样性和复杂性——P. W. Anderson揭示“More is different”的振聋发聩、垂世名篇的主旋律，因此进研究所当年，我选择了无序电子系统(disordered electronic systems)作为博士论文探索方向。此后40年来如影相随，相濡以沫，冷暖自知。

(台湾交通大学　林志忠　供稿)