弦动的奥秘——音乐深处的灵魂

鲍海飞†

(中国科学院上海微系统与信息技术研究所　上海　200050)

2024－01－29收到

† email：baohf@mail.sim.ac.cn

DOI：10.7693/wl20240309

1　前言

音乐是什么？是吉他的细雨滴滴，还是钢琴的叮咚悠扬？是音符的穿透力？还是无尽的遐想和创造力？

乐器的使用约有五、六万年的历史。在石器时代，生活于欧洲的尼安德特人就使用骨笛和口哨。在中国发现了迄今为止最古老的可演奏的笛子，距今已有九千多年，而带指孔的笛子则表明，史前的“音乐人”对音程已经有了一定的概念[1]。

音乐与科学之间是一种怎样的联系呢？翻开科学史，我们豁然开悟，科学与音乐之间的距离是那样的近，是那样的相通，又是那样的趋于完美与和谐。音乐连接着科学，里面有物理、数学、材料学，还有机械学。材料、结构的规律的运动、随机的振动，这些都传递着物质之间的相互作用，传递着声音和信息，让人感悟着。

人们常说科学没有国界，细细思量，真正没有国界的只有音乐。在科学探索之路上，在物质的本体(如由某种元素、属性和特征构成)、形式(外在特征或表象)与抽象(如数学与物理模型)之间，乐器成为一种最为直接有效的探索工具，音乐便是连接人与自然最动人的桥梁，它连接了感性和理性，构建了已知和未知，又沟通了心理和物理。就如伽利略痴迷望远镜一样，望远镜成了仰望天空的重要工具，人们触手可及的美妙乐器，无疑提供了一种巧妙的科学实验认知工具。乐器里面包含着丰富的科学问题。研究乐器的发音规律，研究琴弦的声音与琴弦的长短关系，就能够揭示出了音乐的内涵和本质，进而探索出自然内在的规律，涉及物质、振动与波的相互作用关系，进而深入到几乎所有的科学理论体系之中，从而认识自然内在的性质和法则。从伽利略到毕达哥拉斯，从音律到波动方程，从音乐家到科学家，从简单的节拍到变换无穷的频率振动，从力学到频谱学，从古老的中国到遥远的西方，“弦”造就着传奇与科学，音乐吸引着那些痴迷科学的人们走向自然深处。是那些徜徉在艺术与科学之间的先驱，为我们缔造出自然的本源，他们智慧的结晶，一点一滴，在人类科学发现和历史的长河中闪耀。让我们从伽利略和弦动开始说起。

2　知音

没有阳光的世界，无疑是黑暗的；没有音乐的世界，无疑是寂寞的。

伽利雷·伽利略(1564—1642)出生在意大利的比萨城，1581年到比萨大学读书。1583年，他从悬挂摆动的吊灯中获得启示，用自己的脉搏进行计数，他发现无论摆幅多大，其周期几乎不变，这就是摆的运动规律。1590年，他写出了第一篇现代动力学的论文。1609年，他第一个将望远镜举起仰视天空。他被认为是现代科学之父，是现代科学的思想先驱者之一，在物理学、天文学、数学等领域均有杰出贡献。伽利略认为，没有绝对的运动和静止，物理定律都遵循相同的规律。他的工作为牛顿的运动定律以及爱因斯坦的相对论打下了基础。

伽利略的科学启蒙之路，无疑与音乐紧密相关。他的父亲是一位作曲家，擅长演奏鲁特琴(Lute)。这是一种曲颈拨弦乐器，是中世纪到巴洛克时期在欧洲使用的一类古乐器的总称，是文艺复兴时期最风靡的家庭独奏乐器。灵感乃是“得之于顷刻，积之于平日”。伽利略也是一位技艺高超的鲁特琴手，他经常和父亲一起调试琴弦来定音。逐渐地，在一次一次的调音定调的过程中，他认识到自然一定存在着某种内在的规律。弦过紧或过松，也就是弦上的应力过大或过小，都不能弹奏出和谐的乐曲，而只有恰到好处，才能发出和谐的乐音。或许，从“知音”开始，他对自然有了深刻的认识：自然是和谐、圆满的，自然的法则是数学的。伽利略有一句名言：大自然这本书是用数学书写的(The book of nature is written in the language of mathematics)[2]。这改变了曾经口头的、定性描述的哲学观。他认为，物理应该是基于数学的科学，同时，他在科学方法和实验建立的道路上起到了重要的作用。

3　僧敲月下门

人们究竟是怎样获得自然的奥秘的？音乐与数字又有什么关系？

人类很早就对振动产生了兴趣。最早的乐器可能是口哨或鼓。而弦乐器最早可能来源于猎人的弓，这与古埃及在战争中最喜欢用的器械有关。历史记载，最原始的弦乐器是一种叫“南迦(nanga)”的类似竖琴的三弦或四弦乐器，每个弦对应一个音。英国博物馆展示了一件公元前1500多年前的该类乐器，而早在公元前3000年，埃及古墓的墙壁上就发现了类似于竖琴的图画。现代的音乐体系来源于古希腊文明，毕达哥拉斯被认为是第一个采用科学的方法对音乐、声音进行研究的人。

传说，毕达哥拉斯(约公元前580年—公元前507年)是古希腊数学家和哲学家。史料记载，一天毕达哥拉斯经过一个铁匠铺时，里面传出了叮叮当当的声音，时而高，时而低，时而有韵律，时而又没有韵律。毕达哥拉斯仿佛在静夜中突然得到了灵感，于是匆匆走进铁匠铺一探究竟。有人推测，不同的音高来自于不同锤子的重量，而锤子的重量决定了声音不同。当时，有四把锤子，其重量分别为12，9，8和6磅。12:6恰好为2:1，是一个八度关系，12:9恰好为一个纯四度，12:8为纯五度，而9:8恰是全音。这四把锤子敲击发出的声音和谐悦耳。有人说，还有第五把锤子，但第五把锤子与其他锤子敲击发出的声音不和谐，听起来不悦耳，于是，毕达哥拉斯便把它抛弃了[3]。图1中右侧是弹奏中的毕达哥拉斯。

实际上，这些比例恰好是弦乐中弦长的比例，而非锤子的重量。有学者研究指出，毕达哥拉斯根本就不是用锤子来研究的，而是用弦来研究的。图2是文献中记载他研究一根单弦的弦音与弦长关系的方法图，从中确定一定张力下弦长与频率的关系[3, 4]。图2中的弦在重物作用下拉紧而保持恒定的张力，1和3支撑点不动，而2支撑点可以移动。他发现，同样张力作用下的弦，短弦发出高频的声音。当短弦的长度是长弦的一半时，其恰好为一个八度音程的关系。音高(pitch，本意是间隔)的概念就此建立起来。据此音程(scale)和音之间的间隔(interval)，可以初步构造出现代音乐体系的音程。图3是根据一定规律构造出的一种毕达哥拉斯音程，如果基频音的频率是1，那么依次是其间的频率比，2的位置恰好代表一个8度[5]。直到伽利略时期，人们才得以认识音高和频率的关系。

这无疑是历史上最早的、较为可靠的有关音乐、物理与数学的描述。亚里士多德(公元前384年—公元前322年)这样称赞他：毕达哥拉斯用数字构建了整个宇宙。

图1 图中右侧是弹奏中的毕达哥拉斯[3]

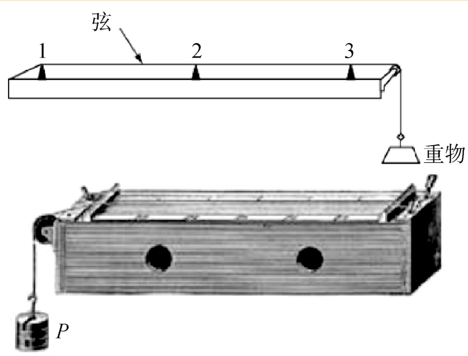

图2 单弦上音高与弦长的试验(上图来源于[4]，下图来源于[3])

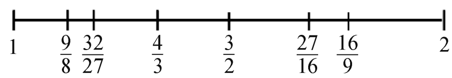

图3 根据一定规律构造出的一种毕达哥拉斯音程[5]

毕达哥拉斯一直关注着弦的谐音，后来许多学者也越来越关注该问题。表1是毕达哥拉斯C大调的音程体系，用表1中的一个分数乘以C基准频率便得到相应的频率。如以基频C为准，D大调的频率就是C的9/8倍。

毕达哥拉斯对谐音充满了兴趣，认为音与音之间是由一个定数联系在一起的，进而他认为宇宙也是和谐的，也是由一定的数和数学来构成的。因此，公元前6世纪，数学与音乐的关系建立起来。他还认为，音乐能够净化人的心灵，减轻人的紧张，进而能够改善人的健康。

不同时期、不同地区的人，即兴而歌，“打击乐”是最简单和直观

表1 毕达哥拉斯C大调的音程体系[3, 4]

C_i	D	E	F	G	A	B	C_f
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

的乐器了。笔者亦曾利用一种同轴的铝合金杆进行科学实验，如果用锤击其一端的话，不同长度的金属杆会发出不同频率的声音。即使是同一根金属杆，锤击时，如果用手指捏住金属杆上的不同位置，它也会发出不同频率的声音。

4 大珠小珠落玉盘

世界的本源是物质的，也是运动的。但究竟是什么样的运动和规律？从一个方面，“弦乐”告诉了我们答案。

物理学中，波的定义，一般指的是一个扰动在物质或者空间中能量的传递，几乎没有质量输运的过程。波包含着在某一相对固定区域物理介质或者场的振动，一般包括机械波和电磁波，声波就是一种机械波，而水波是一种复杂的机械波。

波有三个基本参数：频率(波长)、振幅和相位。对于声音来说，声波的频率决定了这个声音有多“高”，频率越大，听起来就越“高”；而振幅决定了它有多“响”；人耳对于声波的相位不敏感。人耳能听到的声波频率范围在20—20000 Hz之间。

音乐引领人们走进科学。无数的先人从音乐中为我们探索出音乐与科学之间的趣味、规律与奥秘，汇集成今天的科学。

波动方程的获得无疑与音乐分不开。达朗贝尔(1717—1783)是法国数学家、哲学家和音乐理论家[6]。达朗贝尔的代表性工作主要有波动方程以及虚功原理等，是牛顿力学的代表人物。他是将偏微分应用到物理研究上的先驱，曾经作为《大英百科全书》的数学和科学文章方面的编辑。

有史料记载，他虽然一出生就遭到遗弃，但幸运的是，他受到了较好的教育。他对音乐感兴趣，所以对弦的运动和规律也产生了兴趣，而这是因为他有个音乐理论家朋友——让·菲利普·拉默(Jean-Philippe Rameau，1683—1764)。拉默认为音乐是有关数学的科学，从中可以构建相关音乐的元素和规则。达朗贝尔写书倡导拉默的观点，并发展自己的思想和理论，写了一篇有关音乐和谐理论方面的文章。还有一个记载是达朗贝尔被邀请去审阅拉默的文章，他发现他们二人在有关弦方面的研究和认识上有许多相近的观点，于是他大加赞扬拉默。最重要的是，1746年，他利用牛顿—莱布尼茨的微积分首次给出了弦的微分波动方程以及由两个行波构成的解，他扩展了瑞士数学家约翰·伯努利(1667—1748)的振动研究。自然的奥妙在于其内在的不谋而合，正是因为他在艺术与科学上广泛的兴趣，导致了他深邃的洞察力。安竹·克鲁美(Andrew Crumey)评价说：“达朗贝尔一定是被拨弦古钢琴(harpsichord)所触动，或许整个宇宙都由遵守一个方程的振动的弦构成”。

物质之间是相互作用的，存在着因果关系；物质是运动的，更是振动的。

1673年，荷兰科学家惠更斯(1629—1695)第一个给出了理想摆的数学周期(T)公式，$T = 2\pi\sqrt{L/g}$，其中L是摆长，g是重力加速度。

1678年，文艺复兴时代英国物理学家罗伯特·虎克(1635—1703)研究了弦的长短与频率的关系，写下了外力(F)与弹性系数(k)、位移(y)的关系表达式：$F=ky$。

1687年，英国物理学家牛顿(1642—1727)写下了力(F)与加速度(a)和质量(m)的关系方程：$F=ma$。这成为经典力学研究物体运动的切入点。

瑞士的物理数学家、纯数学的奠基人欧拉(1707—1783，伯努利的学生)第一个写出了无阻尼下弹簧体系的质量(m)、弹性系数(k)、位移(y)和力(F)的受迫谐振方程[7]：$m\ddot{y} + ky = F\sin\omega t$。

1713年，英国数学家、音乐爱好者、泰勒级数的发明者布鲁克·泰勒(1685—1731)得到了振弦的解，给出了基频的振型和频率：$f_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$，其中$n$表示频率的阶数，$f_n$为弦的第$n$阶振动频率，$F$，$\rho$，$l$和$S$分别对应弦的张力、密度、长度和截面积。故而，弦若越细、轻、短，张力越大，发出声音则高，反之，则低。

1727年，瑞士数学约翰·伯努利发现了弦的振型，研究了重物作用下弦的张力，得到了系统的固有频率(ω)是其弹性(k)与质量(m)之比的平方根，得出：$\omega = \sqrt{k/m}$。

1746—1747年，达朗贝尔首先建立了弦运动的微分方程：

$$v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 .$$

并得到了一维波动方程的行波解：

$$y(x,t) = f(x - vt) + f(x + vt) ,$$

其中，$f(x \pm vt)$代表了沿着x轴以波速v正向和反向传播的波。对于弦来说，$v = \sqrt{T/\rho}$，T是弦的张力，ρ是密度，即弦中的声速等于弦的张力与弦单位质量密度之比的平

方根，$y(x,t)$代表弦偏离平衡位置的位移，它是琴弦上位置x和时间t的函数。上述波动微分方程可由牛顿力学推导出来。对于一根金属杆来说，$\upsilon=\sqrt{E/\rho}$，E是金属的杨氏模量。

同一时代，瑞士数学家欧拉和丹尼尔·伯努利(1700—1782，约翰·伯努利的儿子)等著名学者，都加入求解上述方程的行列之中，即拨动一根琴弦的解。1748年，欧拉提出了非连续导数的初值条件，从而得到了非光滑解。1753年，丹尼尔·伯努利利用动力学得到弦振动的解为一系列简单振动谐波的叠加，即为傅里叶级数解的表示[8]：

$$y(x,t)=\sum_k a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi\upsilon t}{L}\right),$$

即这个振动解包含了无限多个振动的三角函数波，但其初始条件是$y(x,0)=\sum_k a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ $(k=1,2\cdots)$。此处$y(x,t)$可以理解为在位置x处，时间为t时的位移，其中υ是弦中声速。遗憾的是，他没有给出如何求解系数a_k的方法，后来法国的傅里叶(1768—1830)在1807年研究固体中的热导问题时，给出了具体的系数求法。此后，傅里叶级数的收敛性被证明。不同频率的谐波在空气中传播的速度相同，所以听起来不会出现“走音”色散现象。1759年，法国数学家约翰·路易·拉格朗日(1736—1813)得到了振弦的解析解。至此，有关弦振动的问题从数学的角度得到了较为全面清晰地解析和认识。基于二人的工作，人们认识到任何函数都可以表示为无限多的正弦或余弦波的线性叠加。

大道殊途同归。初看起来，行波解与振动的三角函数解似乎无关，但进一步分解三角函数则得到二者是一致的：

$$\sin(x)\cos(\upsilon t)=\frac{1}{2}\left[\sin(x+\upsilon t)+\sin(x-\upsilon t)\right].$$

或表述为：

$$\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi\upsilon t}{L}\right)=\frac{1}{2}\times\left[\sin\frac{k\pi}{L}(x+\upsilon t)+\sin\frac{k\pi}{L}(x-\upsilon t)\right].$$

行波解的意义深远，它表明振动方程的解除了可以由三角函数或三角函数级数叠加构成之外，还有一种由单独一个函数或其线性叠加的函数构成。这种函数更具有几何性质，同时，它也与伽利略变换所体现出的物理思想在某种程度上有许多相关性。

至此，波的方程及其解给出了弦振动音乐的数学描述，三角函数级数解和行波解终于殊途同归，得到了学界广泛的认同，并在其他许多学科得到应用。科学就是这样点点滴滴汇聚而成，凝聚成了一条源远流长的河流。

所有的理论都离不开实验工作。早在1700年代，约瑟夫·索沃(Joseph Sauveur，1653—1716)经过试验就给出了对应谐波的弦振动的不同模态，但其本人当时并不知晓。他发现，高频振动的频率是基频振动频率的整数倍，将其称之为谐波；他还发现两个乐器之间的拍频现象；以及一根弦的振动可以同时包含几个谐波的振动等，这也是一根弦的振动依然悦耳的原因。他还命名了“声学(acoustic)”一词。实际上，假定一根单位长度的弦，其基频谐波就是$u=\sin(x)\cos(ct)$，二次谐波就是$u=\sin(2x)\cos(2ct)$，即一个八度音程，三次谐波就为$u=\sin(3x)\cos(3ct)$，即是一个纯5度，如图4所示[9]。一串音符，便是一个函数。一根弦的振动同时包含几个谐波的振动，这是波叠加原理的体现，丹尼尔·伯努利给出了其证明。值得指出的是，乐器中，比如吉他，在拨动琴弦时，在琴弦上将产生驻波，而这个驻波也可以用前述的两个行波解表示[10]。

有关弦的振动理论和其解析解的讨论与争论曾经在1760年到1780年之间非常激烈[11]。18世纪是微分方程理论和力学发展的活跃时期，法国是世界数学的中心，并保持了40多年之久，有人称之为“理性时代(Age of Reason)”。达朗贝尔、丹尼尔·伯努利、欧拉、拉格朗日等人得到了振动微分方程的三角函数级数解，但对其数学的收敛性和周期性一直存有疑问。而拉格朗日则倾向于泰勒级数解。傅里叶则对三角函数级数采用了空间与时间分离变量的方法解决了该问题，傅里叶在研究固体中的导热问题时，证明了任意函数都可以展开成无限多个三角函数级数叠加的正确性。傅里叶的热波方程的三角函数解理论曾经遭受批评达15年之久。他的文章投递给法国科学院，结果迟迟得不到承认和发表，后来他自己出版发行，最后终于被法国科学院承认并授予了桂冠。今天，傅里叶级数和变换方法成为许多学科的基本工

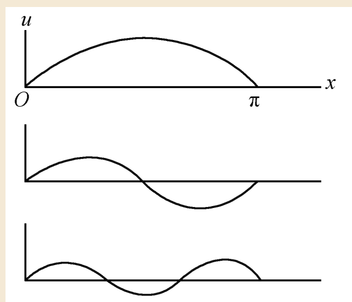

图4 一根弦的振动模态，从上到下依次为基频、二次谐波(八度)和三次谐波(纯五度)[9]

具。科学的建立、传播和发扬实在不易。

5 为我一挥手，如听万壑松

声声慢，时光穿梭，江山代有才人出。历史记载着音乐，音乐承载着数学。

2017年的《数学爱好者》刊文指出[12]，中国早在明代(1368—1644)就成功地用数学解决了音乐的平均律难题，而早在公元前2700年，中国人就一直醉心于“锣的音高(gong pitch)”。中国人关注于此，并不只是为了娱乐，而是关系到宫廷中祭祀的重要活动部分，音乐似乎涉及到了一个朝代的兴衰。明朝朱载堉(1516—1611)，出生于帝王之家，他在遭受家庭变故之后，便投身于学术研究，试图通过音乐来复兴家园。他是世界上第一个解决平均律的人，1584年，他给出了如何解决音乐平均律问题的答案。即在一组合谐的音程体系中，比如八度音程内，每一对相邻音符之间有着相同的频率比。

据史载，朱载堉用横跨81档的双排特大算盘，进行开方计算，求出了十二平均律的参数，数值精确到小数点后25位，使得每两个相邻的音之音振动频率的增幅或减幅相等，并据此制作出了弦准和律管。之后十二平均律被传教士随丝绸之路传到了西方，对世界音乐的发展产生了重要影响。

毕达哥拉斯音程体系由7个频率的音构成，加上最后一个高音就是一个八度音。还有一种是纯律(just intonation)，它是一种以自然五度和三度生成其他所有音程的音准体系和调音纯律体系。常规的8个音阶中，比如从中音的C到高音的C，B与C是半音，E与F是半音，而其他的音之间是全音。全音之间构成的音符，其间的频率间隔较大，在曲谱中会带来音的不连贯，这就是毕达哥拉斯音程体系在谱曲中存在的问题。这就需要在频率间隔大的两个音之间再增加“弦长”即“半音”来构成，如此就在一个八度内，分成了12个等频率间隔的音，这就构成了十二平均律，音符之间的变化就连贯了，再依次类推到不同的八度之间。比如，吉他是用“品”来间隔不同的音。简而言之，十二平均律中在原来7个音的基础上，又增加了5个音(E与F，B与C之间没有增加)。12个音的频率不是等分的，但相邻音之间的频率比是常数，其间的频率比为 $\sqrt[12]{2}=1.05946$。而这是由朱载堉首先得到的(实际上来自于：$r^{12}=2$)。平均律成功解决了音与音之间的连贯问题。因为这样一组音的频率比是相同的，即无论从哪个位置开始演奏旋律都是一样的。按照十二平均律来计算，在从C1到C2一个八度之间，G音与基音的频率比为 $\sqrt[12]{2^7}=1.498$，这非常接近毕达哥拉斯C大调音程体系中的G音频率比3/2，人耳难以分别如此小的频率差。钢琴、小提琴、小号都是根据十二平均律来定音的[13]。

一个简单的例子，在一个八度内包含12个半音，如从A_4(440 Hz)(而C_4是262 Hz)大调开始，音调频率依次为：$440\cdot2^0$，$440\cdot2^{1/12}$，$440\cdot2^{2/12}$，…，$440\cdot2^{12/12}=880$，对应于：A, A#, B, C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A2。一个A-C#-E和弦便是：$\sin(440\cdot2\pi t)+\sin(440\cdot2^{4/12}\cdot2\pi t)+\sin(440\cdot2^{7/12}\cdot2\pi t)$，图5分别是其时域和频域谱图。三和弦的时域图中有明显的幅度起伏，表明声音在婉转变化，听起来悦耳[14]。

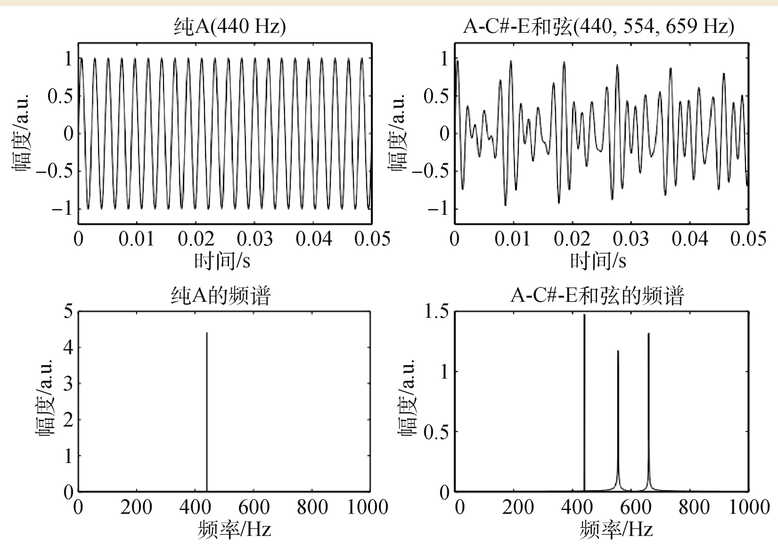

图5 纯音及其和弦的时域和频域谱图

18世纪是音乐的时代，是数学的时代。这一时期，欧洲出现了许多著名的音乐家，如巴赫、贝多芬和莫扎特等。同时微积分用于弦的振动分析。布鲁克·泰勒研究了弦的振动方程，得到了一个正弦解。达朗贝尔则得到了弦振动的时空微分方程。尔后，傅里叶在研究固体中热的传导过程中，发现可以用三角函数级数展开描写热的波方程解，而这又可以运用到一个弦的振动中。比如：

一个方波的傅里叶级数展开为：$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$，其中分母$L$可假定是弦长，其倒数则对应一个八度音程的基频$(1/L)$，而分子中的$n$代表了基频的倍数，相当于有$n$个频率的组合。从这里可以看到一组“和谐”的频率。简而言之，在音乐体系中，傅里叶级数展开表达式表明了有多少个频率的“波音”，可以构成这一组和谐的音，因此，它是一个谱系，而非几个三角函数。在数学上求傅里叶级数系数的时候，是用一个三角函数去与这个函数相互乘积作用，这相当于“试音”，其积分结果恰好反映存在什么样的“和谐”频率之间的关系程度，其系数的大小相当于该“波音”的权重，也反映了不同频率之间和谐的相关性程度。

计算机时代的到来，极大丰富了音乐的广度和深度。利用傅里叶频谱分析方式使音乐的“频率”越来越细致和丰富。最神奇的是，早在1970年代的巴黎，一些学者根据傅里叶变换，利用计算机构造出了许多神奇的音符，它包含了远远多于十二平均律所表示的音符，让人感受到从未有过的音乐感觉[12]。

《数学爱好者》一文中还介绍了加拿大达尔豪斯大学的一位数学家，利用计算机演奏了一段1964年英国披头士摇滚电影的经典同名电影歌曲《一夜狂欢》，开篇和弦之音充满了神秘色彩，许多人试图模仿，但都没有成功。原来他另觅它途，采用现代数学分析技术，利用计算机和傅里叶变换，使用频率竟然多达29000个，这远远超出了人们的想象[12]。魔幻音乐的背后是神秘的数学。这真是：“为我一挥手，如听万壑松。”

6 余音绕梁

据说爱因斯坦在6岁时就开始学小提琴，13岁对音乐产生了兴趣。他尤其喜欢莫扎特的音乐，非常钦佩巴赫和贝多芬的音乐。“对我来说，生活中没有音乐是不可想象的，在音乐中我经常做着白日梦，我按照音乐的方式看待我的生活，我从音乐中获得了快乐”。在柏林多年，他流连那里的科学与文化，他和伟大的奥地利小提琴家弗里茨·克莱斯勒以及哲学艺术钢琴大师阿图尔·施纳贝尔共饮，他还经常和量子之父马克思·普朗克一同演奏小提琴奏鸣曲。

爱因斯坦曾经说，令人不可思议的是世界是可以理解的(What is incomprehensible is that the world is understandable)。这个可以理解的就是，毕达哥拉斯“万物皆数”(all things are numbers)的思想，无论是大到天体的运行，还是小到原子之间的相互作用，从经典力学到量子力学，以至于其他学科，一切都蕴藏在神秘的数字中。那些先哲的洞察力和创造力让我们走出无知的泥潭，走向无际的天宇，让我们能够有勇气仰望星空，读懂大自然。

历史的长河，跨越千百年，古老的乐曲，“弦”一直在动。近百年，人们一直在探究宇宙的本源，大到星系，小到原子核中的粒子。人们发现，抛开点的模型，用一小段的弦来描述微粒之间的作用，更能够贴近物理真实。2017年，诺贝尔物理学奖颁发给了引力波的发现。这是宇宙深处传来的声音，那依然是弦在动，那是遥远的天体，它辐射出来的引力波传来的消息，那经久不息的脉动，余音绕梁。

从音乐到物理，从琴弦振动到波动方程，谁还能轻视这一根柔长纤细小小的琴弦！

参考文献

[1] Hall R W，Josic K. The Mathematical Association of America，2001，108(4)：1

[2] Lazarovici D. Why the Book of Nature is Written in the Language of Mathematics. http：//philsci-archive.pitt.edu/22343/1/Lazarovici%20-%20Book%20 of%20Nature.pdf

[3] Richards M，M Mus S.R.C. Pythagoras and Music. https：//ba278b9d8106536501a2-57da1f3fe93ccf3a9828e6ce67c3d52c.ssl.cf5.rackcdn.com/07_richards.pdf

[4] Galilei G. Fundamentals of Vibration，chapter 1. http：//www.unife.it/ing/lm.meccanica/insegnamenti/meccanica-dellevibrazioni/materiale-didattico/copy_of_a-a-2016-17-dispense-e-programma/03-rao_cap1-fund amentals-of-vibration.pdf

[5] Lapp D R. The Physics of Music and Musical Instruments. https：//docslib.org/doc/4670468/the-Physics-of-music-and-muical-instruments

[6] Oliveira A R E. Advances in Historical Studies，2017，6(4)：128

[7] Gautschi W. SIAM Review，2008，50(1)：3

[8] Jessop S. The Mathematics Enthusiast，2017，14，Nos1，2&3：77

[9] Hammond J K，Kelly S. Journal of Undergraduate Research XIV，2011：1

[10] Solving the Wave Equation by Fourier Method. https：//www.ndsu.edu/pubweb/~novozhil/Teaching/483%20Data/14.pdf

[11] Narasimhan T N. Proc. Indian Acad. Sci.，1999，108：117

[12] Jessop S. The Mathematics Enthusiast，2017，14，Nos1，2&3：77

[13] Fillion M. The History of Musical Tuning and Temperament during the Classical and Romantic Periods. https：//docslib. org/doc/5681532/the-history-of-musical-tuning-and-temperament-during-the-classical-and-romantic-periods

[14] Trigonometric Functions and Sound. http：//www-math.bgsu.edu/~zirbel/sound/Trigonometric%20functions%20and%20sound.pdf