量子力学表示理论的一种实现

汪克林[1]　曹则贤[2,†]

（1　中国科学技术大学近代物理系　合肥　230026）

（2　中国科学院物理研究所　北京　100190）

A realization of representation theory

WANG Ke-Lin[1]　CAO Ze-Xian[2,†]

(1　Department of Modern Physics，University of Science and Technology of China，Hefei 230026，China)

(2　Institute of Physics，Chinese Academy of Sciences，Beijing 100190，China)

2024－02－17收到

† email：zxcao@iphy.ac.cn

DOI：10.7693/wl20240305

摘　要　量子力学创立伊始，狄拉克就关注到了一般表示的问题，其后量子力学的发展又引入了福克态、相干态等表示。好的表示应能提供正交归一的完备基，同时又能给出问题的严格解析解或者允许方便地得到近似解，但这常常是做不到的。我们意识到此前得到的相干态正交化方法恰恰满足表示理论的一般性要求，且因为包含自由参数为构造归一化的完备正交基实际上提供了无限的选择，这样甚至在解决问题的过程中都可以灵活地选择不同的表示，从而带来计算量的大幅减小。通过对不同耦合强度下的近共振态Rabi模型最初10个能级的计算，并同关联的JC模型的结果相比较，验证了相干态正交化方法的有效性。

关键词　表示理论，归一化完备正交基，相干态，相干态正交化，Rabi模型

Abstract　Just when quantum mechanics was created, Dirac discussed the representation theory for it, and later it evidenced the introduction of representations based on Fock states, coherent states, etc. A good representation should provide a complete set of orthonormal basis functions, which allows for an analytical solution of the problem, or the easy attainment of numerical approximation, but it is, however, usually unrealizable. The normalized coherent states we achieved before meet the requirements upon a good representation, in fact, they even provide infinite possibilities for setting up a complete set of orthonormal basis functions since it contains free parameters, thus allowing for choosing alternative representations in due course of attacking a problem, which in turn significantly reduces the computational demands. The first ten energy levels for the Rabi model in the near resonance configuration, with different coupling strengths, were calculated and brought into comparison with that for JC model, the results, as anticipated, confirmed the effectiveness of our method.

Keywords　representation theory，complete set of orthonormal basis functions，coherent state，orthogonalization of coherent state，Rabi model

1 导言

量子力学创立伊始，狄拉克就关注到了表示问题在量子力学中的重要性。在其1930年出版的《量子力学基本原理》一书[1]的第三章中，狄拉克就表示的一般性条件作了系统的讨论。给定一个可交换观测量的完备集，可以构建起一个正交表示，其基矢量是这个可交换观测量完备集的共同本征矢量(simultaneous eigenvectors)。这个正交表示基矢量的一个方便标记可以是可观测量完备集的本征值。更进一步地，我们还要求基矢量是可归一的，而这并不总是可行的。表示的一个宗旨是为了让问题尽可能显得简单，最好是能获得严格的解析解。在量子力学此后的发展过程中，福克(Fock)于1932年引入了福克表示[2]，克劳德于1960年引入了相干态表示[3]，都有力地提升了量子力学表达问题与求解问题的能力。顺带说明一下，为了和数学上的群表示等概念一致，同时也是为了方便看清楚它们之间的关联，本文中我们将使用“表示理论”一词来指称representation theory而非如一些中文文献那样使用“表象理论”一词。有必要指出，狄拉克的representation theory中的representation可以是偏抽象意义的，而提及一个状态矢量的具体表示，即状态矢量相对于一组基的坐标时，狄拉克用的是representative一词。关于这一点，提请读者朋友在阅读文献时注意区别。

在《无量纲量子力学态矢表示》一文中[4]，我们阐述了量子理论中要使得各个基本原理相互间能自洽，则量子力学状态矢量必须是无量纲的。一来作为函数的对应物，这应该是状态矢量作为一个数学对象的应有之义；二来这也是物理角度对状态矢量的要求——状态矢量表征的是独立于观测之外的物理存在的状态。物理量，或者严格地说可观测量，有量纲的问题，其反映了物理量之间的一些内禀关系，但是对物理量所存在的状态的抽象描述，自然应该是无量纲的。狄拉克书中给出的坐标表示$\{|x\rangle\}$和动量表示$\{|p_x\rangle\}$这两个具体表示就不满足无量纲的要求[1]，狄拉克未深究这个问题，所幸近年来又引起了关注[5, 6]。在文献[4]中，我们构建了与狄拉克的表示$\{|x\rangle\}$和$\{|p_x\rangle\}$相对应的无量纲态矢集$\{|q\rangle\}$和$\{|p\rangle\}$，但是也注意到了$\{|q\rangle\}$表示和$\{|p\rangle\}$表示依然是不能归一的。不能归一的表示会带来诸多问题，我们倾向于认为其是不能提供状态空间的基矢集的。

不妨换个思路考虑这个问题。狄拉克提出的表示理论具有普遍意义，构造表示是量子力学必要的课题之一，这一点参照群表示论研究的意义就很好理解了。表示不必然是唯一的，针对不同的物理系统或者物理性质的研究，甚至是在一个问题表述之不同阶段，可能都允许表示的灵活选择，这也恰是福克引入量子化波函数的工作所体现的精神[2]。自然地，我们面临如下的问题：除了人们熟知的这个Fock态矢集$\{|n\rangle\}$之外，还有没有其他的可表示状态空间的基矢集，即是否存在其他的具体表示？如果有，这些表示(可以)有正交归一的完备基矢集吗？针对上述问题，本文将给出一个正面的回答。

2 相干态正交化

我们构造表示的努力源起量子理论中的另一个重要话题。量子理论中的一个重要基本问题是系统的演化问题，为此要求解系统的动力学方程。然而，人们注意到除了少数几个特例，这包括无限深方势阱、谐振子、球对称势以及JC (Jaynes—Cummings)模型[7, 8]，几乎没有严格解析可解的其他情形。故此，作为量子力学发展基础的对量子原理的扰动处理，当然这本是经典力学方法的恰当运用，有了针对量子力学独有的新进展。微扰论适用于弱耦合情形，在量子理论发展初期被成功地用于处理一些弱耦合的问题，比如弱外场下的跃迁问题。当前的实验技术实现了大量的强耦合系统，则如何求解强耦合系统的量子力学问题便成了急迫的课题。针对弱耦合情形而来的微扰论无法胜任，人们迫切期待发展出能够用于强耦合系统的计算方法，即非微扰理论。在众多的试

图求解强耦合体系问题的非微扰研究中，本文将表述其中的一种理论，其与我们要回答的关于表示理论的问题密切相关。

在囚禁粒子的装置中，被囚禁粒子与空腔中的光场相互作用，这带来了所谓的腔量子电动力学此一热门领域。如果粒子与腔场之间的作用足够弱，则在近共振的情形下，一个被囚禁二能级粒子与单模腔场相互作用的系统在旋波近似的前提下可以用JC模型描述，其哈密顿量为

$$H=\frac{\varDelta}{2}\sigma_z+\lambda(a\sigma_++a^+\sigma_-)+\omega a^+a\ ,\tag{1}$$

其中σ_z是泡利矩阵的z分量，σ_+，σ_-是二能态的升降算符，$\varDelta$是二能态的能量之差，ω是场的角频率(模型已约定$\hbar=1$)，λ是耦合常量。有意义的是，JC模型是量子理论后来发现的唯一严格可解问题。此模型严格可解的物理原由是其能量本征态被限制在状态空间的一个小的子空间里了。若令系统的定态解取如下形式：

$$|\ \ \rangle=|e\rangle\left|\varPhi_1\right\rangle+\left|g\right\rangle\left|\varPhi_2\right\rangle\ ,\tag{2}$$

其中$|e\rangle$，$\left|g\right\rangle$分别表示被囚禁粒子的上、下态，$\left|\varPhi_1\right\rangle$，$\left|\varPhi_2\right\rangle$是相应的腔场态矢部分。基于系统的定态会局限于状态空间的一个子空间中的考虑，可假定$\left|\varPhi_1\right\rangle$，$\left|\varPhi_2\right\rangle$取如下的形式：

$$\begin{aligned}\left|\varPhi_1{}^{(n)}\right\rangle&=C_n|n\rangle\ ,\\ \left|\varPhi_2{}^{(n)}\right\rangle&=D_n|n+1\rangle\ .\end{aligned}\tag{3}$$

将式(2)和(3)代入定态方程：

$$H|\ \ \rangle=\varepsilon|\ \ \rangle\ ,\tag{4}$$

立即可得：

$$E_n^{(\pm)}=\frac{1}{2}\left[(2n+1)\omega\pm\sqrt{(\Delta-\omega)^2+4\lambda^2(n+1)}\right]\ ,\tag{5}$$

以及：

$$\begin{aligned}\frac{C_n^{(+)}}{D_n^{(+)}}&=\frac{\lambda\sqrt{n+1}}{E_n^{(+)}-n\omega-\dfrac{\varDelta}{2}}\ ,\\ \frac{C_n^{(-)}}{D_n^{(-)}}&=\frac{\lambda\sqrt{n+1}}{E_n^{(-)}-n\omega-\dfrac{\varDelta}{2}}\ .\end{aligned}\tag{6}$$

这样的结果是严格的，同时说明(3)式的预设是正确的。

但是，如果被囚禁的二态粒子同腔场间的耦合不是那么弱，则在耦合较强时非旋波项不再可以忽略，这时二态粒子—腔场耦合系统应由Rabi模型表述，相应的哈密顿量为

$$H=\frac{\varDelta}{2}\sigma_z+\lambda(a+a^+)(\sigma_++\sigma_-)+\omega a^+a\ .\tag{7}$$

将式(7)与式(1)作比较，可以看到式(7)中多了$a^+\sigma_+$和$a\sigma_-$两项。这两项的出现，使得一个确定的定态不再保持在上态只含$|n\rangle$、下态只含$|n+1\rangle$这样的子空间中了。如此，严格求解就成了一个难题。求解Rabi模型因其重要性在过去二、三十年间受到了众多研究者的关注。

在已发表的许多研究工作中，有这样的一种求解方法与此处讨论的问题有关，可用来解Rabi模型以及其他的具有较强耦合的问题。2006年，汪克林与合作者第一次提出相干态正交化方法，给出了Holstein模型的精确解[9]。紧接着在2007年，Irish也提出类似的方法，将旋波解推广到了强耦合的情形[10]。该方法大致思路如下。注意到从JC模型过渡到Rabi模型时增加了非旋波项，这打破了腔场的状态矢量仅局限于一个只涉及$|n\rangle$及$|n+1\rangle$的小的子空间的限制。如果将腔场态再用Fock态矢集$\{|n\rangle\}$展开的话，则一定需要纳入许多的$|n\rangle$。即使在近似的情形下，在某个大数N对应的基矢量$|N\rangle$处作截断，所要求的截断N值也会很大，甚至使得数值计算不再具有可行性。由此，我们想到如果不将腔场用Fock态展开，而是改用相干态展开，就会破解这一困难。给定一个相干态：

$$\left|\alpha+\mathrm{i}\beta\right\rangle=\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha+\mathrm{i}\beta)a^+\right]|0\rangle\ ,\tag{8}$$

进一步地可表示为

$$\begin{aligned}\left|\alpha+\mathrm{i}\beta\right\rangle&=\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right]\cdot\sum_m\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^m}{m!}(a^+)^m|0\rangle\\ &=\exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right]\cdot\sum_m\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle\ .\end{aligned}\tag{9}$$

从上式可以看出，一个相干态包含了Fock态矢集$\{|n\rangle\}$。不过，这里Fock态矢量的权重是确定的，

单独一个相干态不可能构成解，必须用系列的相干态的叠加。一种可能性是取如下的展开形式：

$$|\ \rangle = \iint F(\alpha,\beta)\,|\alpha + \mathrm{i}\beta\rangle \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \ , \tag{10}$$

或者

$$|\ \rangle = \sum_n f_n\,(a^+)^n|\alpha + \mathrm{i}\beta\rangle\ . \tag{11}$$

这两种展开虽然都凭借有限项就包含所有可能的Fock态，但存在不同的$\{|\alpha + \mathrm{i}\beta\rangle\}$或不同的$(a^+)^{n_1}|\alpha + \mathrm{i}\beta\rangle$以及$(a^+)^{n_2}|\alpha + \mathrm{i}\beta\rangle$之间无正交性的问题，需要寻求具有正交性的相干态矢集，于是自然产生了实现相干态正交化的想法。为简单起见，我们用仅有一个参数α的相干态为例来说明如何做到这一点。取

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} + \alpha a^+\right)|0\rangle\ , \tag{12}$$

引入新的算符：

$$\begin{aligned} A &= a - \alpha\ , \\ A^+ &= a^+ - \alpha\ , \end{aligned} \tag{13}$$

如同a，a^+，算符A，A^+满足如下的对易关系：

$$\begin{aligned} [A, A] &= [A^+, A^+] = 0\ , \\ [A, A^+] &= 1\ . \end{aligned} \tag{14}$$

因为

$$A|\alpha\rangle = (a - \alpha)|\alpha\rangle = (\alpha - \alpha)|\alpha\rangle = 0\ , \tag{15}$$

故可将$|\alpha\rangle$记为$|0\rangle_\alpha = |\alpha\rangle$，则可将式(15)改写为

$$A|0\rangle_\alpha = 0\ , \tag{16}$$

$|0\rangle_\alpha$是新算符A的“真空态”。

定义新的数算符：

$$\hat{n}_\alpha = A^+ A\ , \tag{17}$$

以及新的态矢集$\{|n\rangle_\alpha\}$，$|n\rangle_\alpha$是算符$\hat{n}_\alpha$的本征态，

$$\hat{n}_\alpha|n\rangle_\alpha = n|n\rangle_\alpha\ , \tag{18}$$

则有：

$$|n\rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(A^+)^n|0\rangle_\alpha\ , \tag{19}$$

满足：

$${}_\alpha\langle n_1|n_2\rangle_\alpha = \delta_{n_1,\,n_2}\ . \tag{20}$$

如此则实现了正交归一的相干态。在得到正交化相干态的态矢集$\{|n\rangle_\alpha\}$后的若干年中，作者之一(汪)与合作者将之用于求解Rabi模型、Dick模型等，都获得了令人满意的结果[7, 8]。

3　正交化相干态作为表示

有了以上的铺垫后，再回过头来讨论我们要考虑的表示问题。当把上述的求解量子力学动力学的相干态正交方法同当年狄拉克所阐述的一般表示理论相联系时，才发现我们得到的态矢集$\{|n\rangle_\alpha\}$其实是满足狄拉克表示理论的一种具有普适用途的表示。

由任意$|\alpha + \mathrm{i}\beta\rangle$表示的相干态所构造的一组态矢集$\{|n\rangle_{\alpha+\mathrm{i}\beta}\}$不是原来的Fock态矢集$\{|n\rangle\}$。实际上，每一个态矢集$\{|n\rangle_{\alpha+\mathrm{i}\beta}\}$都是一个正交归一的完备集，它们还是无量纲的，故都可作为量子表示的一组基矢集，即提供一种表示。参数(α,β)的取值不同就带来一个不同的表示，有无限多的选择。

至此，我们实现了一种满足狄拉克表示理论期待的具体表示，而且藉此还可以理解为什么相干态正交化方法对于求解强耦合问题是可行的。我们将看到，正交化相干态表示满足表示理论的思想初衷，即针对不同问题，甚至是针对同一问题的不同求解阶段，选择合适的表示会使求解更加简单可行。

3.1　求解Rabi模型

相干态正交化得到的正交归一且无量纲的完备矢量集可作为表示理论的一个实现，接下来我们以求解Rabi模型为例展示这样的表示理论应用于量子力学基本动力学问题的能力。选择Rabi模型出于如下考虑：一是因为Rabi模型是非常重要的物理模型，它比较简单但其近似计算仍然需要巨大的计算量，将相干态正交化方法用于其上会有明显可见的效力；其二，比较重要的一点是，它有一个与它密切有关的严格可解的JC模型作为比照背景，可用于检验计算结果的可靠性。

Rabi模型的哈密顿量见式(7)，过去已有许多研究，我们现在采用相干态正交化得来的状态矢

量集进行研究。在研究过程中我们注意到，过去的未经挑剔的普遍做法是，选定了一个特定的表示，便会将这个状态空间连同基矢集固定下来，始终在一个固定的表示的基础上去面对问题，比如求解系统的所有定态，即能量算符的本征态。现在当我们明白相干态正交化提供了好的表示时，则在求解系统的不同定态时可以灵活地取不同的表示来计算。如果在计算中可以针对基矢量的完备集求和，自然根据表示理论用任何表示都会得到同样的结果；但是，在近似计算中必须作恰当的截断。显然，若对不同的对象选取不同的表示(状态空间及基矢量完备集)却都能实现在相对较小的截断下获得同样的精度，那无疑是极有价值的。

将相干态正交化方法用于求解Rabi系统的定态问题，过程、过程的优化以及结果讨论简单叙述如下。为简单起见，采用式(13)—(20)中的含一个参量$|\alpha\rangle$的相干态而非一般的$|\alpha+i\beta\rangle$相干态表示。将式(7)中的哈密顿量H改为用$A(\alpha)$，$A^+(\alpha)$表示：

$$H=\frac{\Delta}{2}\sigma_z+\omega(A^+A-\alpha A-\alpha A^++\alpha^2)+\lambda(A+A^+-2\alpha)\sigma_x \ . \tag{21}$$

系统的定态矢量可相应地表示为

$$|\ \rangle=|e\rangle\sum_m\psi_{1m}|m\rangle_\alpha+|g\rangle\sum_m\psi_{2m}|m\rangle_\alpha \ , \tag{22}$$

将式(21)—(22)代入定态方程：

$$H|\ \rangle=E|\ \rangle \ , \tag{23}$$

经过推演，得到两态对应的联立方程组：

$$\frac{\Delta}{2}\sum_m\psi_{1m}|m\rangle_\alpha+\omega\sum_m m\psi_{1m}|m\rangle_\alpha-\omega\alpha\sum_m\sqrt{m}\,\psi_{1m}|m-1\rangle_\alpha-\omega\alpha\sum_m\sqrt{m+1}\,\psi_{1m}|m+1\rangle_\alpha+\omega\alpha^2\sum_m\psi_{1m}|m\rangle_\alpha+$$
$$\lambda\sum_m\psi_{2m}\sqrt{m}\,|m-1\rangle_\alpha+\lambda\sum_m\sqrt{m+1}\,\psi_{2m}|m+1\rangle_\alpha-2\lambda\alpha\sum_m\psi_{2m}|m-1\rangle_\alpha=E\sum_m\psi_{1m}|m\rangle_\alpha \ , \tag{24}$$

$$-\frac{\Delta}{2}\sum_m\psi_{2m}|m\rangle_\alpha+\omega\sum_m m\psi_{2m}|m\rangle_\alpha-\omega\alpha\sum_m\sqrt{m}\,\psi_{2m}|m-1\rangle_\alpha-\omega\alpha\sum_m\sqrt{m+1}\,\psi_{2m}|m+1\rangle_\alpha+\omega\alpha^2\sum_m\psi_{2m}|m\rangle_\alpha+$$
$$\lambda\sum_m\psi_{1m}\sqrt{m}\,|m-1\rangle_\alpha+\lambda\sum_m\sqrt{m+1}\,\psi_{1m}|m+1\rangle_\alpha-2\lambda\alpha\sum_m\psi_{1m}|m\rangle_\alpha=E\sum_m\psi_{2m}|m\rangle_\alpha \ , \tag{25}$$

利用$\{|m\rangle_\alpha\}$的正交归一性，可得方程：

$$(\frac{\Delta}{2}+m\omega+\omega\alpha^2)\psi_{1m}-\omega\alpha\sqrt{m+1}\,\psi_{1m+1}-\omega\alpha\sqrt{m}\,\psi_{1m-1}+\lambda\sqrt{m+1}\,\psi_{2m+1}+\lambda\sqrt{m}\,\psi_{2m-1}-2\lambda\alpha\psi_{2m+1}=E\psi_{1m} \ , \tag{26}$$

$$(-\frac{\Delta}{2}+m\omega+\omega\alpha^2)\psi_{2m}-\omega\alpha\sqrt{m+1}\,\psi_{2m+1}-\omega\alpha\sqrt{m}\,\psi_{2m-1}+\lambda\sqrt{m+1}\,\psi_{1m+1}+\lambda\sqrt{m}\,\psi_{1m-1}-2\lambda\alpha\psi_{1m}=E\psi_{2m} \ . \tag{27}$$

基于此，可以通过数值计算求得能量本征值。

3.2 计算结果与分析

将式(21)中哈密顿量的参数Δ选为能量单位，参数ω，λ依此能量单位设定。为了让计算结果能更清楚地显示表示理论的意义，我们为Rabi模型选择了两种近共振的参量，分别为$\Delta=1$，$\omega=0.9$和$\Delta=1$，$\omega=1.1$。为了检验耦合从弱到强的情况，将耦合强度取为λ=0.001，0.005，0.01，0.05，0.1，0.5。针对每一组参数(Δ，ω，λ)对应的情形，我们计算了定态的能量本征值。在设定的截断条件下针对特定的表示所用到的参数α值会粗略地在$\alpha\in(0,10]$间扫描以计算出最初的10个能级。针对求解每一组参数对应情形的最初10个能级之过程与结果展开讨论，对应的JC模型已确立了的最初10个能级值同时列出供比较(表1)。

我们注意到，在同样的截断下，针对每一个能级，所得的能量值都随表示式(12)中的参数α而改变，但能级都会有一个最小值。表1显示的是针对系统参数值为$\Delta=1$，$\omega=0.9$，$\lambda=0.001$时，即弱耦合情形，在一定截断下计算得到的最

表1　针对参数为$\Delta = 1$，$\omega = 0.9$，$\lambda = 0.001$时的计算结果

JC模型值	1.3	1.4	2.2	2.3	3.1	3.2	4	4.1	4.8999	5.0001
能级的计算最小值	1.2809	1.4007	2.1802	2.301	3.0795	3.2018	3.9789	4.1022	4.8782	5.0025
对应的α值	10	4	10	4	10	4	10	5	10	5
绝对值误差	0.014668	0.0005018	0.0089757	0.0004314	0.0065865	0.00055372	0.0052709	0.00052706	0.0044372	0.00048082

表2　针对模型参数为$\Delta = 1$，$\omega = 0.9$，$\lambda = 0.5$时的计算结果

JC模型值	0.64113	2.0589	1.3825	3.1175	2.1488	4.1512	2.9308	5.1692	3.7242	6.1758
能级的计算最小值	0.078149	0.88004	1.5998	2.1601	2.3414	4.3421	4.8835	5.5415	5.6344	7.8553
对应的α值	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4
绝对值误差	0.87811	0.57256	0.15712	0.3071	0.089677	0.045971	0.66625	0.072034	0.51291	0.27196

初10个能级的最小值，以及算得最小值时为表示所选择的α值。对应这最初的10个能级，算得最低值时的表示参数α分别为α=10, 4, 10, 4, 10, 4, 10, 5, 10, 5。因为是弱扰动的情形，计算得到的结果同JC模型的值偏离不远，这可看作是对我们方法的肯定。若仅进一步增加截断值，则这10个最初能级的最小值仅有可忽略的精度改进。但是，若针对指定的能级固定截断值而选择其他的表示参数α值进行计算，则会造成自最小值的明显可见的偏差。换句话说，在设定不是足够大的截断的前提下，如果只用一个确定的α值进行计算，则只能算出一个或几个满足精度要求的能级值而不是全部。如果要求所有能级值都满足较高的精度要求，唯一的出路是加大截断值。但是，对于Rabi模型之类的问题，由此带来的计算量的增加是不可承受的。这里，在表示理论思想的指引下，我们认识到可以不用为问题固定一个具体的表示，尽管表示是合理的，而是针对一个确定系统的单个能级都可以灵活地选择合适的表示。这个认识上的突破会带来计算量的大幅减小，让许多本来原则上不大可能计算的问题有望得到解决。

针对大耦合参数λ的情形，利用相干态正交化方法也容易计算，例见表2，此处不作深入讨论。随着耦合参数λ的加大，Rabi模型的最初10个能级与JC模型值的偏差变大，这也是应有之义。值得注意的是，在计算的所有情形中，即针对Δ=1；ω=0.9，1.1；λ=0.001，0.005，0.01，0.05，0.1，0.5的所有不同组合，基态能级的Rabi模型值同JC模型值之差总比其他能级来得更大一些，初看起来这似乎有点无法理解。其实，这一现象更加肯定我们计算的可靠性。造成这一现象的原因来自JC模型与Rabi模型的差别除了在于有无非旋波项外，实际上还有另外一个实质的不同，那就是JC模型中的$|g\rangle|0\rangle$项，即粒子处于下能态、腔场为真空的哑态，它在JC模型中不会参与相互作用但在Rabi模型中却因非旋波项的存在也参与了相互作用，而这个相互作用显然对最低能量态影响较大。

参考文献

[1] Dirac P A M. The Principles of Quantum Mechanics，1st Ed. Oxford：Clarendon Press，1930

[2] Fock V. Zeitschrift für Physik，1932，75：622

[3] Klauder J R. Annals of Physics，1960，11(2)：123

[4] 汪克林，高先龙，曹则贤. 物理，2023，52(9)：625

[5] Semay C，Willemyns C. Do Bras and Kets have Dimensions? 2020，arXiv：2008.03187v1

[6] Griffiths D J，Schroeter D F. Introduction to Quantum Mechanics. Cambridge：Cambridge University Press，2018

[7] Chen Q H，Zhang Y Y，Liu T *et al*. Phys. Rev. A，2008，78：051801

[8] Chen Q H，Wang C，He S *et al*. Phys. Rev. A，2012，86：023822

[9] Wang K L，Liu T，Feng M. Eur. Phys. J. B，2006，54：283

[10] Irish E K. Phys. Rev. Lett.，2007，99：173601