

从大自然的分形之美中寻找非凡物态*

孙晔旸 李钧楷 杨兆举[†]

(浙江大学物理学院 杭州 310027)

2023-03-27 收到

[†] email: zhaoyuyang@zju.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20230402

Looking for the nontrivial states of matter from fractals

SUN Ye-Yang LI Jun-Kai YANG Zhao-Ju[†]

(School of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

摘要 分形在大自然中无处不在, 其具有自相似性、分数维度的性质。最近在分形晶格中的理论与实验研究表明, 在分数维度中没有体的概念却可以存在拓扑绝缘体。分形中的拓扑态具有一些新奇的特性, 比如具有压缩的拓扑相、拓扑边界态分布于不同代数的分形几何中。这些与常规拓扑绝缘体不同的独特之处展现了一个审视空间维度与拓扑相变相互作用的新视角。文章简要回顾了分形体系中拓扑物态的发展历史, 并重点介绍了人工微结构中的拓扑分形绝缘体。

关键词 分形, 拓扑绝缘体, 拓扑边界态

Abstract Fractals are ubiquitous in nature, characterized by the properties of self-similarity and fractional dimensions. Recent theoretical and experimental studies on fractal lattices have demonstrated the existence of topological insulators without the concept of “bulk” in the fractional dimension. Topological states in fractals exhibit novel properties, such as the squeezed topological phases and topological boundary states distributed in various generations of fractal geometry. These unique differences from conventional topological insulators provide a new perspective for examining the interaction between the spatial dimensions and topological phase transitions. This article briefly reviews the history of topological states in fractal systems and focuses on the topological fractal insulators in artificial microstructures.

Keywords fractal, topological insulator, topological boundary state

1 引言

1.1 分形

分形在大自然中无处不在, 如雪花、花椰菜和海岸线(图 1)等。分形(fractal)一词是芒德布罗

(Mandelbrot)在 1975 年最先提出的, 来源于拉丁文 Fractus, 意思为不规则、支离破碎。迄今为止, 分形严格的定义并不统一, 通常可被定义为: 由整体在某些方面相似的部分构成的图形。分形具有与众不同的几何性质, 是非线性、不连续、不可导的, 当对分形几何进行放大时, 放大后的局部细节将与分形几何整体相似, 即具有自相似和尺度不变性^[1]。此外, 分形的另一个重要特征是其具有非整数的维度(分数维度), 如对于著名

* 国家自然科学基金(批准号: 12174339)、国家科技部重点研发计划(批准号: 2022YFA1404203)、浙江省杰出青年基金(批准号: LR23A040003)资助项目

的谢尔平斯基地毯(Sierpinski carpet), 当将其边长扩大为原来的三倍, 此时其面积变为原来的8倍, 意味着其对应的豪斯多夫(Hausdorff)维度^[1]为 $\log_3 8 \approx 1.8928$ 。

分形的研究最早可以追溯到17世纪, 莱布尼茨在著作中使用了“分形指数”。随后经过魏尔斯特拉斯、康托尔、科赫、豪斯多夫等科学家的发展, 分形理论的研究逐步推进。1967年, Mandelbrot在*Science*发表了题为“*How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*”的论文, 其后在1975年正式使用了“fractal”一词。1977年, Mandelbrot出版了*Fractals: Form, Chance and Dimension*, 标志着分形几何已经成为一门独立的学科。然而, 在随后的几年里分形并没有受到广泛的关注, 一直到1982年, *The fractal geometry of Nature*第二版发行, 分形才受到了越来越多科学家的重视。历史是惊人的巧合, Dan Shechtman正是于1982年发现了准晶材料^[2], 并获得了2011年诺贝尔化学奖。分形与准晶分别具有新奇的几何结构, 后面40年里在凝聚态、光学等领域吸引了很多的关注。

1.2 拓扑分形绝缘体

拓扑绝缘体是一种新的物质相, 其显著特征是具有绝缘的内部体和导电的边界态^[3, 4]。在不同物理系统中构造不同维度的拓扑态已经取得了许多重要的成果^[5-8], 在一、二、三和四整数维度中, 实现了各种拓扑相物态。利用拓扑不变量, 还可以将这些拓扑态分类成不同的类别。那么一个自然的问题是, 与整数维度不同, 拓扑绝缘体是否能够在没有明确定义“体”概念的分数维度中存在呢? 第一直觉告诉我们, 因为缺乏内部“体”的保护, 根据体一边对应关系, 分形晶格将会打破拓扑保护。然而近年来的进展告诉我们, 分形体系存在着拓扑绝缘体^[9-21]。这些分形的拓扑体系具有许多新奇的特性, 例如具有被压缩的拓扑相, 以及拓扑边界态分布于不同代的分形几何中。

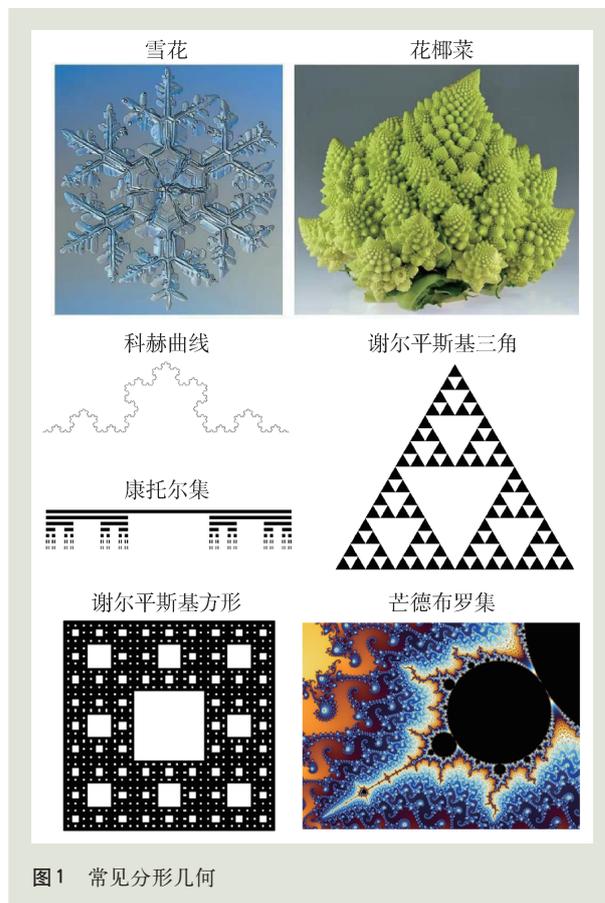


图1 常见分形几何

分形中的拓扑物理研究最早可追溯至1983年, 在电子分形体系中加入磁场可以得到具有自相似性的能谱和态密度^[22, 23], 不过分形中各边界上的拓扑态并没有引起关注。在2014—2015年, 有理论研究表明拓扑绝缘体可在准分形空间中存在^[24, 25], 虽然研究体系并不是严格定义上的分形, 不过可以从其结果大胆推断, 拓扑绝缘体和边界态应该能够在分形晶格中构建。随着实验技术的发展, 2018年, 电子体系中的分形首次在氧化铜分子人工结构中实现^[11]。这也间接地促进了在调控性能优异的人工结构中去探索拓扑分形绝缘体, 近年来也在理论与实验上取得了很多进展^[9-21]。本文将主要基于实验进展进行介绍, 以期能够立足当下, 找到一些对未来的思考和启发。

2 Floquet 拓扑分形绝缘体

我们对分形中拓扑态的研究始于2018年年底。在关注到了电子体系中的分形在实验中被实

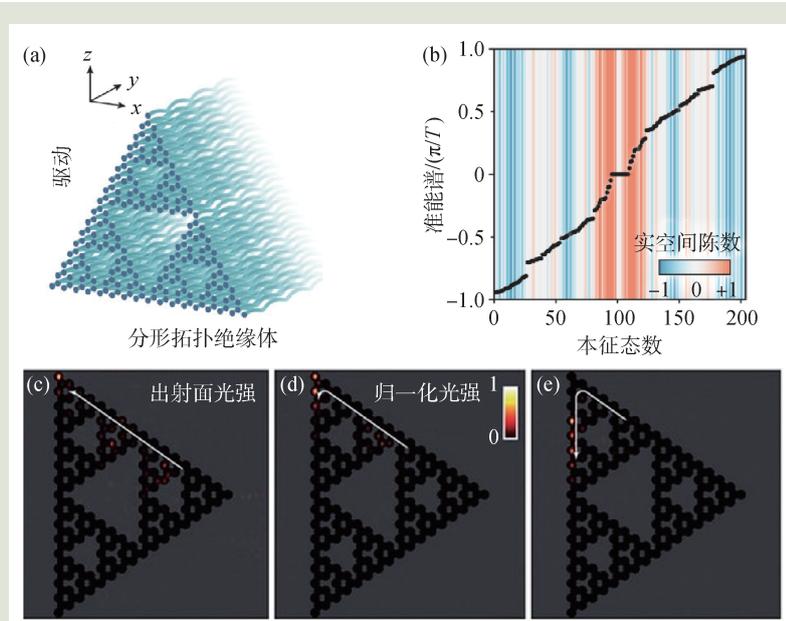


图2 (a)具有周期性调制的谢尔平斯基光子晶格；(b)周期性调制的谢尔平斯基光子晶格的准能量谱；(c)–(e)拓扑保护的边缘态^[20]

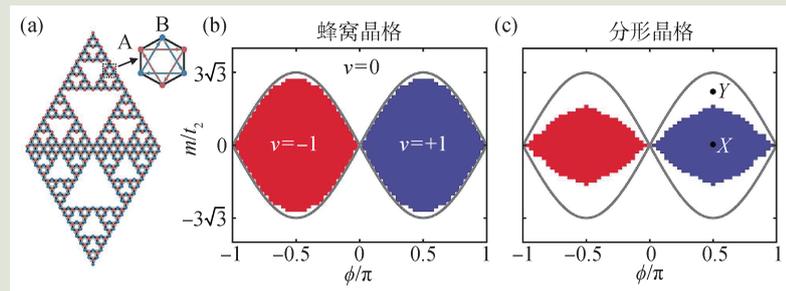


图3 蜂窝晶格和分形晶格的拓扑相图^[21] (a)模型结构图；(b)菱形蜂窝晶格的拓扑相图。在原始的Haldane模型中，拓扑相变服从 $|m| = |3\sqrt{3}t_2 \sin \phi|$ ，用灰线标记。0、+1和-1的Bott Index值分别用白色、蓝色和红色表示；(c)分形晶格的相图沿垂直轴 m 被显著压缩约0.5倍。理论计算的耦合参数为： $t_1 = 1, t_2 = 0.2$

现之后不久，我们就有了初步的理论结果，着手与实验组合作，并于2019年7月初在南开大学举办的拓扑光子学论坛上报告了我们的相关进展。

理论结果表明，在周期性驱动的分形谢尔平斯基垫片(gasket)光子晶格(图2(a))中可以构建出Floquet拓扑态^[12]。这里的周期性驱动晶格由螺旋波导管构成，当入射光在波导管中沿 z 方向传播时，螺旋形状的波导管在 xy 平面上做周期性圆周运动，可诱导出一个等效的人工磁场，打破时间反演对称性，得到Floquet拓扑相。由于缺乏在分数维度中拓扑不变量的定义，我们在处理此问题时将分数维度投影到整数维度二维空间中去，然

后进行实空间陈数的计算，体系中的拓扑带隙对应于实空间陈数为1，也证明了该体系是具有拓扑保护的。值得注意的是，通过计算能谱及拓扑不变量，我们发现在此拓扑分形晶格中，拓扑带隙由多个小带隙构成，如图2(b)中红色区域所示。我们传统理解认为，拓扑带隙小意味着拓扑态的激发困难及拓扑保护性变弱，所以能否在实验中实现拓扑分形绝缘体是存在疑虑的。令人惊喜的是，通过动力学演化的模拟，我们发现与常规的拓扑绝缘体不同，在分形晶格中存在着一个迁移率隙(mobility gap)保护着拓扑边界态。这个原因在于，即使一些本征的内部态分布在此迁移率隙中，但是由于分形晶格内部的破碎与割裂，内部态并不能与外部的拓扑边界态有空间上的重合，因而并不能通过演化而混合。

在实验中，利用飞秒激光直写微纳加工技术，可以制备上述具有周期性调制的谢尔平斯基分形光子晶格(图2(a)，G(4)分形晶格)。在傍轴近似下，分形光子晶格(图2(a))中光的传输方程可

类比为含时薛定谔方程并可用紧束缚模型准确描述。实验结果如图2(c)–(e)所示^[20]，当倾斜的空间高斯光束打在分形晶格边界上，外边界拓扑态可以被激发。可以看到可见光会沿着边界单向逆时针传输，在碰到样品锐利的拐角时不会被散射。此外，在该分形晶格最大的中空边界上还存在内部边界态，传播方向与外部边界态相反为顺时针。

在实验中可以观察到一个具有很高透射率的传输谱，对应着理论中预测的迁移率隙^[20]。通过观察边界上边界态的传输还发现，在分形晶格中，拓扑边界态的传输比传统蜂窝光子晶格中的拓扑边界态快10%，可为具有抗扰性的光传输提供一

种调控的手段。

3 分形陈绝缘体

上述在凝聚态与光子学中的进展改变了目前我们对体一边对应关系的理解：拓扑特性不一定依赖于内部体。然而，到目前为止，拓扑分形物理学中对拓扑相图和分形之间的相互作用仍然知之甚少。研究分形对拓扑相图的影响，可以借助相图丰富的Haldane模型^[26]，并考虑一个由两个谢尔平斯基三角形组成的分形，图3(a)展示了体系的原理图，插图展示了A、B原子的放大图。此分形的维度可以计算为 $d_f = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1.585$ 。这个体系的哈密顿量可以表示成

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} t_1 c_i^\dagger c_j + \sum_{\langle\langle ij \rangle\rangle} t_2 e^{i\phi_{ij}} c_i^\dagger c_j + m \left(\sum_{i \in A} c_i^\dagger c_i - \sum_{i \in B} c_i^\dagger c_i \right), \quad (1)$$

其中， c_i^\dagger (c_i) 是产生(湮灭)算符， t_1 和 t_2 分别是最近邻和次近邻的耦合强度， ϕ_{ij} 是从位点 j 向次近邻位点 i 跃迁时积累的相位， m 是 A 和 B 两个位点之间的势能差。时间反演和空间反演对称性可以分别通过改变 ϕ_{ij} 和 m 来打破。在原始的Haldane模型中，两种反演对称性破缺之间的竞争可以导致图3(b), (c)中灰色线标记的拓扑相变。

由于分形结构缺乏平移对称性，因此没有明确定义的拓扑不变量。通过将分形晶格投影到二维空间上，并且采用拓扑不变量指标博特指标(Bott index)^[27, 28]来描述体系的拓扑性质。

图3(b), (c)分别展示了蜂窝晶格和分形晶格中，Bott index与 ϕ 和 m 的关系。在经典的Haldane模型中，拓扑相的转变点发生在 $|m| = |3\sqrt{3} t_2 \sin \phi|$ 这条灰线上。这些线连接了两个具有不同陈数 ν 从0变到1或-1的区域。对于蜂窝晶格(图3(b))，根据Bott index计算的相图与根据陈数计算的相图一致。Bott index等于0、+1和-1的区域分别用白色、蓝色和红色表示。Bott index等于 ± 1 和0之间的转变与理论预测(灰色线)重叠。而对于分形晶格，相图(图3(c))沿着垂直方向被压缩至0.5倍，这是由于晶格位点数量的减少，需要较少强度的空间反演对称破缺来平衡时间反演对称破缺。

这种拓扑相图的压缩同样挑战了“体一边对应”关系。传统的体一边对应认为，动量空间出现非平庸的陈数^[29]对应着晶格边缘产生单向传输的边缘态，即晶格系统的内部结构，决定了系统边缘出现的拓扑现象。这意味着无论对晶格的边

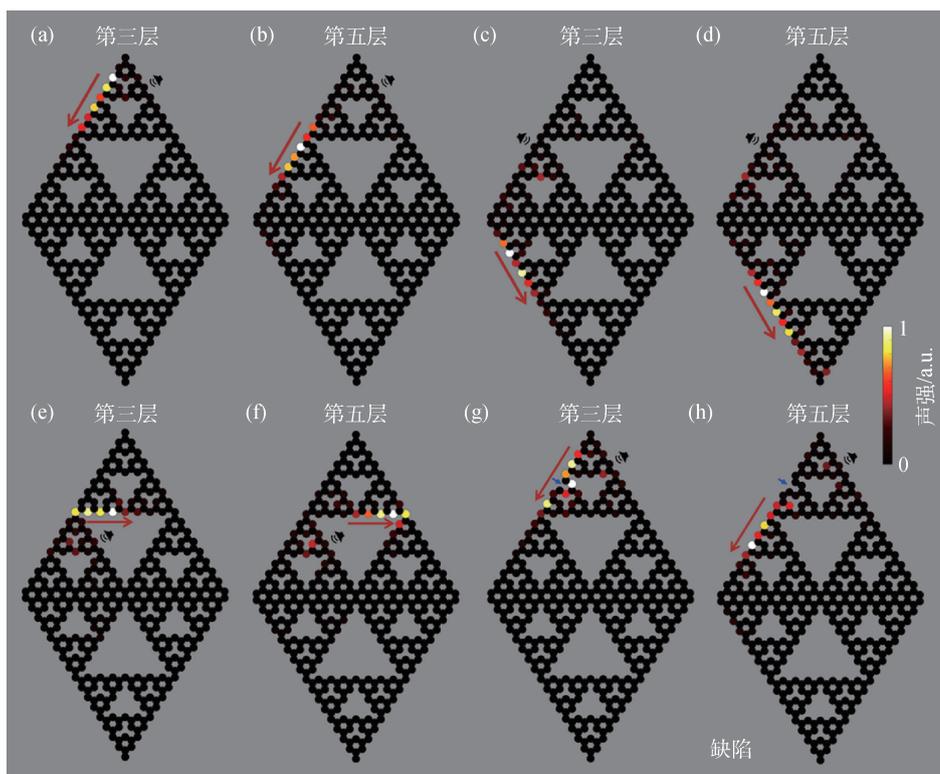


图4 分形拓扑边缘态的观测^[21] (a), (b)三层单元和五层单元传播后外部拓扑边缘状态的声强分布；(c), (d)向左移动声源使声波通过钝角传播，并沿边缘向下传播；(e), (f)三层和五层内拓扑边缘态的声强分布；(g), (h)存在缺陷(蓝色箭头标记处)时，在三层和五层传播之后的边缘状态的强度分布。注意，该图中的拓扑系统对应于图3(c)中的点X。红色箭头表示声音传播的方向

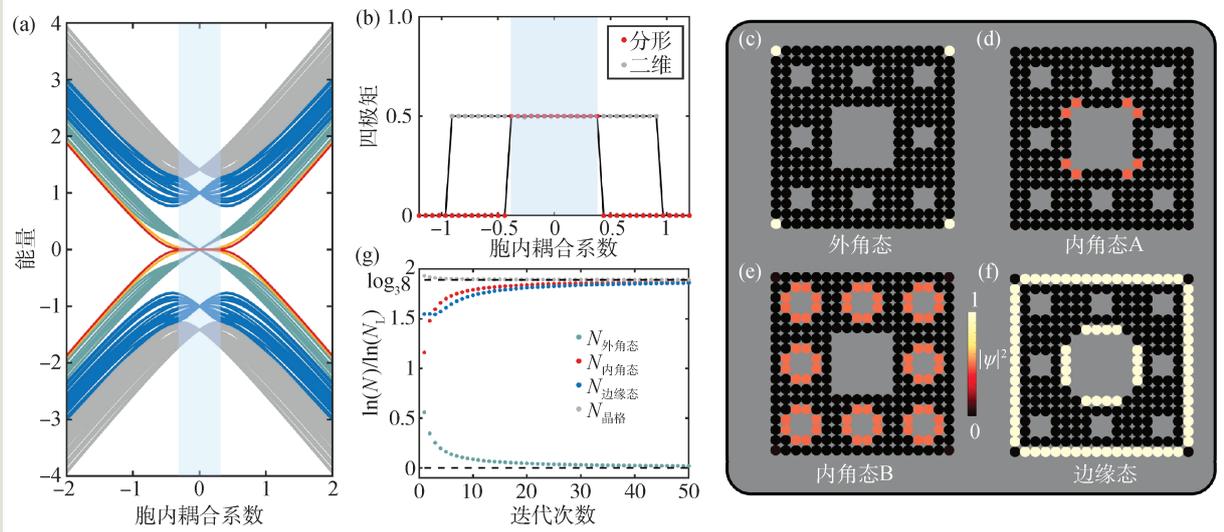


图5 分形晶格的拓扑相图^[19] (a)能谱是胞内隧穿的函数。灰色和蓝色的曲线表示“体”和“边缘”状态，而红色、黄色和绿色的曲线表示外角态、内角态A和内角态B；(b)被压缩的拓扑区域。灰色和红色的点分别对应于方形和分形晶格；(c)–(f)外角态、内角态A、内角态B和边缘态的总空间分布；(g)外角态、内角态、边缘态和分形晶格的尺寸作为迭代次数的函数

界进行怎样的裁切，都将得到同样的拓扑相图，因为拓扑的边界是由“体”决定的。而我们的模型沿用了Haldane模型的蜂房晶格，仅仅改变了晶格的边缘形状，但却得到了截然不同的拓扑相范围。因此这种压缩的拓扑区域可能会给维度与拓扑的相互作用带来新的视角。

在实验中，通过设计三维声学结构可以模拟出上述的分形物理模型，然后通过声学测量来实验观测。图4(a)–(d)展示了 $\phi = \frac{\pi}{2}$, $m = 0$ (点X处)的拓扑边界态的传输性质。通过声源阵列发出频率为11718 Hz，动量为 $k_z = \frac{\pi}{2d_z}$ 的声波，这表明声波不仅在 x – y 平面内传播，而且在 z 平面内传播。在第三层和第五层(图4(a), (b))，可以观测到声波沿着外边缘传播而不会渗透到“体”内，并且对尖角散射具有抗扰性。当移动了声源阵列的位置后，边界态也会随之移动，绕过样品的钝角位置，向下传播(图4(c), (d))。对于内部边缘(图4(e), (f))，也可以观测到同样的行为。由于体系存在拓扑保护，声波在缺陷周围传播而无背向散射。当在图4(g), (h)蓝色箭头所示的位置存在缺陷时，声波会绕过缺陷进行传

播，而不是发生散射。我们注意到，在自相似性被破坏的缺陷周围，声波沿着单“原子”路径移动，这将拓扑保护的边界态传输推到“单原子”水平。

4 分形中的高阶拓扑态

高阶拓扑绝缘体是一种新的拓扑相，其局域的拓扑态具有更低的维度，且出现于“边界的边界”上^[30–36]。有一种经典的办法是基于Benalcazar–Bernevig–Hughes (BBH)模型的四极子绝缘体^[25]，它具有为零的体偶极矩但量子化的体四极矩。由于扩展的高阶体–界对应原理，二维(2D)四极子绝缘体支持0D间隙内角态和1D间隙边缘态。另一种经典的方法是直接将一维Su–Schrieffer–Heeger (SSH)模型推广到更高维度^[37–41]。通过改变二维系统中胞内和胞间隧穿的相对强度，我们可以诱导出一个二阶拓扑相，其拓扑不变量是偶极子极化，而不是四极矩。在过去的十年中，这些方法丰富了对传统拓扑绝缘体的研究^[4]。到目前为止，高阶拓扑绝缘体已经在经典波系统中得到了广泛的研究^[36]，如光子学、声学 and 电路，并在与非厄米、无序和非线性的相互作用方面产

生了新的研究前沿。

最早在分形晶格上实现的高阶拓扑绝缘体起源于2019年的理论工作^[42]，其在谢尔平斯基地毯上实现了二阶拓扑态。随后二阶拓扑态又被推广至一个拼接的谢尔平斯基三角形^[17]。分形高阶拓扑绝缘体的实验实现则在2022年由两个独立的研究团队同时完成^[18, 19]，分别在声学分形晶格中基于二维SSH模型和SSH模型实现了高阶的拓扑态。

以BBH模型为例，其在谢尔平斯基地毯几何的作用下产生了蝴蝶形状的分形能谱，如图5(a)所示。能谱只在非常小的范围维持简并，暗示了分形高阶拓扑绝缘体的拓扑范围也被压缩了，这可以通过高阶拓扑绝缘体的拓扑不变量四极矩验证^[43]，如图5(b)所示。能谱的分形特性则是由于其丰富的拓扑态带来的。由于谢尔平斯基地毯具有非常多的孔洞，其在孔内产生了丰富的内角态，如图5(c)–(f)所示。这些内角态对应不同的能量，出现在能谱的不同区域，并且随着晶格迭代次数增加，这些内角态的数目也不断增加，这直接导致了分形能谱的出现。同时，内角态具有随晶格增加的性质，导致其维度不再为零。如图5(g)所示，我们计算了内角态的维度，发现内角态、边缘态和晶格本体具有相同的维度，这是在整数维拓扑绝缘体当中未曾出现的现象。而这种独特的性质，可将“高阶”的含义推广至更广阔的范围。

参考文献

- [1] Mandelbrot B B. *The Fractal Geometry of Nature*. Times Book, 1982
- [2] Shechtman D, Blech I, Gratias D *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1984, 53: 1951
- [3] Hasan M Z, Kane C L. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, 82: 3045
- [4] Qi X L, Zhang S C. *Rev. Mod. Phys.*, 2011, 83: 1057
- [5] Ozawa T, Price H M, Amo A *et al.* *Rev. Mod. Phys.*, 2019, 91: 015006
- [6] Ma G, Xiao M, Chan C T. *Nat. Rev. Phys.*, 2019, 1: 281
- [7] Zhang X J, Xiao M, Cheng Y *et al.* *Commun. Phys.*, 2018, 1: 97
- [8] Xue H R, Yang Y H, Zhang B L. *Nat. Rev. Mater.*, 2022, 7: 974
- [9] Brzezińska M, Cook A M, Neupert T. *Phys. Rev. B*, 2018, 98:

5 总结与展望

我们简要回顾了拓扑分形物理的研究历程，主要介绍了分形中Floquet拓扑态、陈绝缘体和g高阶拓扑态的实验进展。与传统的拓扑绝缘体不同，这些分形的拓扑体系具有许多新奇的特性，例如具有被压缩的拓扑相，以及拓扑边界态分布于不同代的分形几何中。这些新颖的特性可引发我们对空间维度与拓扑物理之间相互作用的思考。一些有趣的问题也应运而生，例如分数维度中的拓扑如何定义、如何分类？确定性分形和随机分形中的拓扑态如何构建？拓扑绝缘体的存在是否具有分数维度的下限呢？分形几何与拓扑物理的结合是否能启迪一些新的应用？随着对分形晶格拓扑态的探索以及对于维度和拓扑态相互作用研究的逐渐深入，相信这些问题能够得到回答。

此外，我们还注意到，分形晶格中的量子霍尔效应呈现出了独特的非整数霍尔电导^[3]；在强关联多体分形系统中，也可以存在分数量子霍尔效应^[44]。鉴于此，我们有理由相信，分形几何作为一个新兴的学科(国家自然科学基金的重点项目领域)，在其中探索非凡物态的研究才刚刚开始，如拓扑态、非厄米趋肤态、多体局域相变等，有望在与非厄米物理、非线性光学、多体物理和量子光学等相互作用中启迪一些新的科学前沿。

- 205116
- [10] Pai S, Prem A. *Phys. Rev. B*, 2019, 100: 155135
- [11] Kempkes S N, Slot M R, Freeney S E *et al.* *Nat. Phys.*, 2019, 15: 127
- [12] Yang Z J, Lustig E, Lumer Y *et al.* *Light Sci. Appl.*, 2020, 9: 128
- [13] Iliasov A A, Katsnelson M I, Yuan S. *Phys. Rev. B*, 2020, 101: 045413
- [14] Fremling M, van Hooff M, Smith C M *et al.* *Phys. Rev. Research*, 2020, 2: 013044
- [15] Liu C, Zhou Y N, Wang G Y *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 126: 176102
- [16] Ivaki M N, Sahlberg I, Pöyhönen K *et al.* *Commun. Phys.*, 2022,



光学全产业链 展示及交流平台



**精密光学展&
摄像头技术及应用展**
PRECISION OPTICS EXPO & CAMERA EXPO

第24届中国国际光电博览会

240,000M²展示面积 | 100,000+专业观众 | 3,000+参展企业

2023年9月6-8日

深圳国际会展中心(宝安新馆)



扫码登记免费参观

同期展会



信息通信展
INFORMATION & COMMUNICATION EXPO



激光技术
及智能制造展



红外技术及应用展
INFRARED APPLICATIONS EXPO



智能传感展
INTELLIGENT SENSING EXPO



光电子创新展
PHOTONICS INNOVATION EXPO



新型显示璀璨展
DISPLAY TECHNOLOGY EXPO

5:327

[17] Manna S, Nandy S, Roy B. *Phys. Rev. B*, 2022, 105:L201301

[18] Zheng S, Man X, Kong Z L *et al.* *Sci. Bull.*, 2022, 67:2069

[19] Li J, Mo Q, Jiang J H *et al.* *Sci. Bull.*, 2022, 67:2040

[20] Biesenthal T, Maczewsky L J, Yang Z *et al.* *Science*, 2022, 376:1114

[21] Li J K, Sun Y Y, Mo Q Y *et al.* Observation of Squeezed Chern Insulator in an Acoustic Fractal Lattice. 2022, arXiv:2205.05297

[22] Alexander S. *Phys. Rev. B*, 1984, 29:5504

[23] Banavar J R, Kadanoff L, Pruisken A M M. *Phys. Rev. B*, 1985, 31:1388

[24] Song Z G, Zhang Y Y, Li S S. *Appl. Phys. Lett.*, 2014, 104:233106

[25] He J, Liang Y, Kou S P. *Europhys. Lett.*, 2015, 112:17010

[26] Haldane F D M. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, 61:2015

[27] Titum P, Lindner N H, Rechtsman M C *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2015, 114:056801

[28] Wang X S, Brataas A, Troncoso R E. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 125:217202

[29] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1982, 49:405

[30] Benalcazar W A, Bernevig B A, Hughes T L. *Science*, 2017, 357:61

[31] Langbehn J, Peng Y, Trifunovic L *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 119:246401

[32] Song Z, Fang Z, Fang C. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 119:246402

[33] Schindler F, Cook A M, Vergniory M G *et al.* *Sci. Adv.*, 2018, 4:eaat0346

[34] Ezawa M. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, 120:026801

[35] Trifunovic L, Brouwer P W. *Phys. Rev. X*, 2019, 9:011012

[36] Xie B, Wang H X, Zhang X *et al.* *Nat. Rev. Phys.*, 2021, 3:520

[37] Noh J, Benalcazar W A, Huang S *et al.* *Nat. Photonics*, 2018, 12:408

[38] Ni X, Weiner M, Alù A *et al.* *Nat. Mater.*, 2019, 18:113

[39] Zhang X, Wang H, Lin Z *et al.* *Nat. Phys.*, 2019, 15:582

[40] Xue H, Yang Y, Gao F *et al.* *Nat. Mater.*, 2019, 18:108

[41] Zhang W *et al.* *Light Sci. Appl.*, 2020, 9:109

[42] Pai S, Prem A. *Phys. Rev. B*, 2019, 100:155135

[43] Wheeler W A, Wagner L K, Hughes T L. *Phys. Rev. B*, 2019, 100:245135

[44] Manna S, Duncan C W, Weidner C A. Anyon Braiding on A Fractal Lattice With A Local Hamiltonian. 2022, arXiv:2106.13816