

最小作用量原理及其量子实验

朱诗亮[†] 温永立 颜辉

(华南师范大学物理学院 原子亚原子结构与量子调控教育部重点实验室 粤港量子物质联合实验室 广州 510006)

2023-06-28收到

[†] email: slzhu@senu.edu.cn

DOI: 10.7693/wl20230708

物理学家的梦想是在一张小纸片中写下整个宇宙的秘密，而最小作用量原理可能就是必写的原理之一。最小作用量原理的提出有着极为深刻的科学与哲学内涵：它最早来自于生活中各种极值的思想，以及自然界中的各种极值现象，并最终演化成在物理和数学领域都有广泛应用的变分方法。物理学是研究物质结构及其运动规律的科学，物质的结构往往由体系的能量最小或熵最大等某些物理量的极值确定，如水珠的形状、凝聚态物相，甚至银河系的形状等，这正体现了最小作用量原理的威力。另一方面，我们现在所知道的物质运动方程都可以在写出相应的拉格朗日量后，通过最小作用量原理推导出。因此，最小作用量原理被科学家看作是物理学，甚至是自然界最具普适性的基本原理，它具备简洁和统一的科学美学特征，在物理学乃至科学发展史中有着极其重要的地位^[1, 2]。经典物理世界的最小作用量原理被无数实验验证。虽然该原理在量子力学的建立，特别是费曼路径积分方法的建立中处于核心位置，但量子最小作用量原理的实验验证，还仅是最近由我们的实验首次实现^[3]。本文将简要介绍最小作用量原理的历史和我们最近的实验。

最小作用量原理的发现和逐步推广谱写了科

学史华美篇章。古代科学家，如公元前2世纪的埃及人希罗(Hero)就猜想光的传播遵从最短时间法则，并由此论证了光在球面镜中反射时，入射角等于反射角。最小作用量原理的第一个成功范例是1650年法国数学家费马对光的传播原理作的概括性叙述：从空间一点A到另一点B，光沿着所需时间为最小值的路径传播。但光在不同介质中的折射角度究竟是否对应最短时间的路径，还要结合折射定律以及光在介质中的传播速度公式进一步计算。折射定律早在1620年就由斯涅耳在实验的基础上得出。1690年，惠更斯基于他的光的波动理论，给出介质折射率之比等于光在这两种介质中的速度之比，从而证明了费马时间最小原理和光折射中的斯涅耳折射定律一致。费马原理作为最小作用量原理早期最成功的例子，它那简洁、优美的形式和对光现象的高度概括意味着可能存在某种更普遍的原理。

为纪念该原理的创立者之一，科学家莫培督(P. Maupertuis)，最小作用量原理有时也叫莫培督原理。莫培督最早(大约在1744年)提出作用量的概念，并在后续研究中给出了力学和光学体系中的一些作用量形式。他坚信自然界的简单性源自作用量最小化，提出“自然界总是以一种最节省的方式运行”，他一生都在为阐述该原理而奋斗。同一年，数学家欧拉写下了现在称为欧拉-拉格朗日方程的一个特例，开启了最小作用量原理在数学、力学和物理学中的应用传奇。用现在的语言，最小作用量原理的核心思想是：物体从一个状态变为另一个状态可以有很多可能途径，每条途径确定了一个作用量，物体的真实轨迹由作用量S的极值来确定。讨论一个物理体系，如果描述它的拉格朗日量为 $\mathcal{L}(t, x, \dot{x})$ ，其中x是广义坐标， \dot{x} 是广义速度，则可以定义作用量S为： $S =$

表1 物理学中的最小作用量原理

	拉格朗日量	运动方程
经典力学	$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - V$	$F = ma$
电动力学	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$	$\partial^{\mu}F_{\mu\nu} = J_{\nu}$
狭义相对论	$\mathcal{L} = -\gamma mc^2 = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$	$p = \gamma mv$
广义相对论	$\mathcal{L} = (\alpha R - 2\alpha\Lambda + \mathcal{L}_m)\sqrt{-g}$	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$
量子力学	$\mathcal{L} = p\dot{q} - \hat{H}(p, q)$	$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$
Yang-Mills场	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu}^{\alpha}$	$D_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$

$\int \mathcal{L}(t, x, \dot{x}) dt$, 由变分 $\delta S = 0$ (即最小作用量原理), 可以得到欧拉—拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ 。

欧拉—拉格朗日方程是最小作用量原理的数学表述形式之一。它的基本思想是：在给定的边界条件下，使作用量 S 达到极小值的轨迹就是物体的实际运动轨迹。根据最小作用量原理，力学系统的性质都由其拉格朗日量确定，要找到作用量的表达式只需确定拉格朗日量即可，但是拉格朗日量是如何确定的呢？在诺特定理发现之前，物理学家们在寻找作用量时需要经过各种尝试。如果这样，最小作用量原理很难成为应用广泛的物理学研究方法。幸运的是，数学家诺特将该原理和对称性结合，推导出诺特定理：作用量的每一种连续对称性都有一个守恒量与之对应，给出了物理学的又一基石——对称性和守恒律的关系。通过对称性、守恒量和作用量三者之间的关系，可以互相推导，进而获得作用量的表达式。

最小作用量原理充当着物理学的核心角色，它可以推导出物理学中几乎全部关键的物质运动方程！表1列出了经典力学、电动力学、狭义和广义相对论、量子力学和 Yang—Mills 场的拉格朗日量，利用最小作用量原理 $\delta S = 0$ ，可以很方便地计算出对应的运动方程。历史上，最小作用量原理在希尔伯特推导广义相对论方程和薛定谔给出量子力学波动方程中都起到了关键作用。在文献[2]中记载，数学家希尔伯特知道了爱因斯坦关于广义相对论研究的初步思想后，首先猜出了现在称为爱因斯坦—希尔伯特作用量的广义相对论作用量，并利用最小作用量原理，比爱因斯坦早5天推导出了广义相对论场方程，即现在称为爱因斯坦场方程的广义相对论方程。不过，希尔伯特是否比爱因斯坦更早正确得出了广义相对论场方程目前仍有争议，但他确实是用不同的方法独立得出了场方程。

费曼在高中时第一次从老师那里听到最小作用量原理，便被它的简洁和美妙所震撼。潜藏于心的感悟最终结出硕果。1942年，费曼还是博士研究生时，他发表了根据最小作用量原理提出的量子力学路径积分表述，这是继波动

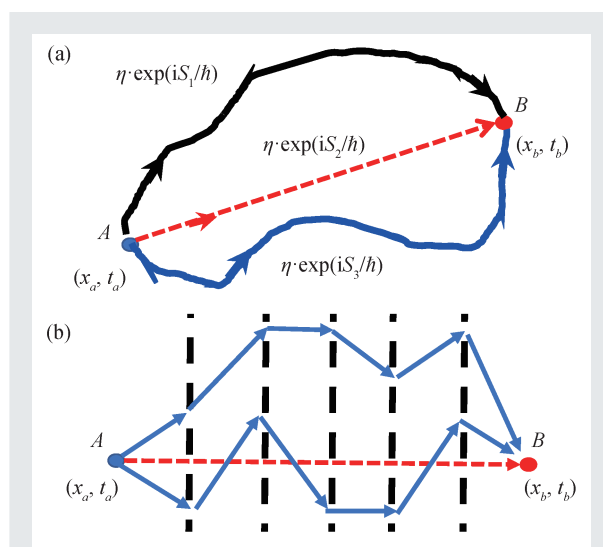


图1 路径积分示意图 (a) 粒子从 A 点到 B 点有无穷多路径，所有路径的几率相同，路径 j 的相位由作用量 S_j 确定；(b) 如果空间被栅栏隔开，则可分成有限条路径，如此图可分 $N = 5^5$ 条路径，等几率假设表明 $|\phi_1| = |\phi_2| = \dots = |\phi_N|$ ，这点和惠更斯原理有本质不同。实验原则上可探测每段对应的传播子

力学和矩阵力学之后的第三种量子力学表述方式。它以一种简洁、优美并最接近经典概念的方式诠释了量子理论。路径积分的基本思想可用图1来阐述。 t_a 时刻有个粒子局域在 x_a ，波函数记为 $\psi(x_a, t_a)$ ，我们想知道 t_b 时刻该粒子到达 x_b 的几率。原则上任意连接 A 和 B 点的路径都有可能。费曼给出了两条假设：(1)任意路径 j 都可表示为几率幅 $\phi_j = \eta \cdot \exp(iS_j/\hbar)$ ， η 是和路径无关的常数， S_j 是路径 j 对应的作用量，与经典力学的拉格朗日函数相对应；(2)末态是所有路径的几率幅之和，即 $\psi(x_b, t_b) = K(x_b, t_b; x_a, t_a)\psi(x_a, t_a) = \eta \sum_j \exp(iS_j/\hbar)\psi(x_a, t_a)$ ，其中 $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ 称为传播函数。第(1)条又叫等几率假设，即任意路径的几率相同，这和经典光学中的惠更斯原理有本质不同，也正是量子力学的精妙之处。

按路径积分方法所描述的粒子运动具有如下特征： j 路径的几率幅由 $\phi_j = \eta \cdot \exp(iS_j/\hbar)$ 确定， S_j/\hbar 为几率幅的相位，作用量 S_j 和普朗克常数 \hbar 的取值对相位的影响都很大。假设对所有路线， S_j 都比 \hbar 大很多，每一路线虽然几率一样，但对于临近的一些路径，相位变化大并且路径特别多，

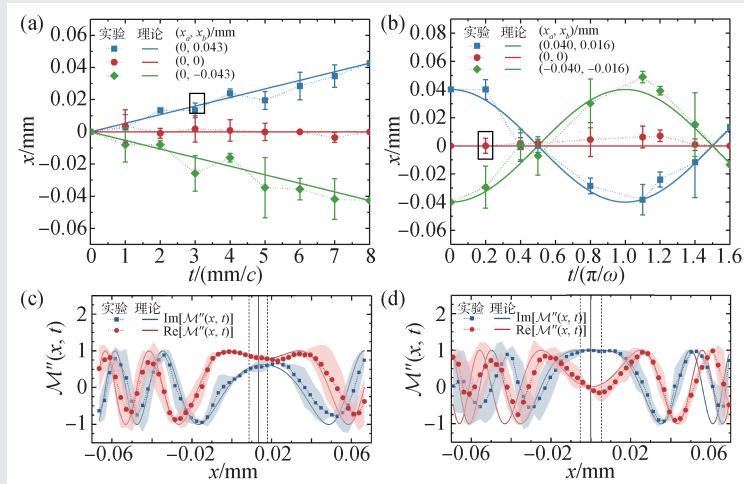


图2 量子最小作用量原理实验^[3] 最小作用量原理确定的自由空间(a)、谐振势(b)的光子经典路径；(c)、(d)对应于图(a)、(b)中方框内数据点的传播子 $\mathcal{M}''(x, t)$ 的实部和虚部

这些路径会相干相消，相互叠加之后都互相抵消了。但有一个区域例外：当一条路径与其临近路径在一级近似上全都给出相同相位时，这些路径不会相互抵消，而是干涉相长，这就是最小作用量原理 $\delta S = 0$ 确定的路径。在宏观世界，由于 \hbar 近似为 0，量子现象就过渡到了经典的运动轨迹。也就是说，在宏观世界里，由于相位 S_j/\hbar 趋于无穷大，一般路径都很容易相干相消，只有作用量 S 取极值的那一条，没有其他路径将其抵消。因此，路径积分把经典世界不好理解的问题(大自然为什么选择作用量为极值的路径)也给出了一个清晰的物理图像^[4]。

因为之前没有实验能直接测量传播子，量子力学中的最小作用量原理一直没有实验检验。测量传播子的主要困难在于，传播子是复数，传统的量子测量技术无法直接对其进行测量。我们通过借鉴近年来国际上发展的直接测量波函数的方法^[5]，设计和构建了传播子的理论测量方案，该方案将传播子的实部和虚部分别对应到实验可观测测量，然后重构出传播子。其后，我们根据此方案设计并搭建了量子光学实验系统，实验中先通过将单光子的空间模式和偏振模式进行耦合，然后将其输送至渐变折射率光学材料中进行演化，最后用可探测单光子的相机对光子的空间分布进行探测，传播子的实部和虚部最终便可以在不同

偏振态光子空间分布图中被分析并重构出来。这个实验中传播子的测量结果与路径积分的理论结果高度吻合，从而首次在实验中测出了传播子。

在成功测量出传播子之后，我们进一步开展通过传播子验证量子力学的最小作用量原理的研究。由于作用量正比于传播子的相位因子，因此，对测量所得传播子的相位进行分析，通过最小作用量原理，找到传播子相位的极值所在位置，便能得到单光子的经典路径。经过对海量的传播子实验数据进行计算和分析，我们成功地得到了单光子在

自由空间和谐振势场中的经典路径，这些路径与理论所预测的路径吻合，从而首次在实验中演示和验证了量子力学中的最小作用量原理，揭示了最小作用量原理在量子力学和经典力学中的统一性。实验测量到的传播子和最小作用量原理确定的经典路径如图 2 所示。

路径积分表述极大地推动了现代量子物理学的发展，是量子场论、量子统计、量子引力等多个领域的基石。然而，物理学界一直未有实验测量出路径积分中的关键物理量——传播子，这使得路径积分的基本概念研究一直停留在理论阶段。此外，因为传播子测量技术的缺失，量子力学中的最小作用量原理一直也未能被实验直接演示或验证。我们的工作^[3]首次实现了对传播子的测量，打开了实验研究路径积分相关的量子现象的大门。最小作用量原理是物理学中的普适性原理，在量子系统中实现对其实验的演示也可为量子—经典界限等基本物理问题的研究提供新的视角。

参考文献

- [1] 徐良. 最小作用量原理与物理学的发展. 四川教育出版社, 2001
- [2] Rojo A, Bloch A. The Principle of Least Action: History and Physics. Cambridge University Press, 2018
- [3] Wen Y L, Wang Y, Tian L M *et al.* Nat. Photon., 2023, <https://doi.org/10.1038/s41566-023-01212-1>
- [4] Feynman R P. Rev. Mod. Phys., 1948, 20: 367
- [5] Lundeen J S, Sutherland B, Patel A *et al.* Nature, 2011, 474: 188