无量纲量子力学态矢表示

汪克林[1]　高先龙[2]　曹则贤[3,†]

（1　中国科学技术大学近代物理系　合肥　230026）

（2　浙江师范大学物理学院　金华　321004）

（3　中国科学院物理研究所　北京　100190）

Dimensionless quantum mechanical state vector

WANG Ke-Lin[1]　GAO Xian-Long[2]　CAO Ze-Xian[3,†]

(1　Department of Modern Physics，University of Science and Technology of China，Hefei 230026，China)

(2　Department of Physics，Zhejiang Normal University，Jinhua 321004，China)

(3　Institute of Physics，Chinese Academy of Sciences，Beijing 100190，China)

2023－08－31收到

† email：zxcao@iphy.ac.cn

DOI：10.7693/wl20230904

摘　要　狄拉克基于叠加原理的要求引入了物理状态的矢量表示，仓促间留下了量纲不一致的问题。近年有研究者从量纲分析的角度做了弥补，但未涉及问题的实质。本文坚持量子力学态矢量应采用无量纲表示，从而做到量子力学表示中波函数、变换、物理量算符及其本征值等角色主体各自的量纲一致性，特别是使得态空间上的变换满足群的要求。基于湮灭算符和产生算符 a，a^{+} 可为位置算符、动量算符构建无量纲态矢表示，消除文献中不自洽的量纲关系所造成的一些困扰。

关键词　量子态矢量，态空间，无量纲表示，完备性条件，一致性

Abstract　Starting from the superposition principle, Dirac introduced complex vector space representation for quantum mechanics, leaving behind in a hash some flaws in the theory, in particular dimension discrepancy concerning the basis vector sets $\{|x\rangle\}$ and $\{|p\rangle\}$ for position operator and momentum operator, respectively. A remedy for this discrepancy was recently proposed by assigning dimension to the state vectors $|x\rangle$ and $|p\rangle$, which is unacceptable and may bring with new confronts. Abiding by the principle of dimensionless representation for state vectors, and thus the relevant transformations, we formulate a dimensionless representation for the state vectors for position and momentum, i.e., $|q\rangle$ and $|p\rangle$, by using the annihilation and creation operators a, a^{+}, thus eliminate the problems caused by dimension discrepancy in quantum mechanics literature.

Keywords　quantum state vector，state space，dimensionless representation，completeness condition，consistency

1 量子态矢表示的量纲问题

量子力学是二十世纪物理学的伟大成就。玻恩在1924年引入“量子力学”一词，玻恩、海森堡和约当在1925年给出了量子力学的矩阵力学表示。紧接着，薛定谔在1926年发展了波动力学，其基本思想是量子体系用满足一个波动方程，即所谓的薛定谔方程的波函数所描述。当然，描述微观物理系统的量子理论是一个理论体系，包括基本原理以及表示等。将量子理论的基本要素整合成一个恰当的理论体系，这个工作由狄拉克在其1930年所著《量子力学基本原理》一书中完成[1]。在该书中，狄拉克引入了$\langle\ |$, $|\ \rangle$这样的左态矢(bra)、右态矢(ket)符号，以一个更抽象因而更具有一般性的方式来描述微观物理系统。如果有必要，可以为态矢加入特定的标签，记为$|A\rangle$，$|B\rangle$等。矢量表示自动满足了量子力学的态叠加原理。根据同矢量空间的类比，可以把一组$\{|\ \rangle\}$当作量子态空间的一个完备基矢集，形式上这总是可行的，则任意的态矢量可以表示为基矢的线性组合。例如，考虑最简单的一维微观粒子系统，它只有一个外部自由度，相应的物理量有坐标算符$\hat{x}$和动量算符$\hat{p}_x$。如果用$\{|x\rangle\}$或者$\{|p_x\rangle\}$作为量子态空间的基矢集，那么，任意物理状态对应的态矢量可以表示为相应的展开。矢量空间的基矢集应满足完备性条件，针对$\{|x\rangle\}$和$\{|p_x\rangle\}$，狄拉克指出有如下关系

$$\int |x\rangle\langle x|\mathrm{d}x = I \tag{1}$$

和

$$\int |p_x\rangle\langle p_x|\mathrm{d}p_x = I \quad , \tag{2}$$

其中I表示单位算符或者恒等算符。利用(1)式和(2)式所表示的完备性，设$|\psi\rangle$是态空间中的任一态矢，便有

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= I|\psi\rangle = \int |x\rangle\langle x|\psi\rangle\mathrm{d}x \\ &= \int \langle x|\psi\rangle|x\rangle\mathrm{d}x = \int \psi(x)|x\rangle\mathrm{d}x \quad ,\end{aligned} \tag{3}$$

其中$\psi(x)=\langle x|\psi\rangle$称作态矢的位置波函数。式(3)应理解为态矢$|\psi\rangle$在基矢集$\{|x\rangle\}$上的展开。类似地，有

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= I|\psi\rangle = \int |p_x\rangle\langle p_x|\psi\rangle\mathrm{d}p_x \\ &= \int \psi(p_x)|p_x\rangle\mathrm{d}p_x \quad ,\end{aligned} \tag{4}$$

其中$\psi(p_x)=\langle p_x|\psi\rangle$称作态矢的动量波函数。进一步地，关于波函数有所谓的玻恩诠释，这见于1926年薛定谔创立波动力学的论文[2]。依据玻恩的诠释，波函数的模平方$|\psi|^2$可理解为粒子出现在相应表示空间里的几率密度。函数$\rho(x)=|\psi(x)|^2$和$\rho(p)=|\psi(p)|^2$分别是在对微观系统作位置测量时测得粒子位置为x的几率密度，或者作动量测量时测得动量值为p的几率密度。以上的内容被称作狄拉克由态叠加原理引出的表象理论。这套理论在狄拉克的著作问世之后很多年里被不假思索地继承了下来。

然而，由于量子力学同热力学、规范场论这些原理性理论不同，它是一个构造性的理论，虽经100年的发展结出累累硕果，且从基础层面上得到了很大的改进与补充，但它依然是基础不牢靠的。量子理论取得的巨大成功一定程度上遮蔽了对其内在缺陷的批判性审视。笔者在多年教授量子力学的过程中，对量子力学早期理论中的一些或明或暗的问题有所察觉。实际上，近几年出现了对量子理论更多的且可能是从新的视角而来的质疑。这中间，因更加复杂的、以验证更能凸显“量子力学的神奇”为出发点的诸多实验结果的出现，使得量子理论的测量原理又引发了更加深入的讨论。如果冷静点看，量子测量理论从未令人信服，一个可能的原因也许是物理学存在天然的局限性吧。比如，仪器得出的粒子位置是个有测度的有限区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，而理论中的粒子位置则永远是个测度为0的点，这个矛盾是无法调和的。另一个新的热点是对量子力学哈密顿量应该是厄米算符的否定，这引起了研究非厄米哈密顿量的热潮。然而，虽然非厄米哈密顿量可以有全为实的本征值，但相应的算符$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}Ht/h}$却不能保证是酉正的，这又会引起新的问题[3]。难怪有研究

者指出缺乏数学考量会在波动力学中导致意想不到的数学矛盾(…lack of mathematical concern can readily lead to surprising mathematical contradictions in wave mechanics)[4]。

本文关注量子力学表示理论中的量纲不一致的问题。考虑量子力学的基本问题，应该从根本处出发。按照概率诠释，波函数应满足$\int|\Psi|^2\mathrm{d}\Omega=1$，其中$\mathrm{d}\Omega$是给定表示空间的体积元。由于总概率1是个冷冰冰的无量纲量，显然我们必须接受波函数Ψ为有量纲量的事实。这自然就引起对量子力学表示中所涉及的一些对象如波函数，物理量算符/本征值，各种变换，当然还有态矢的量纲问题的思考。在其经典著作[1]的§5中，狄拉克写道："如果有依赖于参数x的态矢$|x\rangle$，参数x在一定的范围内取值，则可以对x积分得到新的态，$\int|x\rangle\mathrm{d}x=|Q\rangle$。"在这个积分表示的等式里，显然有必要计较一下$|x\rangle$和$|Q\rangle$的量纲问题，但狄拉克未对这个小问题多做关注。这个疏忽以及其后量子力学表述中的量纲混乱，相信有很多研究者很早都曾注意到了。

现在从量纲分析的角度审视上述(1)式和(2)式所表达的完备性关系。在(1)式和(2)式右方的恒等算符或单位算符是线性空间之基集完备性的一般表示，是一个无量纲的量。两式左侧积分中的$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}p$分别具有量纲L，MLT^{-1}。故如果认定完备性由(1)式和(2)式所表达的话，则$|x\rangle$，$|p_x\rangle$应具有量纲[5]，分别为$[|x\rangle]=L^{-\frac{1}{2}}$，$[|p_x\rangle]=M^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$。若计入量纲，则需将以往教科书中列出的关系式

$$\langle p_x|x\rangle=\langle x|p_x\rangle^*=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_x x/\hbar}\ ,\tag{5a}$$

修改为

$$\langle p_x|x\rangle=\langle x|p_x\rangle^*=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_x x/\hbar}\ ,\tag{5b}$$

以保证公式两边的量纲一致[6]。

将类似$|x\rangle$，$|p_x\rangle$这样的态矢作为有量纲量处理，则从另一个角度要求赋予波函数相应的量纲。考察无量纲的数算符本征态$|n\rangle$。如果对$|n\rangle$施加(1)式和(2)式的恒等算符，则有

$$|n\rangle=\int|x\rangle\langle x|n\rangle\mathrm{d}x=\int\varphi_n(x)|x\rangle\mathrm{d}x\ ,\tag{6}$$

$$|n\rangle=\int|p_x\rangle\langle p_x|n\rangle\mathrm{d}p_x=\int\varphi_n(p_x)|p_x\rangle\mathrm{d}p_x\ .\tag{7}$$

式(6)中的波函数$\varphi_n(x)$具有量纲$L^{-\frac{1}{2}}$，式(7)中的波函数$\varphi_n(p_x)$具有量纲$M^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$。这与波函数的几率诠释带来的波函数量纲一致。又，对动量本征态$|p_x\rangle$施加(1)式的恒等算符，得

$$|p_x\rangle=\int|x\rangle\langle x|\mathrm{d}x|p_x\rangle=\int\Phi_p(x)|x\rangle\mathrm{d}x\ ,\tag{8a}$$

对位置本征态$|x\rangle$施加(2)式的恒等算符，得

$$|x\rangle=\int|p_x\rangle\langle p_x|\mathrm{d}p_x|x\rangle=\int\Phi_x(p)|p_x\rangle\mathrm{d}p_x\ ,\tag{8b}$$

这里的$\Phi_p(x)$和$\Phi_x(p)$的量纲为$M^{-\frac{1}{2}}L^{-1}T^{\frac{1}{2}}$。自然这个表象变换之间也不会生出量纲上的矛盾。这种做法[5, 6]看似消除了由狄拉克完备性表示所带来的量纲问题，但不是解决问题的正确出路。将状态矢量当作有量纲量，原则上是不合适的。

有必要在量子力学的表示中严肃地对待相关主体的量纲问题。对于量子力学表示中存在一些量纲不自洽的地方，类似式(5b)那样的修补措施并未触及问题的本质，无法从根本上解决问题，原则上也是不合适的。这种物理量(算符)、态矢、波函数和变换函数各有量纲的表示，直觉看来就有不合适的地方，会对量子力学的表述带来极大的麻烦。(8)式里的$\Phi_p(x)$和$\Phi_x(p)$，就是海森堡1927年文章里用到的、由约当引入的函数$S(q,p)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}qp/h}$ [7]，显然后者是无量纲的，这与其物理角色相符合。实际上，在量子力学采用的线性空间语境中，原则上，(状态)空间之上的以及不同(状态)空间之间的变换都应该采用无量纲的表示。若变换函数(矩阵)是有量纲的，这无法满足群的要求。其实，狄拉克在其经典著作[1]的§5中指出，以要求物理态满足叠加原理为出发点，选择恰当的复数域上的矢量来描述状态，记为$|A\rangle$，其中A为标签。标签是多样的，也可以是多重的，但我们有理由要求选择不同标签所标记的态矢是一致的。选择无量纲态矢表示才能做到理论的一致性。

那么，如何构造免于引起其他矛盾的无量纲态矢表示呢？

2 无量纲量子态矢表示

在回答上述问题之前，我们应仔细思考一下微观物理系统态矢的意义。它是表述微观物理系统一个确定的状态，这一状态是客观存在的，独立于是否被观察以及在被使用何种手段观测的事实。如果态矢本身带有量纲，则表示微观物理系统的态矢，即系统的存在自身，会随着观测物理量的选择改变，设想对状态$|A\rangle$进行物理量$\hat{B}$的测量而落入后者的某个本征态$|B_i\rangle$，而状态$|A\rangle$和$|B\rangle$具有不同的量纲，这样的图景显得令人难以接受。当面对多个量纲不同的物理量的共同本征态(集)时，这个问题就更麻烦了。当然还有前述的表示状态空间变换带来的其他问题。

要避免这一问题，量子理论态空间中的态矢必须是无量纲的，同时又要和其他的量子理论基本原理相协调。在给出$|x\rangle$，$|p_x\rangle$的无量纲表示之前，有必要先讨论一下与这一问题密切相关的表述变换。

表述变换始于谐振子系统的求解问题[8]。如果把描述一维谐振子的基本物理量$\hat{x}$，$\hat{p}$转换成算符对a，a^+，为此有

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a+a^+\right),\quad \hat{p}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(a^+-a\right). \tag{9}$$

其逆变换为

$$a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}}\,\hat{p}\right),\quad a^+=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}}\,\hat{p}\right). \tag{10}$$

经过这一变换后，可将谐振子哈密顿量$H=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$对角化为$H=\hbar\omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)$。

自从1927年被引入以后，在许多问题中人们都倾向于作这样的从$(\hat{x},\hat{p})$到(a,a^+)的表述变换[9]。不过对于一般情形的表述变换自然不能僵硬地采取(9)—(10)式那样的变换，因为在那里用到了谐振子问题的特定物理参量。对于一般情形，表述变换可取如下形式

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2\varDelta}}\left(a+a^+\right),\quad \hat{p}_x=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\varDelta}{2}}\left(a^+-a\right). \tag{11}$$

逆变换为

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2\varDelta}{\hbar}}\,\hat{x}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{\hbar\varDelta}}\,\hat{p}\right),\quad a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2\varDelta}{\hbar}}\,\hat{x}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{\hbar\varDelta}}\,\hat{p}\right). \tag{12}$$

(11)—(12)式中除了作为量子力学标签的约化普朗克常数$\hbar$以外，还包含一个量纲为MT^{-1}的参量$\varDelta$，或者说$[\varDelta/\hbar]=L^{-2}$，同相空间的规范有关[10]。这样可以保证a，a^+无量纲的要求。(11)—(12)式变换的正确性可由它们满足如下基本对易式

$$\left[\hat{x},\hat{p}\right]=\mathrm{i}\hbar \tag{13}$$

及

$$\left[a,a^+\right]=1 \tag{14}$$

而得到保证。

基于(a,a^+)表述构造的量子态空间，其中的态矢自然是无量纲的。例如数算符$\hat{n}=a^+a$的本征态矢为

$$|n\rangle=\frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \tag{15}$$

其中$|0\rangle$是真空态。态矢集$\{|n\rangle\}$就构成一个无量纲的完备态矢集。

于是，从$(\hat{x},\hat{p})$表述变换到(a,a^+)表述以后，这里构成态空间的态矢也是无量纲的，正是所需要的描述微观物理系统的客观、独立存在的态矢。我们要指出，描述微观系统状态的态矢应是无量纲的，其对波函数具有量纲不妨碍，其同表征微观系统物理性质的算符具有量纲是不同的两件事。更确切一点说，量子理论恰当的形式应是系统的态矢是无量纲的，态矢量间的变换是无量纲的，而波函数、物理量算符/本征值则各具恰当的量纲。现在我们来讨论一维情形的位置算符$\hat{x}$及动

量算符$\hat{p}$，且算符$\hat{x}$，$\hat{p}$分别具有量纲$[\hat{x}]=[L]$，和$[\hat{p}]=[MLT^{-1}]$。那么，如果要求无量纲的态矢表示，算符$\hat{x}$和$\hat{p}$会有什么样的本征态矢？为了回答这一紧要问题，下面先作一点准备工作。

借助(a, a^{+})可引入两个无量纲的算符

$$\hat{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^{+}) , \tag{16a}$$

$$\hat{B}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(a^{+}-a) . \tag{16b}$$

参照(15)式可知算符$\hat{A}$和$\hat{B}$的本征态矢可选择如下形式

$$|q\rangle=\mathrm{e}^{-q^2/2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa^{+}-(a^{+})^2/2}|0\rangle , \tag{17}$$

$$|p\rangle=\mathrm{e}^{-p^2/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,pa^{+}+(a^{+})^2/2}|0\rangle . \tag{18}$$

将(16a)式中的算符$\hat{A}$作用到(17)式的态矢上，可见

$$\begin{aligned}\hat{A}|q\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^{+})|q\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}a^{+}(\mathrm{e}^{-q^2/2}\ \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa^{+}-(a^{+})^2/2}|0\rangle)+\\&\quad\frac{1}{\sqrt{2}}a(\mathrm{e}^{-q^2/2}\ \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa^{+}-(a^{+})^2/2}|0\rangle)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}a^{+}(\mathrm{e}^{-q^2/2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa^{+}-(a^{+})^2/2}|0\rangle)+\\&\quad\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,q-a^{+})(\mathrm{e}^{-q^2/2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa^{+}-(a^{+})^2/2}|0\rangle)\\&=q|q\rangle .\end{aligned} \tag{19}$$

这就证明了$|q\rangle$是算符$\hat{A}$的本征值为q的本征态矢。同样可证$|p\rangle$是$\hat{B}$的本征值为p的本征态矢。

显然，$|q\rangle$，$|p\rangle$也分别是位置算符$\hat{x}$与动量算符$\hat{p}$的本征态矢。比较(11)式和(16)式，可以看出，$\hat{x}$，$\hat{p}$和前面提出的$\hat{A}$，$\hat{B}$算符有如下的关系

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{\varDelta}}\,\hat{A},\ \hat{p}_x=\sqrt{\hbar\varDelta}\,\hat{B} . \tag{20}$$

因此有

$$\hat{x}|q\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{\varDelta}}\,q|q\rangle , \tag{21a}$$

$$\hat{p}_x|\hat{p}\rangle=\sqrt{\hbar\varDelta}\,p|\hat{p}\rangle . \tag{21b}$$

$|q\rangle$和$|p\rangle$分别是$\hat{x}$及$\hat{p}$的本征态矢。

对上述结果有如下几点补充说明：

(a)这里给出了最关键的答案。无须为粒子的位置表示或动量表示选择有量纲的态矢$|x\rangle$和$|p_x\rangle$，容易为算符$\hat{x}$和$\hat{p}_x$构造出无量纲的$|q\rangle$及$|p\rangle$作为它们的本征态矢。

(b)可以说算符$\hat{x}$与$\hat{A}$有共同的无量纲本征态$|p\rangle$，即

$$\hat{x}|q\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{\varDelta}}\,q|q\rangle,\ \hat{A}|q\rangle=q|q\rangle . \tag{22}$$

这就是说无量纲的态矢$|q\rangle$既是$\hat{x}$的本征态矢，亦是$\hat{A}$的本征态矢，但两者量纲不同，前者的本征值是有量纲的$\sqrt{\frac{\hbar}{\varDelta}}\,q$，后者的本征值是无量纲的$q$。这点也启示我们应该讲本征量(eigenquantity)，而不是本征值(eigenvalue)。在普遍的情形下，物理算符作用到一个态矢上涉及的是一个有量纲的本征量。

(c)本征态$|q\rangle$和$|p\rangle$的表示式(17)—(18)中的因子为$\mathrm{e}^{-q^2/2}$和$\mathrm{e}^{-p^2/2}$，其实换成任意函数形式$f_1(q)$、$f_2(p)$对证明它们是$\hat{A}$和$\hat{B}$的本征态矢都没有影响。至于为什么选择因子$\mathrm{e}^{-q^2/2}$和$\mathrm{e}^{-p^2/2}$，在后面的讨论中我们会给出说明。

3　与量子理论其他基本原理的一致性问题

针对原有量子理论关于量子态空间中存在的内在矛盾，我们指出应坚持量子态矢无量纲的原则，相较于按量纲分析消除(局部)矛盾的简单措施，这会避免引起其他矛盾，有利于保持量子理论整体上的一致性。事实是，将量子态空间看作是独立的、抽象的存在，因此选择无量纲表示，微观系统所有的状态都由矢空间中的无量纲态矢表示，任何物理量算符，不论其算符有什么样的量纲，它们的本征态集都是无量纲的。选定任一表象都没有问题，而且基矢集之间的变换，即表象变换都是允许的，不会引起量纲上的不协调。为了展示这一点，下面具体讨论$\{|n\rangle\}$，$\{|q\rangle\}$，$\{|p\rangle\}$几种态矢集之间的内积。先计算$\langle n|p\rangle$。

$$\begin{aligned}\langle n|p\rangle &= \langle n|\mathrm{e}^{-p^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,pa^+ + (a^+)^2/2}|0\rangle = \mathrm{e}^{-p^2/2}\langle n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,pa^+ + (a^+)^2/2}|0\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-p^2/2}\langle n|\sum_{m_1}\frac{(\mathrm{i}\sqrt{2}\,p)^{m_1}}{m_1!}(a^+)^{m_1}\sum_{m_2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m_2}}{(2m_2)!}(a^+)^{2m_2}|0\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-p^2/2}\left[\sum_{m_1=0}\frac{(\mathrm{i}\sqrt{2}\,p)^{m_1}}{m_1!}n(n-1)\cdots\cdots(n-m_1)\left\langle n-m_1\right|\sum_{m_2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m_2}\sqrt{(2m_2)!}}{(2m_2)!}\left|2m_2\right\rangle\right] \\
&= \mathrm{e}^{-p^2/2}\sum_{m_1=0}\sum_{m_2}\frac{(\mathrm{i}\sqrt{2}\,p)^{m_1}}{m_1!(n-m_1)!}n!\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{m_2}\sqrt{(2m_2)!}}{m_2!}\delta_{n-m_1,2m_2} \\
&= \mathrm{e}^{-p^2/2}\sum_{m=0}\frac{(\mathrm{i}\sqrt{2}\,p)^m n!\left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-m)/2}\sqrt{(n-m)!}}{m!(n-m)!(n-m)!}\ .\end{aligned} \tag{23}$$

从式(23)可看出，从$\{|n\rangle\}$及$\{|p\rangle\}$中各取任一态矢，内积$\langle n|p\rangle=\langle p|n\rangle^*$都是有限存在的，即是说在量子态空间中以$\{|n\rangle\}$态矢集为基的表象同以$\{|p\rangle\}$态矢集为基的表象的变换是可行的。

关于$\langle q|p\rangle$，可计算如下：

$$\langle q|p\rangle = \mathrm{e}^{-q^2/2}\mathrm{e}^{-p^2/2}(\langle 0|\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa-a^2/2})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,pa^+ + (a^+)^2/2}|0\rangle)\ . \tag{24}$$

为了计算上式，我们在这里需应用相干态的完备关系

$$\iint \mathrm{e}^{-\zeta^2-\eta^2}|\zeta+\mathrm{i}\eta\rangle\langle\zeta+\mathrm{i}\eta|\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta}{\pi} = \hat{I}\ , \tag{25}$$

其中$|\zeta+\mathrm{i}\eta\rangle$是相干态，

$$|\zeta+\mathrm{i}\eta\rangle = \mathrm{e}^{(\zeta+\mathrm{i}\eta)a^+}|0\rangle\ . \tag{26}$$

将(25)插入(24)式得

$$\begin{aligned}\langle q|p\rangle\mathrm{e}^{q^2/2}\mathrm{e}^{p^2/2} &= \langle 0|\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa-a^2/2}\left(\iint \mathrm{e}^{-\zeta^2-\eta^2}|\zeta+\mathrm{i}\eta\rangle\langle\zeta+\mathrm{i}\eta|\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,pa^+ + (a^+)^2/2}|0\rangle \\
&= \iint\langle 0|\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,qa-a^2/2}|\zeta+\mathrm{i}\eta\rangle\langle\zeta+\mathrm{i}\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,pa^+ + (a^+)^2/2}|0\rangle\mathrm{e}^{-\zeta^2-\eta^2}\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta}{\pi} \\
&= \iint \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,q(\zeta+\mathrm{i}\eta)-(\zeta+\mathrm{i}\eta)^2/2}\langle 0|\zeta+\mathrm{i}\eta\rangle\langle\zeta+\mathrm{i}\eta|0\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,p(\zeta-\mathrm{i}\eta)+(\zeta-\mathrm{i}\eta)^2/2}\mathrm{e}^{-\zeta^2-\eta^2}\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta}{\pi} \\
&= \iint \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,q(\zeta+\mathrm{i}\eta)-(\zeta+\mathrm{i}\eta)^2/2}\mathrm{e}^{-(\zeta^2-\eta^2+2\mathrm{i}\zeta\eta)/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,p(\zeta-\mathrm{i}\eta)+(\zeta-\mathrm{i}\eta)^2/2}\mathrm{e}^{-\zeta^2-\eta^2}\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta}{\pi} \\
&= \iint \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,(q+\mathrm{i}p)\zeta}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,(q+\mathrm{i}p)\eta}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\zeta\eta}\mathrm{e}^{-\zeta^2-\eta^2}\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta}{\pi} \\
&= \iint \mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,(q+\mathrm{i}p)\zeta}\mathrm{e}^{-\left(\eta-\frac{\sqrt{2}\,(q+\mathrm{i}p)-2\mathrm{i}\zeta}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{(\sqrt{2}\,(q+\mathrm{i}p)-2\mathrm{i}\zeta)^2/4}\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi}\int \mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,(q+\mathrm{i}p)\zeta}\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\,(q+\mathrm{i}p)\zeta}\mathrm{e}^{(p+\mathrm{i}q)^2/2}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{(p+\mathrm{i}q)^2/2}\int \mathrm{e}^{-2\zeta^2}\mathrm{e}^{2\sqrt{2}\,q\zeta}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{(p+\mathrm{i}q)^2/2}\int \mathrm{e}^{-2(\zeta-q/\sqrt{2})^2}\mathrm{e}^{q^2}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(p+\mathrm{i}q)^2}\mathrm{e}^{q^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{q^2/2}\mathrm{e}^{p^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}\ .\end{aligned} \tag{27}$$

将两端的$e^{q^2/2}e^{p^2/2}$消掉，即得

$$\langle q|p\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,e^{ipq} \quad , \tag{28}$$

此与海森堡1927年文章中的$S(q,p)=e^{2\pi iqp/h}$同。

在得到(28)式以后可以提出两点，一是$\{|q\rangle\}$表象及$\{|p\rangle\}$表象间的表示是可行的，即它们之间任意态矢的内积是有限存在的，其中的因子e^{iqp}正是以往设想的结果。由于这里q和p都是无量纲的纯数值，故不需加入量纲因子写成$e^{2\pi iqp/h}$的形式。顺便说一句，正是由于在(17)—(18)式中为$|q\rangle$及$|p\rangle$选定了$e^{-q^2/2}$及$e^{-p^2/2}$的因子，才有(28)式的这种简单关系。

顺便指出一点，上述得到的态矢$|q\rangle$和$|p\rangle$仍然是不可归一的。以$|q\rangle$为例，计算态矢$|q\rangle$自身的模，

$$\begin{aligned}
\langle q|q\rangle &= e^{-q^2/2}\langle 0|e^{\sqrt{2}qa-a^2/2}e^{\sqrt{2}qa^+-(a^+)^2/2}|0\rangle e^{-q^2/2} \\
&= e^{-q^2}\iint\langle 0|e^{\sqrt{2}qa-a^2/2}e^{-\zeta^2-\eta^2}|\zeta+i\eta\rangle\langle\zeta+i\eta|\times \\
&\quad e^{\sqrt{2}qa^+-(a^+)^2/2}|0\rangle e^{-\zeta^2-\eta^2}\frac{d\zeta d\eta}{\pi} \\
&= e^{-q^2}\iint e^{-\zeta^2-\eta^2}\langle 0|e^{\sqrt{2}q(\zeta+i\eta)-(\zeta+i\eta)^2/2}|\zeta+i\eta\rangle\times \\
&\quad \langle\zeta+i\eta|e^{\sqrt{2}q(\zeta-i\eta)-(\zeta+i\eta)^2/2}|0\rangle\frac{d\zeta d\eta}{\pi} \\
&= e^{-q^2}\iint e^{-\zeta^2-\eta^2}e^{\sqrt{2}q(\zeta+i\eta)-(\zeta+i\eta)^2/2}\,e^{-(\zeta+i\eta)^2/2}\times \\
&\quad e^{\sqrt{2}q(\zeta-i\eta)-(\zeta+i\eta)^2/2}\frac{d\zeta d\eta}{\pi} \\
&= e^{-q^2}\iint e^{-\zeta^2-\eta^2}e^{2\sqrt{2}q\zeta}\frac{d\zeta d\eta}{\pi} \\
&= e^{-q^2}\iint e^{-2\zeta^2+2\sqrt{2}q\zeta}\frac{d\zeta d\eta}{\pi} \\
&= e^{-q^2}e^{q^2}\iint e^{-2(\zeta-q/\sqrt{2})^2}\frac{d\zeta d\eta}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-q^2}e^{q^2}\int d\zeta = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int d\zeta\ .
\end{aligned} \tag{29}$$

从上式结果可以看出，一是又一次证实了(17)—(18)式中选定$e^{-q^2/2}$及$e^{-p^2/2}$的理由，使(29)式的右方不再含$q\to\infty$，$e^{q^2}\to\infty$的发散因素。二是尽管消掉了随$q\to\infty$的发散因素，仍然留下了因子$\int d\zeta\to\infty$，这表明这个发散与q是个连续量有关，但却和其具体性质无关。这是不奇怪的，这和量子理论中遇到的诸如平面波的发散(不可归一化)等情形是一样的，这都是源于量子理论，从一开始就是在点粒子的基本出发点上选择的，是我们对自然认知的理论上埋下的固有缺陷，无法规避掉。无穷维矢量空间的发散问题，这在狄拉克的经典著作的§5中已有说明[1]。

4 结束语

迄今为止，用于表述微观物理系统状态的态空间或希尔伯特空间形式上仍有一定的缺陷，仅仅按量纲分析的考虑去修补，并未涉及问题的实质，也不是正确的解决方案。此一根本性质的困难源于原有设定的量子态空间中由所谓的位置算符本征态矢集$\{|x\rangle\}$和动量算符本征态矢集$\{|p_x\rangle\}$，赋予它们以量纲不符合物理系统的态矢不应具备量纲的原则。基于对$(\hat{x},\hat{p})$到(a,a^+)表述变换的研究，我们借助(a,a^+)表述构造出了量子态空间的无量纲表示，并且参照数算符本征态容易构造位置算符$\hat{x}$和动量算符$\hat{p}$的无量纲态矢集$\{|q\rangle\}$和$\{|p\rangle\}$。将狄拉克的本征态集$\{|x\rangle\}$和$\{|p_x\rangle\}$用态矢集$\{|q\rangle\}$和$\{|p\rangle\}$代替，量子理论的其它内容整体上会符合量纲的一致性，而态矢集的完备性、表象间变换等都可以无量纲的形式进行。可以预料，以往的研究中由于不自洽的量纲关系所造成的一些困扰，在利用新的量子态空间表述形式将这一不自洽消除后，也将迎刃而解。

参考文献

[1] Dirac P A M. The Principles of Quantum Mechanics, Fourth Edition. Oxford University Press, 1967
[2] Schrödinger E. Ann. Phys., 1926, 79: 361; 1926, 79: 489; 1926, 80: 437; 1926, 81: 109
[3] 汪克林，曹则贤. 物理，2022，51(9)：645
[4] Gieres F. Reports on Progress in Physics, 2000, 63(12): 1893
[5] Semay C, Willemyns C. Do Bras and Kets have Dimensions? 2020, arXiv: 2008.03187v1
[6] Griffiths D J, Schroeter D F. Introduction to Quantum Mechanics. Cambridge University Press, 2018
[7] Heisenberg W. Zeitschrift für Physik, 1927, 43: 172
[8] Dirac P A M. Proc. Roy. Soc. London, Series A, 1927, 114(767): 243
[9] Avery J. Creation and Annihilation Operators. McGraw-Hill, 1976
[10] 汪克林，高先龙，曹则贤. 物理，2021，50(3)：177

更低的抖动，更多的通道，更快的边缘

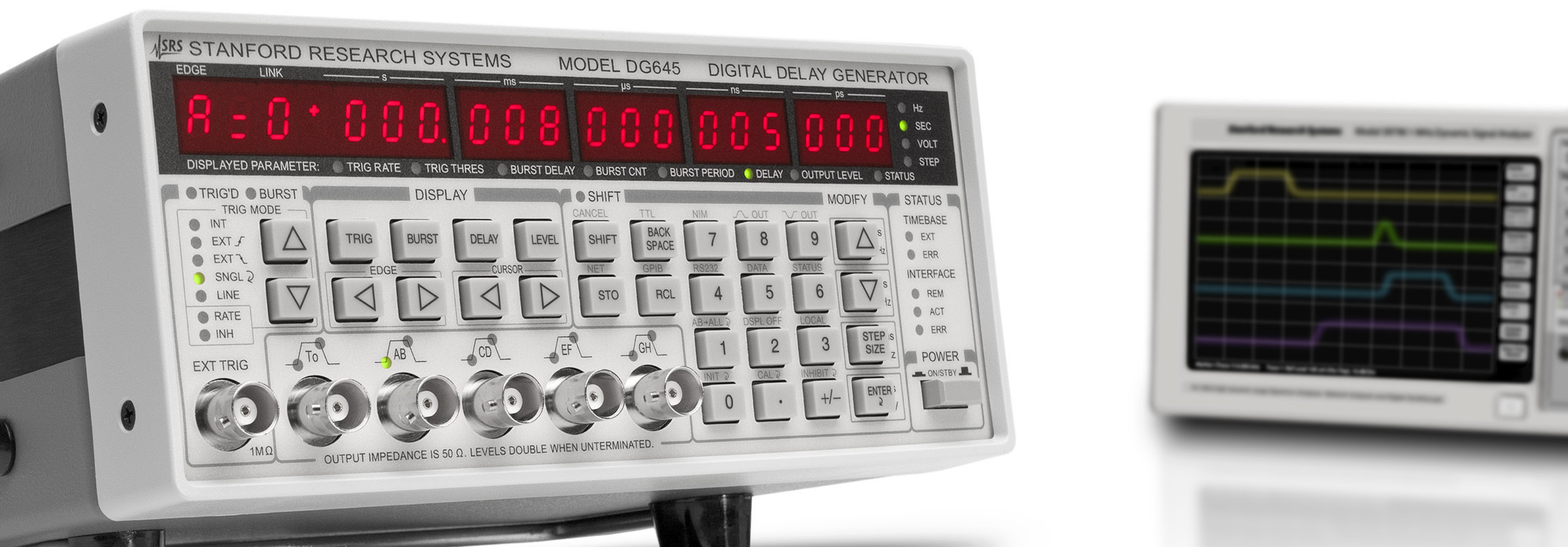
DG645 延时发生器...SRS独家提供

- 多达8个输出通道
- 延迟和脉宽控制
- <25ps抖动
- 1ns上升/下降时间
- 触发频率达10MHz
- 精密触发速率发生器
- 外部触发的突发模式
- GPIB, RS-232和以太网接口

DG645产生四个独立的脉冲输出—每个具自控延迟，脉冲宽度，振幅，及BNC输出通道。外部触发与任何输出之间抖动小于25 ps, 通道间抖动小于15 ps。其内置触发速率发生器提供小于100 ps 的时钟抖动。

10 MHz参考输入/输出可让您与锁模激光器或其他时基同步，选件铷钟或晶体时基可进一步提高精确度降低抖动。

DG645亦可用选配件拓展至几种不同组合设置的八通道输出。



DG645 ...$5165 (全球通价格)

请扫描二维码了解更多详情

Stanford Research Systems
1290-D Reamwood Ave. Sunnyvale, CA 94089 · www.thinkSRS.com
Phone (408) 744-9040 · Fax (408) 744-9049 · info@thinkSRS.com

先锋科技股份有限公司
电话：86-10-6263-4840
传真：86-10-8261-8238
Email: sales@teo.com.cn

欧陆科技有限公司
电话：86-10-6800-8213/16/17
传真：86-10-6800-8212
Email: euro-tech.bj@euro-tech.com

北京东方科泰科技发展有限公司
电话：86-10-6497-1708
传真：86-10-6497-1710
Email: sales@bost-ltd.com