标量-张量的III型引力波*

陆启铿 (中国科学院数学研究所)
刘煜奋 (中国科学院物理研究所)
邹振隆 (中国科学院北京天文台)
郭汉英 (中国科学院原子能研究所)

本文研究标量-张量引力辐射，并给出外尔 (Weyl) 张量为 III 型、N 型、O 型的引力辐射的全部精确解.

Dirac[1] 认为万有引力常数不是真正的常数. Jordan[2] 曾经引进一标量场以便在广义相对论的理论体系下实现 Dirac 的观点. Brans-Dicke[3] 建立了满足广义协变下守恒的标量-张量的引力场方程. 根据这一理论,对所谓三大验证皆与广义相对论的引力理论一样在误差范围内符合. 而据 Dicke-Goldenberg[4] 所作的关于太阳扁率的实验,其结果他们认为更有利于标量-张量理论. 最近, Weber[5] 还通过引力波的实验试图来比较两种理论的优劣. 本文是从理论上分析标量-张量理论以与张量的引力理论比较.

我们从 Brans-Dicke 的场方程出发,研究标量-张量引力辐射的性质,并在外尔张量为 III 型、N 型、O 型的情况下,把引力辐射的精确解全部求出,和已知的相应类型的广义相对论的精确解比较，发现附加标量场的 III 型、N 型、O 型解全可最后归结为简单的二阶线性偏微分方程的解，而相应类型的广义相对论的真空引力场方程的精确解，至今还未全部知道. 在附加了射线簇正交于超曲面的几何条件后，例如仅就 N 型而言，除了无扩 (expansion free) 解已由 Kundt[6] 得出,无挠 (twist free) 解已由 Robinson-Trautman[7] 得出(分别归结为二阶线性和半线性偏微分方程的解)外,有扩、有挠的情形至今还没有找到一个精确解(见 Collinson 文章[8]),也没有证明此种解不存在. 由于 Brans-Dicke 的理论并没有脱离广义相对论的框架，他们的自由场方程，可以看作是能量-动量张量等于静质量为零的标量场的能量-动量张量的广义相对论场方程，而这种附加了外场的场方程的 III、N、O 型辐射解，反而更简单地化为线性方程解,从引力场量子化的角度考虑,是颇有兴趣的. 我们曾附加电磁零 (Null) 场的能量-动量而求广义相对论的 N 型精确解，结果亦把场方程归结为二阶线性偏微分方程，其度规在形式上是和 Kundt[6] 附加了几何上的"正交于超曲面"并无扩的条件的一样,这是耐人寻味的.

Brans-Dicke 的标量-张量理论的自由场方程为:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=b\left[\frac{a}{\varphi^2}\left(\varphi_{;i}\varphi_{;k}-\frac{1}{2}g_{ik}\varphi_{;l}\varphi^{;l}\right)+\frac{1}{\varphi}\varphi_{;ik}\right], \tag{1}$$

$$g^{ik}\varphi_{;ik}=0. \tag{2}$$

* 1972年5月13日收到.

其中φ为标量，a与b为常数，这里小写拉丁字母指标 $j, k \cdots = 0, 1, 2, 3$. 在 Brans-Dicke 理论中取 $b = 1$，但在这里的讨论对一般的b并不增加困难，而在取 $b \to 0$ 时方便于与广义相对论的真空解比较.

由于 g_{jk} 的号差（Signature）为 -2，方程(2)的解φ是引力辐射解时，必须要满足方程

$$g^{jk}\varphi_{;j}\varphi_{;k} = 0. \tag{3}$$

这在数学上是存在波面的必要条件，在物理上是引力波以光速传播的条件. 由此可知，引力波的传播方向

$$l^j = g^{jk}\varphi_{;k} \tag{4}$$

是零短程线簇；它必然是正交于超曲面的. 这种情况，Robinson-Trautman[7] 认为在广义相对论的真空场中是物理上难以实现的(虽然他们和 Kundt[6] 的工作都附加了此条件)，而在这里，此条件是自然产生的.

我们用旋量分析的方法. 由(1)与(3)知 Ricci 旋量为

$$\Phi_{AB\bar{C}\bar{D}} = \frac{b}{2}\left[\frac{a}{\varphi^2}\nabla_{A\bar{C}}\varphi\nabla_{B\bar{D}}\varphi + \frac{1}{\varphi}\nabla_{A\bar{C}}\nabla_{B\bar{D}}\varphi\right].$$

其中 $\nabla_{A\bar{C}}$ 代表旋量的协变微分. 这里大写拉丁字母 $A, B, C \cdots = 1, 2$ 代表旋量指标，并用 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \cdots$ 等代替通常用的旋量指标 $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C} \cdots$ 等.

由方程(2)的旋量形式

$$\nabla^{A\bar{C}}\nabla_{A\bar{C}}\varphi = 0,$$

即可证明：零短程线簇 $\{l^j\}$ 必然是无扩、无挠的. 由 N-P 方程（见文章 [9] 或 [10]）知，$\{l^j\}$ 必然是无切的（shear free），并且是代数上特殊的. 此外，l^j 必与外尔张量的一个主特征方向相同.

我们进而在外尔旋量 Ψ_{ABCD} 为 III 型的情况下解 N-P 方程，结果证明 III 型度规可写为如下形式：

$$ds^2 = -2\left(\frac{x + C_0}{C_0}\right)^2 U\,d\varphi^2 + 2\,\frac{x + C_0}{C_0}d\varphi\,dr - \left|\left(\bar{f}_1 + f_2 + \frac{r}{C_0}\right)d\varphi + dz\right|^2. \tag{5}$$

其中 $z = x + iy$，C_0是不为零的常数，f_1与f_2皆不包含r并对z是复解析函数.

(i) 当 $C_0 \neq \infty$ 时，式(5)中 $f_2 = \frac{b}{2\varphi}z$，$f_1$ 任意，U 是不含r的实函数适合方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2}{x + C_0}\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2C_0^2}{(x + C_0)^2}\left|\frac{\partial f_1}{\partial z}\right|^2 - \frac{bC_0^2(2a + b + 2)}{2\varphi^2(x + C_0)^2}. \tag{6}$$

特别当外尔张量为 N 型时，f_1 不包含 z；当外尔张量为 O 型时，$(x + C_0)^2 U$ 对 z 及 $\bar{z}$ 是二次函数.

(ii) 当 $C_0 = \infty$ 时，式(5)中 $f_1 = 0$，f_2 任意. 此时零短程线簇 $\{l^j\}$ 是无转的(rotation free). 在此特殊情况下，度规形式 Kundt[6] 曾经有过. 我们可作适当的坐标变换 $z \to F(\varphi, z)$ 使度规化为

$$ds^2 = -2U\,d\varphi^2 + 2d\varphi\,dr - |f|^2\,|dz|^2. \tag{7}$$

其中 f 不包含 r 并对 z 是复解析函数；$U = U_0 - r \frac{\partial}{\partial\varphi} \log |f|$，$U_0$ 是不包含 r 的实函数并适合方程

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial\varphi^2} - \frac{b}{2\varphi}\frac{\partial |f|^2}{\partial\varphi} - \frac{ab|f|^2}{\varphi^2}. \tag{8}$$

特别当外尔张量为 N 型时，f 不包含 φ；此时可作坐标变换 $z \to \int \frac{dz}{f}$，使度规化为

$$ds^2 = -2U\, d\varphi^2 + 2d\varphi\, dr - |dz|^2. \tag{9}$$

其中 U 不包含 r 并适合方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{ab|f|^2}{\varphi^2}. \tag{10}$$

这证明标量-张量的引力波中，pp 波亦存在；特别取 $b \to 0$ 时，就是熟知的广义相对论真空场的 pp 波(例如见 Ehlers 及 Kundt 的文章[11])．

又当外尔张量为 O 型时，(9)中的 U 对 z 及 $\bar{z}$ 是二次函数．

参考资料

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A 165** (1938), 199.

[2] P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, (1955).

[3] C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **124** (1961), 925.

[4] R. H. Dicke and H. M. Goldenberg, *Phys. Rev. Letters*, **18** (1967), 313.

[5] J. Weber, *Phys. Letters*, **34A** (1971), 257.

[6] W. Kundt, *Z. Physik*, **163** (1961), 77.

[7] I. Robinson and A. Trautman, *Proc. Roy. Soc.*, **A265** (1962), 463.

[8] C. D. Collinson, *J. Phys. A(General Phys.)*, **2**(1969), 621.

[9] E. T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 566.

[10] F. A. E. Pirani, Introduction to Gravitational Radiation, Lectures on General Relativity, (1964). Brandeis Summer Institute in Theor. Phys., vol. I. 249—373.

[11] J. Ehlers and W. Kundt, Exact Solutions of the Gravitational Field Equations, Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. by L. Witten, (1962).