

在核反应的粗糙结构理论中靶核 中的单个核子对平均场的影响*

任 庚 未

提 要

用使三体薛定格方程微分方程组化的方法,在力心近似下,研究了靶核中新增加的核子对原两体系统(入射核子与原靶核)的影响,所得结果与模型理论中所得的结果相比较,定性地说是一致的。

一、引 言

假设有一个由 $A + 1$ 个核子组成的系统,其中由 A 个核子组成靶核,另外一个核子是入射粒子,并设入射核子与靶核之间的相互作用可以很好地用光学位阱来描写。然后,假设另一个由 $A + 2$ 个核子组成的系统,在这个新的系统中靶核中的核子数是 $A + 1$ 。在本工作中,将研究这个在靶核中新增加的核子对原系统的影响。我们将这个新的系统看作一个由入射核子、在靶核中新增加的核子及原靶核组成的三体系统,并且把这个系统的波函数用内部态的完备系进行展开,将入射粒子的波函数进行分波展开,从而将体系的运动方程改写为微分方程组的形式。为了简单起见,作为零级近似,我们作了力心近似的假设。在工作过程中可以看出,即使在力心近似下,也只有对于某些特殊形式的势,用解析的方法获得严格结果的企图才成为可能。我们找到了这些势的形式,它们是高斯势和谐振子势。对其他形式的势,即使是用数值方法去解这个近似的薛定格方程也是相当困难的。在本工作中,对一个特殊情况进行了较仔细的研究,由所得的结果可以看出,这个新增加的核子将使原来的位阱的半径增大,位阱的深度有增加的趋势,而且这种影响与新增加的核子在靶核中所处的状态的性质关系不大。这个结果与模型理论中所得的结果是一致的。在用光学模型对实验资料的分析中业已得出下面的结论,即对不同核子数的靶核的实验结果可以用不同半径不同深度的势去解释,势中的参数随核子数增多而规律地改变,(半径增大,深度有增大的趋势)而与这些核子在靶核中到底处在什么状态关系不大。

在第二节中将给出系统的运动方程,以及它的微分方程组化。在第三节中将对靶核中新增加的核子对位阱的影响进行专门的讨论。在第四节中将给出一个简单的结论。

* 1972年5月22日收到。

二、三体系统的运动方程及其微分方程组化

i 三体系统的运动方程

在一个任意的笛卡尔坐标系中,三体系统的运动方程可以写为如下的形式:

$$H\Psi = E\Psi, \quad (1)$$

Ψ 为系统的波函数, E 为系统的总能量, H 为系统的哈密顿算符.

$$H = T + V, \quad (2)$$

T 为动能算符

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m_i}, \quad (3)$$

m_i 是第 i 个粒子的质量, \mathbf{P}_i 为第 i 个粒子的动量算符

$$\mathbf{P}_i = -i\hbar\nabla_{\mathbf{x}_i} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i}\right), \quad (4)$$

V 为位能算符

$$V = V_{31}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) + V_{21}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + V_{23}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3). \quad (5)$$

\mathbf{x}_i 为第 i 个粒子的坐标向量, V_{ij} 是第 i 个与第 j 个粒子的相互作用势. 在我们的标记中, 叫入射核子为第一号粒子, 靶核中新加入的核子为第二号粒子, 原来的靶核为第三号粒子. 这种标记可以用图 1 表示.

利用下面的变换 U 和它的逆变换 U^{-1} , 可以得到在相对坐标表示中的运动方程. 变换 U 及 U^{-1} 具有下面的形式:

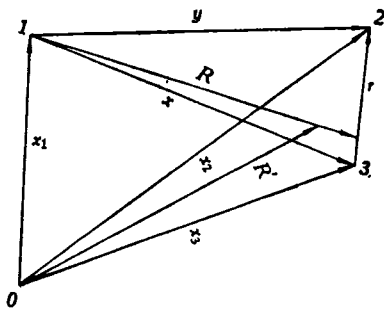


图 1 粒子在空间的位置的坐标表示

$$U = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{M} & \frac{m_2}{M} & \frac{m_3}{M} \\ -1 & \frac{m_2}{m_2 + m_3} & \frac{m_3}{m_2 + m_3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_2 + m_3}{M} & 0 \\ 1 & \frac{m_1}{M} & \frac{m_3}{m_2 + m_3} \\ 1 & \frac{m_1}{M} & -\frac{m_2}{m_2 + m_3} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

式中 $M = m_1 + m_2 + m_3$ 是系统的总质量. 变换后的三个独立向量 (见图 1), \mathbf{R}' 是系统重心的坐标向量, \mathbf{r} 是第三号粒子与第二号粒子的相对坐标向量, \mathbf{R} 是第一号粒子与第二、第三号粒子的重心的相对坐标向量. 在变换以后系统的哈密顿算符具有下面的形式:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}'}^2 - \frac{\hbar^2}{2M_{\mathbf{R}}} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2M_{\mathbf{r}}} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_{31}\left(\mathbf{R} - \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{r}\right) + V_{21}\left(\mathbf{R} + \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{r}\right) + V_{23}(\mathbf{r}). \quad (8)$$

M_R 和 M_r 是两个约化质量

$$M_R = \frac{m_1(m_2 + m_3)}{M}, \quad (9)$$

$$M_r = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}. \quad (10)$$

我们进一步令

$$\Psi(\mathbf{R}', \mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R}')\phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}), \quad (11)$$

并将(8)式和(11)式代入(1)式,则(1)式变成了两个方程,一为质心的自由运动方程,另一为三个粒子的相对运动方程.若取坐标原点于质心上,则系统的方程最后归结为:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M_R} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2M_r} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_{31}\left(\mathbf{R} - \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{r}\right) + V_{21}\left(\mathbf{R} + \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{r}\right) + V_{23}(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = E\phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}). \quad (12)$$

这个方程是不能严格地求解的,下面讨论一个解(12)式的近似方法.

ii 薛定格方程的微分方程组化

为了方便,引入以下的符号:

$$H = H_r + T_R + V_{\text{int}}, \quad (13)$$

$$\text{式中 } H_r = -\frac{\hbar^2}{2M_r} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V_{23}(\mathbf{r}), \quad (14)$$

$$T_R = -\frac{\hbar^2}{2M_R} \nabla_{\mathbf{R}}^2, \quad (15)$$

$$V_{\text{int}} = V_{31}\left(\mathbf{R} - \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{r}\right) + V_{21}\left(\mathbf{R} + \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{r}\right), \quad (16)$$

并设 $\phi_i(\mathbf{r})$ 是满足下列薛定格方程的一组正交归一的完备系,

$$H_r \phi_i(\mathbf{r}) = \varepsilon_i \phi_i(\mathbf{r}). \quad (17)$$

将系统的波函数用 $\phi_i(\mathbf{r})$ 进行展开^[1]:

$$\phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \sum_i \mathcal{U}_i(\mathbf{R}) \phi_i(\mathbf{r}). \quad (18)$$

代(18)式于(12)式中,在所得的方程两端同乘以 $\phi_m^*(\mathbf{r})$ 并对 $d\mathbf{r}$ 积分,在计算过程中同样用到(17)式,最后对不同的 m 获得下列方程组:

$$[T_R + \varepsilon_m - E + \langle m | V_{\text{int}} | m \rangle] \mathcal{U}_m(\mathbf{R}) = - \sum_{i \neq m} \langle m | V_{\text{int}} | i \rangle \mathcal{U}_i(\mathbf{R}), \quad (19)$$

$$\text{式中 } \langle m | V_{\text{int}} | i \rangle = \int \phi_m^*(\mathbf{r}) V_{\text{int}} \phi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (20)$$

应当注意 $\langle m | V_{\text{int}} | i \rangle$ 是 \mathbf{R} 的函数.

为了简单起见,我们将不考虑粒子们的内禀自旋,并对 $\mathcal{U}_i(\mathbf{R})$ 进行分波展开^[2]:

$$\mathcal{U}_i(\mathbf{R}) = \sum_{l_i^m=0} \sqrt{4\pi} \frac{j_{l_i^m}^{i\mu_2}(R)}{R} Y_{l_i^m}(\theta_R, \varphi_R). \quad (21)$$

$l_2 \mu_2$ 是第一号粒子的轨道角动量, 及其在 z 方向的投影, $Y_{l_2 \mu_2}(\theta_R, \varphi_R)$ 系球谐函数, 在(21)式中未对 μ_2 求和, 这是由于在某个人射状态的初始条件下, 在反应过程中总的磁量子数应守恒, 既然第二号粒子的组态业已固定, 则 μ_2 不能是任意的, 而只能是某个固定值. 把(21)式代入(19)式, 方程两端同乘 $Y_{l_2 \mu_2}^*(\theta_R, \varphi_R)$ 并对 $d\Omega_R$ 积分, 则得

$$\left[\frac{d^2}{dR^2} + k_m^2 - \frac{l_2(l_2+1)}{R^2} \right] f_m^{l_2 \mu_2}(R) = \sum_{l_1 \mu_1} \mathcal{Y}_{m, i}^{l_2 \mu_2, l_1 \mu_1}(R) f_i^{l_1 \mu_1}(R), \quad (22)$$

式中
$$k_m = \sqrt{\frac{2M_{\mathbf{R}}(E - \varepsilon_m)}{\hbar^2}}, \quad (23)$$

$$\mathcal{Y}_{m, i}^{l_2 \mu_2, l_1 \mu_1}(R) = \frac{2M_{\mathbf{R}}}{\hbar^2} \int Y_{l_2 \mu_2}^*(\theta_R, \varphi_R) \phi_m^*(\mathbf{r}) V_{\text{int}} Y_{l_1 \mu_1}(\theta_R, \varphi_R) \phi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\Omega_R. \quad (24)$$

由于波函数的有限性, 及 $\mathcal{Y}_{m, i}^{l_2 \mu_2, l_1 \mu_1}(R)$ 当 $R \rightarrow \infty$ 时趋近于零, 所以 $f_m^{l_2 \mu_2}(R)$ 应满足下列边界条件

$$f_m^{l_2 \mu_2}(0) = 0, \quad (25)$$

$$f_m^{l_2 \mu_2}(R)_{R \rightarrow \infty} = \frac{\sin\left(k_{m^0} R - \frac{\pi l_2^0}{2}\right)}{k_{m^0}} \delta_{m^0, l_2^0, m, l_2, \mu_2} + q_{m^0, m}^{l_2^0, l_2, \mu_2} e^{i(k_{m^0} R - \frac{\pi l_2^0}{2})}. \quad (26)$$

$m^0, l_2^0, \mu_2^0 = 0$ 是入射道的量子数, $q_{m^0, m}^{l_2^0, l_2, \mu_2}$ 是散射振幅.

这样, 在这一节中我们已将一个九维空间的薛定格方程改写为一维空间的联立方程组. 当入射粒子的能量低于靶核的第一激发态时, 由于能量守恒定律的原因, 只有弹性散射发生, 当能量高时非弹性散射也可发生. 显然可见, 用(22)式描写这一类反应是方便的.

虽然已将一个九维空间的问题化成一个一维空间的问题, 但是方程(22)在有很多反应道是开着的情况下, 仍是十分难解的. 除此之外, 另一个困难同样是十分严重的, 这点可由(24)式中看出, $\mathcal{Y}_{m, i}^{l_2 \mu_2, l_1 \mu_1}(R)$ 是一个五重积分, 若这个积分不能解析地积出来, 则对(22)式的具体计算, 就是利用电子计算机也是比较困难的.

三、力心近似

为了简单起见, 我们作力心近似的假设, 即假设在(22)式中只有势的对角项是重要的. 显然, 这个假设只有在入射粒子能量较低的情况下, 是严格正确的.

i 积分的计算

若设入射粒子束的方向为 z 轴, 第二号粒子的状态可以用量子数 $n l_1 \mu_1$ 表示, 则

$$\mathcal{Y}_{n l_1 \mu_1, n l_1 \mu_1}^{l_2^0, l_2^0}(R) = \sum_L C_{l_2^0, l_1 \mu_1}^{L \mu_1} \cdot \sum_{\lambda} F_{n l_1}^{\lambda}(R) \cdot h_{\lambda}(l_2 l_1 l_2 l_1 L)^{[3]}. \quad (27)$$

式中 $C_{l_2^0, l_1 \mu_1}^{L \mu_1}$ 为克莱必西-戈登系数.

$$h_{\lambda}(l_2 l_1 l_2 l_1 L) = (-1)^{-L} \frac{(2l_2+1)(2l_1+1)}{(2\lambda+1)} W(l_2 l_2 l_1 l_1; \lambda L) C_{l_1 0, l_1 0}^{l_2 0} C_{l_2 0, l_2 0}^{L 0}, \quad (28)$$

$$F_{n l_1}^{\lambda}(R) = \int |R_{n l_1}(r)|^2 J^{\lambda}(Rr) r^2 dr. \quad (29)$$

(28)式中的 $W(l_2 l_1 l_1 l_1; \lambda L)$ 是拉卡系数, (29)式中的 $R_{n l_1}(r)$ 是在靶核中的第二号粒子的波函数的径向部分.

$$J^\lambda(Rr) = \frac{2\lambda + 1}{2} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{2M_R}{\hbar^2} \right] \left[V_{31} \left(\sqrt{R^2 + \frac{m_2^2}{(m_2 + m_3)^2} r^2 - 2R \frac{m_2 r}{m_2 + m_3} \cos \omega_{Rr}} \right) \right. \\ \left. + V_{21} \left(\sqrt{R^2 + \frac{m_3^2}{(m_2 + m_3)^2} r^2 + 2R \frac{m_3 r}{m_2 + m_3} \cos \omega_{Rr}} \right) \right] P^\lambda(\cos \omega_{Rr}) \\ \times d \cos \omega_{Rr}. \quad (30)$$

式中 $P^\lambda(\cos \omega_{Rr})$ 是勒让德多项式, ω_{Rr} 是 \mathbf{R} 与 \mathbf{r} 之间的夹角. 我们令(见图 1)

$$x^2 = R^2 + \frac{m_2^2}{(m_2 + m_3)^2} r^2 - 2R \frac{m_2 r}{m_2 + m_3} \cos \omega_{Rr}, \quad (31)$$

$$y^2 = R^2 + \frac{m_3^2}{(m_2 + m_3)^2} r^2 - 2R \frac{m_3 r}{m_2 + m_3} \cos(\pi - \omega_{Rr}). \quad (32)$$

则(30)式变为

$$J^\lambda(Rr) = \frac{2\lambda + 1}{2} \left\{ \int_{x=|R-\frac{m_2 r}{m_2+m_3}|}^{R+\frac{m_2 r}{m_2+m_3}} \frac{2M_R}{\hbar^2} V_{31}(x) \right. \\ \times P^\lambda \left(\frac{R^2 + \frac{m_2^2 r^2}{(m_2 + m_3)^2} - x^2}{2R \frac{m_2 r}{m_2 + m_3}} \right) x dx \frac{1}{R \frac{m_2 r}{m_2 + m_3}} + \int_{y=|R-\frac{m_3 r}{m_2+m_3}|}^{R+\frac{m_3 r}{m_2+m_3}} \\ \left. \times \frac{2M_R}{\hbar^2} V_{21}(y) P^\lambda \left(\frac{y^2 - R^2 - \frac{m_3^2 r^2}{(m_2 + m_3)^2}}{2R \frac{m_3 r}{m_2 + m_3}} \right) y dy \frac{1}{R \frac{m_3 r}{m_2 + m_3}} \right\}. \quad (33)$$

下一步的任务就是寻找那样一组势, 对这一组势中的 V_{31} 和 V_{21} , (33)式可以解析地求积, 用这一组势中的 V_{23} 所求出的第二号粒子的本征函数的径向部分 $R_{n l_1}(r)$, 应使得(29)式同样可以解析地求积. 经过多次试探, 终于找到一组满足这些条件的势. 在这一组势中, V_{23} 是谐振子势, V_{21} , V_{31} 都是高斯形式的势. 下面我们在两种特殊情况下计算一下这个积分.

ii 举例

假设有以下这样一组相互作用势:

$$V_{21}(y) = -V_0^{21} e^{-y^2/R_{21}^2}, \quad (34)$$

$$V_{31}(x) = -V_0^{31} (1 + i\xi) e^{-x^2/R_{31}^2}, \quad (35)$$

$$V_{23}(r) = \frac{m_2 \omega^2}{2} r^2 - V_0^{31}. \quad (36)$$

式中 V_0^{21} , V_0^{31} 为势的深度, R_{21} , R_{31} 为相应的势半径, ξ 是表示光学势中吸收强度的参数, ω 是谐振子的圆频率. 并且只考虑下面两种情况: 一为 $l_2 = 0$, $\mu_2 = 0$, $n = 2$, $l_1 = 0$; 另一为 $l_2 = 0$, $\mu_2 = 0$, $n = 2$, $l_1 = 2$. 之所以要研究两种情况, 为的是将来对它们进行

比较,从比较中研究第二号粒子对原系统的影响与它所处状态的关系. 而对 $n=1$ 的态, 则不能进行这样的比较, 当 $n>2$ 时虽然可以进行这样的比较, 但那时(35)式的近似显然是不好的, 因为当 x 小时, 经验规律所确定的 V_{31} 随 x 的变化, 比由(35)式所描写的慢得多. 对这两种情况, 第二号粒子的径向波函数为:

$$R_{20}(r) = \left(\frac{m_r \omega}{\hbar}\right)^{3/4} \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{\pi}}} \left[r^2 \frac{m_r \omega}{\hbar} - \frac{3}{2} \right] \exp\left(-\frac{r^2 m_r \omega}{2\hbar}\right), \quad (37)$$

$$R_{22}(r) = \left(\frac{m_r \omega}{\hbar}\right)^{3/4} 4 \sqrt{\frac{1}{15\sqrt{\pi}}} r^2 \frac{m_r \omega}{\hbar} \exp\left(-\frac{r^2 m_r \omega}{2\hbar}\right). \quad (38)$$

它们的势为(推导见附录):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{200, 200}^{00, 00}(R) = & -\frac{2M_{\mathbf{R}}V_0^{31}(1+i\xi)}{\hbar^2} \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{2b^2} - \frac{3}{b} \right] \frac{1}{b^{3/2}} \right. \\ & + \left[\frac{10}{3b} - 2 \right] \frac{c}{b^{3/2}(1+c)^2} \frac{R^2}{R_{31}^2} + \frac{2c^2}{3b^{3/2}(1+c)^4} \frac{R^4}{R_{31}^4} \left. \right\} e^{-\frac{R^2}{R_{31}^2} \frac{1}{b}} \\ & - \frac{2M_{\mathbf{R}}V_0^{21}}{\hbar^2} \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{2d^2} - \frac{3}{d} \right] \frac{1}{d^{3/2}} + \left[\frac{10}{3d} - 2 \right] \frac{m_3^2 f}{(m_3^2 + f)^2 d^{3/2}} \frac{R^2}{R_{21}^2} \right. \\ & \left. + \frac{2m_3^4 f^2}{3(m_3^2 + f)^4} \frac{R^4}{R_{21}^4} \right\} e^{-\frac{R^2}{R_{21}^2} \frac{1}{d}}, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{220, 220}^{00, 00}(R) = & -\frac{2M_{\mathbf{R}}V_0^{31}(1+i\xi)}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{b^{7/2}} + \frac{4}{3b^{9/2}c} \frac{R^2}{R_{31}^2} \right. \\ & \left. + \frac{4}{15b^{11/2}c^2} \frac{R^4}{R_{31}^4} \right\} e^{-\frac{R^2}{R_{31}^2} \frac{1}{b}} - \frac{2M_{\mathbf{R}}V_0^{21}}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{d^{7/2}} + \frac{4m_3^2}{3d^{9/2}f} \frac{R^2}{R_{21}^2} \right. \\ & \left. + \frac{4m_3^4}{15d^{11/2}f^2} \frac{R^4}{R_{21}^4} \right\} e^{-\frac{R^2}{R_{21}^2} \frac{1}{d}}. \quad (40) \end{aligned}$$

式中 $b = 1 + 1/a^2 R_{31}^2 (1 + m_3)^2$, $c = a^2 R_{31}^2 (1 + m_3)^2$, $d = 1 + m_3^2/a^2 R_{21}^2 (1 + m_3)^2$, $f = a^2 R_{21}^2 (1 + m_3)^2$, $a = \sqrt{\frac{m_r \omega}{\hbar}}$.

iii 讨论

在(39)式中可以看出, 在靶核中新增加的粒子, 在力心近似下, 对势的影响可以分为两部分. 首先, 它使原来的光学位阱的深度参数及半径参数有所改变, 新的深度参数等于原参数乘以 R^2 的函数, 新的半径参数是原来的 \sqrt{b} 倍. 其次, 它还给势贡献了一个新的项, 新的项是由两体(第一, 二号粒子)核子相互作用贡献的, 它同样具有高斯的形式, 但它的半径是两体相互作用半径的 \sqrt{d} 倍, 它的深度参数同样是 R^2 的函数.

由(39)式与(40)式的比较中可以看出, 二者的形式完全相同, 半径的增大因子 \sqrt{b} , \sqrt{d} 在两式中是一样的, 只不过深度改变因子略有不同.

为了给出以上所述一个稍为定量的概念, 我们选取一组较为合理的参数作一估计. 选取 $V_0^{31} = V_0^{21} = 40\text{Mev}$, $\xi = 0.03$, $a = 0.46f^{-1}$, $R_{21} = 2f$, $m_3 = 16$, $R_{31} = 1.45(m_3^{1/3} + 1)f$, 则 $b = 1.0006$, $d = 2.05$, $c = 1579.6$, $f = 242.6$. 在(39)式中的两个深度改变因

子为:

$$\left\{ \begin{aligned} &0.9978 + 8.41 \times 10^{-4} \frac{R^2}{R_{31}^2} + 2.66 \times 10^{-7} \frac{R^4}{R_{31}^4} \\ &0.215 - 3.21 \times 10^{-2} \frac{R^2}{R_{21}^2} + 1.41 \times 10^{-2} \frac{R^4}{R_{21}^4} \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

在(40)式中的两个深度改变因子为:

$$\left\{ \begin{aligned} &0.9978 + 8.41 \times 10^{-4} \frac{R^2}{R_{31}^2} + 1.07 \times 10^{-7} \frac{R^4}{R_{31}^4} \\ &0.08 + 5.50 \times 10^{-2} \frac{R^2}{R_{21}^2} + 0.565 \times 10^{-2} \frac{R^4}{R_{21}^4} \end{aligned} \right\}. \quad (42)$$

将(41)式与(42)式进行比较以后不难知道,在力心近似下,处在不同内部状态的新增加的粒子对势的影响,不只在形式上完全相同,而且在定量上也几乎相等.从而使我们得出这样的结论:即在靶核中新增加的核子对势的影响几乎与这个核子所处的内部状态无关.在光学模型中,之所以能够用一个随核子数增加而连续地逐渐地改变其参数的复位阱就能系统地解释大量的实验结果,其原因之一,就在于新增加的核子对势的影响几乎与它所处的状态无关.

此外,在用光学模型对实验数据的分析中,所得到的它的参数随核子数改变的规律(即随着核子数的增加位阱半径增大,深度有增大的趋势^[5]),与(39)及(40)式中所显示出的规律相比定性的说也是一致的(见图 2, 3).若未作力心近似的假定,则方程中的相互作用势除对角项外还包含非对角项,非对角项的供献从性质上讲,相当于位阱的虚部加深.

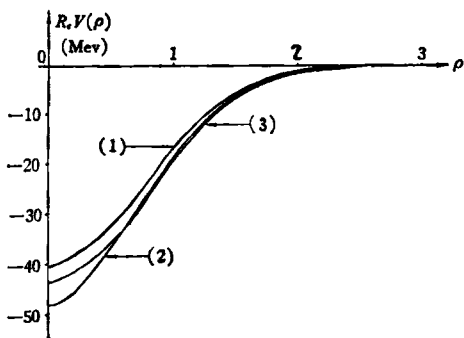


图 2 第二号粒子存在与不存在时,入射粒子与靶核相互作用势的实部的比较.图中 $\rho = kR$.

- (1) — $R_e V_{31}(\rho)$
- (2) — $R_e \left[\frac{\hbar^2}{2M_R} \Psi_{100, 200}^{00, 00}(\rho) \right]$
- (3) — $R_e \left[\frac{\hbar^2}{2M_R} \Psi_{120, 220}^{00, 00}(\rho) \right]$

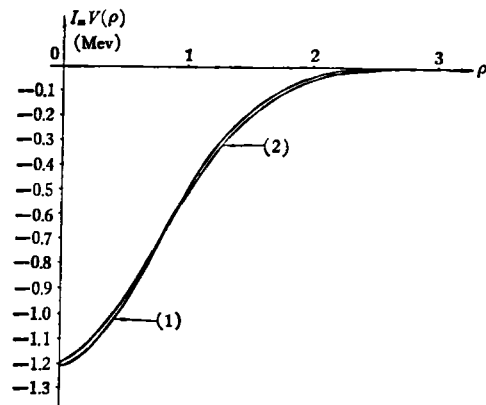


图 3 第二号粒子存在与不存在时,入射粒子与靶核相互作用势的虚部的比较.图中 $\rho = kR$.

- 由于 $I_m \left[\frac{\hbar^2}{2M_R} \Psi_{200, 200}^{00, 00}(\rho) \right]$ 与 $I_m \left[\frac{\hbar^2}{2M_R} \Psi_{120, 220}^{00, 00}(\rho) \right]$ 的值在三位有效数字以内都是相等的,所以在图上只以一条线表示.
- (1) — $I_m V_{31}(\rho)$
 - (2) — $I_m \left[\frac{\hbar^2}{2M_R} \Psi_{200, 200}^{00, 00}(\rho) \right]$, $I_m \left[\frac{\hbar^2}{2M_R} \Psi_{120, 220}^{00, 00}(\rho) \right]$

四、結 論

在本工作中,用使三体薛定格方程微分方程组化的方法,在力心近似下,对靶核中新增加的核子对原来的两体相互作用势的影响的问题进行了研究. 在工作中,我们找到了一组能使该问题用解析的方法进行研究的势,并对一个特例进行了较为仔细的讨论,在对这个具体例子的讨论中所获得的结论,定性地与在光学模型中所获得的结论一致.

附录 关于势 $\mathcal{V}_{nl_1\mu_1, nl_2\mu_2}^{l_1 0, l_2 0}(R)$ 的计算

我们只计算下列两种特殊情况: $l_2 = 0, \mu_2 = 0, n = 2, l_1 = 0; l_2 = 0, \mu_2 = 0, n = 2, l_1 = 2$. 对这两种情况 $L = l_1, \lambda = 0, h_0(0l_1 0l_1; l_1) = 1, m_1 = m_2 = 1$,

$$\mathcal{V}_{2l_1\mu_1, 2l_1\mu_1}^{00, 00}(R) = F_{2l_1}^0(R), \quad (I)$$

$$J^0(R, r) = \frac{m_3 + 1}{Rr} \frac{M_R}{\hbar^2} \left\{ -V_0^{31}(1 + i\xi) R_{31}^2 e^{-\frac{1}{R_{31}} \left[R^2 + \frac{r^2}{(1+m_3)^2} \right]} \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} \left(\frac{2Rr}{(1+m_3)R_{31}^2} \right) - \frac{V_0^{21}}{m_3} R_{21}^2 e^{-\frac{1}{R_{21}} \left[R^2 + \frac{m_3^2 r^2}{(1+m_3)^2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{2m_3 Rr}{(1+m_3)R_{21}^2} \right) \right\}. \quad (II)$$

利用(29), (37), (38)式及(II)式得

$$\mathcal{V}_{200, 200}^{00, 00}(R) = A \int_0^\infty \left[a^2 r^2 - \frac{3}{2} \right]^2 \{ \delta_3 e^{-\beta_3 r^2} \operatorname{sh} \alpha_3 r + \delta_2 e^{-\beta_2 r^2} \operatorname{sh} \alpha_2 r \} r dr, \quad (III)$$

$$\mathcal{V}_{220, 220}^{00, 00}(R) = A' \int_0^\infty r^4 \{ \delta_3 e^{-\beta_3 r^2} \operatorname{sh} \alpha_3 r + \delta_2 e^{-\beta_2 r^2} \operatorname{sh} \alpha_2 r \} r dr. \quad (IV)$$

式中

$$A = \frac{-(m_3 + 1)M_R}{\hbar^2 R} a^3 \frac{8}{3\sqrt{\pi}}, \\ a = \sqrt{\frac{m_r \omega}{\hbar}}, \\ \delta_3 = V_0^{31}(1 + i\xi) R_{31}^2 e^{-\frac{R^2}{R_{31}^2}}, \\ \delta_2 = \frac{1}{m_3} V_0^{21} R_{21}^2 e^{-\frac{R^2}{R_{21}^2}}, \\ \alpha_3 = \frac{2R}{(1+m_3)R_{31}^2}, \\ \alpha_2 = \frac{2m_3 R}{(1+m_3)R_{21}^2}, \\ \beta_3 = a^2 + \frac{1}{R_{31}^2(1+m_3)^2}, \\ \beta_2 = a^2 + \frac{m_3^2}{R_{21}^2(1+m_3)^2}, \\ A' = \frac{-(m_3 + 1)M_R}{\hbar^2 R} a^7 \frac{16}{15\sqrt{\pi}}. \quad (V)$$

利用下面的积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} r e^{-\beta r^2} \operatorname{sh} \alpha r \, dr &= \frac{\alpha}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp \frac{\alpha^2}{4\beta}, \\ \int_0^{\infty} r^3 e^{-\beta r^2} \operatorname{sh} \alpha r \, dr &= \frac{\sqrt{\pi} \alpha (6\beta + \alpha^2)}{16\beta^3 \sqrt{\beta}} \exp \frac{\alpha^2}{4\beta}, \\ \int_0^{\infty} r^5 e^{-\beta r^2} \operatorname{sh} \alpha r \, dr &= \frac{\alpha}{4^3 \beta^3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \{ \alpha^4 + 20\beta\alpha^2 + 60\beta^2 \} \exp \frac{\alpha^2}{4\beta}.\end{aligned}\quad (\text{VI})$$

式中 $\beta > 0$, 则公式(III)和(IV)变为

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{200, 200}^{00, 00}(R) &= A \left\{ \delta_3 \left[a^4 \frac{1}{4^2 \beta_3^4} (\alpha_3^4 + 20\beta_3 \alpha_3^2 + 60\beta_3^2) - \frac{3a^2}{4\beta_3^2} (6\beta_3 + \alpha_3^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{4} \right] \frac{\alpha_3}{4\beta_3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta_3}} \exp \frac{\alpha_3^2}{4\beta_3} + \delta_2 \left[a^4 \frac{1}{4^2 \beta_2^4} (\alpha_2^4 + 20\beta_2 \alpha_2^2 + 60\beta_2^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3a^2}{4\beta_2^2} (6\beta_2 + \alpha_2^2) + \frac{9}{4} \right] \frac{\alpha_2}{4\beta_2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}} \exp \frac{\alpha_2^2}{4\beta_2} \right\},\end{aligned}\quad (\text{VII})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{220, 220}^{00, 00}(R) &= A' \left\{ \delta_3 \frac{\alpha_3}{4^3 \beta_3^3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta_3}} (\alpha_3^4 + 20\beta_3 \alpha_3^2 + 60\beta_3^2) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \frac{\alpha_3^2}{4\beta_3} + \delta_2 \frac{\alpha_2}{4^3 \beta_2^3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}} (\alpha_2^4 + 20\beta_2 \alpha_2^2 + 60\beta_2^2) \exp \frac{\alpha_2^2}{4\beta_2} \right\}.\end{aligned}\quad (\text{VIII})$$

参 考 资 料

- [1] H. Feshbach, *Ann. Phys.*, **5**(1958), 357.
- [2] Г. Ф. Друкарев, Теория столкновений электронов с атомами. § 11(1963), 80.
- [3] Б. Ф. Бейман, Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии. лекция 11 (1961), 112.
- [4] I. C. Percival, M. J. Seaton, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 654.
- [5] J. R. Beyster, LA-2099.