

关于开式谐振腔振荡模的角分布*

方洪烈

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

激光器件输出的角分布(或“输出的方向性”、或“输出光束的发散角”)是一个十分重要的参量。它关系到激光的某些十分重要的应用。为了达到改善方向性的目的,有必要对目前常用的几种谐振腔的角分布特性作一个大致的了解。为此,对平行平面谐振腔和球面共焦谐振腔的角分布作一个初步的探讨。

一、问题的公式化

为叙述简便,只讨论一个方形(或矩形)反射面的谐振腔经分离变量后的二维问题。表征谐振腔性质及其规律的,是谐振腔的本征方程^[1]:

$$b_m u_m(x) = \int_{-a}^a K(x, x') u_m(x') dx'. \quad (1)$$

其中 $K(x, x')$ 是积分核,它基本上决定了谐振腔的性质。对于不同形式的谐振腔它是不同的。谐振腔内存在着很多的振荡模,每一个振荡模由一组 b_m 和 $u_m(x)$ 来描写,本征函数 $u_m(x)$ 是谐振腔反射面上的场分布函数,量 $|u_m(x)|$ 给出该振荡模的场振幅分布,而量 $\arg u_m(x)$ 则给出它的相位分布。众所周知,本征值 b_m 决定该振荡模的衍射损失 $(1 - |b_m|^2)$ 和相对相位移 $(\arg b_m)$,也即影响着谐振腔的频谱结构。

谐振腔的角分布是由每个振荡模的角分布与振荡模的数目与强度的比值决定的。用傅里叶变换可以求得单个模的角分布。

首先看一个例子。对于任意一个时空函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ (或称为波函数)都可以把它分解为无限多平面波的迭加形式:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} c(\mathbf{K}, t) e^{-i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} dk_x dk_y dk_z. \quad (2)$$

这样就将波函数 ψ 按照不同的振荡频率和不同的传播方向 \mathbf{K} 分解开了,在不同方向上的强度(或分量)由 $c(\mathbf{K}, t)$ 给出。因此, $c(\mathbf{K}, t)$ 便是 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 的频谱和方位角的谱函数。为了求 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 的角分布只需对式(2)作一傅里叶变换即得到

$$c(\mathbf{K}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}, t) \theta^{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} dx dy dz. \quad (3)$$

* 1972年7月21日收到。

可这样选择谐振腔的空间坐标,即使谐振腔的轴线与 z 轴重合。因此,所关心的只是波矢量 \mathbf{K} 的横向 (x 方向) 的分量。所需要的只是 $u_m(x)$ 按 \mathbf{K} 与 z 轴的夹角 θ 的分布 $J(\theta)$ 。故 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}$ 只取 $K \times x = Kx \sin \theta$ 。当所考虑的角度 θ 很小时可近似地取

$$Kx \sin \theta \doteq Kx\theta. \quad (4)$$

于是所需要的角分布 $J(\theta)$ 便可写成^[2]

$$J_m(\omega) = \int_{-a}^a u_m(x) e^{i\omega x} dx, \quad (5)$$

其中 $\omega = K\theta$ 。

由此看到,本征函数不仅给出了场振幅分布和场的相位分布,而且还给出了场的角分布。

在讨论谐振腔的角分布之前,先讨论两个例子。

(1) 沿 z 轴传播的一个理想单色平面波

$$u(x, t) = A e^{-i\omega t},$$

其角分布

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i\omega t} e^{i\omega t} dx = 2\pi A e^{-i\omega t} \delta(\omega)^{[3]}, \quad (6)$$

其中 $\delta(x)$ 是狄拉克 δ 函数。式 (6) 表明理想单色平面波的角分布集中在一个小角度内,即发散角等于零。这正是所预料的结果。

(2) 波阵面为有限尺寸的平面波

$$u(x) = \begin{cases} A, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a; \end{cases}$$

它的角分布是

$$J(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin \omega a.$$

这正是宽度为 $2a$ 的单狭缝的夫朗和费衍射。第一级零点之间的角宽度为

$$\Delta\theta = 2 \left(\frac{\lambda}{2a} \right).$$

其中 $\lambda/2a$ 即衍射角。

从上述两个例子,可看到这个结论与普通的光学理论是一致的。

二、二维平行平面谐振腔的角分布

如上面约定的,我们只讨论一个二维谐振腔的角分布。假定谐振腔的口径为 $2a$, 腔长为 L , 则二维平行平面谐振腔的本征方程为

$$b_m u_m(x) = \sqrt{\frac{iK}{2\pi L}} \int_{-a}^a e^{-i\frac{K}{2L}(x-x')^2} u_m(x') dx'. \quad (7)$$

其中 $K = 2\pi/\lambda$, 它的近似解为^[4]

$$u_m(x) = \frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{2a\left(1 + \beta\frac{1+i}{M}\right)}\right)}{\sin\left(\frac{m\pi x}{2a\left(1 + \beta\frac{1+i}{M}\right)}\right)}, m = \begin{cases} 1, 3, 5, \dots; \\ 2, 4, 6, \dots. \end{cases} \quad (8)$$

其中 $M^2 = 8\pi N$, N 是费涅耳数 $a^2/\lambda L$. 为计算方便, 引入如下一些量:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{K/L} x = (M/2a)\chi, \\ \omega &= \sqrt{KL} \theta = (ML/2a)\theta, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\rho_0 = \frac{m\pi}{M + \beta(1+i)}, m = 1, 2, 3, \dots. \quad (10)$$

于是, 它们的角分布为(假定 M 足够大)

$$J_m(\omega) \doteq \int_{-M/2}^{M/2} \frac{e^{i\omega\xi} \cos(\rho_0\xi)}{\sin(\rho_0\xi)} d\xi$$

$$= \begin{cases} \pm \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - \omega^2} \cos \frac{M\omega}{2}, m = 1, 3, 5, \dots \begin{cases} \frac{m-1}{2} \text{ 为偶数} \\ \frac{m-1}{2} \text{ 为奇数;} \end{cases} \\ \mp \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - \omega^2} \sin \frac{M\omega}{2}, m = 2, 4, 6, \dots \begin{cases} \frac{m}{2} - 1 \text{ 为偶数} \\ \frac{m}{2} - 1 \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{cases}$$

实验上有意义的是辐射功率(或能量)的角分布, 即

$$|J_m(\omega)|^2 = \left| \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - \omega^2} \begin{pmatrix} \cos \frac{M\omega}{2} \\ \sin \frac{M\omega}{2} \end{pmatrix} \right|^2, m = \begin{cases} 1, 3, 5, \dots; \\ 2, 4, 6, \dots. \end{cases} \quad (11)$$

当谐振腔的费涅耳数足够大时, 可近似地有

$$\rho_0 \doteq \frac{m\pi}{M}. \quad (12)$$

在这个条件下, 具体地讨论一下平行平面谐振腔的角分布.

由图 1 看到, 平行平面谐振腔的角分布分为很多个峰, 每一个峰称为一个瓣, 峰最高的瓣称为主瓣. 由图 1 看到除了主模 ($m = 1$) 的角分布只有一个主瓣外, 其他的模都有二个对称的主瓣. 每个主瓣的半功率点的角宽度称为微分半宽度, 以 $d\theta$ 表示. 而两个主瓣之间半功率点的最大的角宽度称为半宽度, 以 $\Delta\theta$ 表示. 每个主瓣的峰值点与谐振腔轴线的夹角以 θ_H 表示. 对于每一个模的这些参量列于表 1 中.

表 1 说明:

(1) 每一个模有一个特定的空间取向. 这就是平常说的轴外模的来源, 或者是以模的传播方向与谐振腔轴线的夹角来区分不同模式的根据;

(2) 每个模的微分半宽度 $d\theta$ 具有同样的值, 这说明每个模的模体积或相干面积是相等的;

(3) 每个模两个主瓣的夹角等于模序数 m .

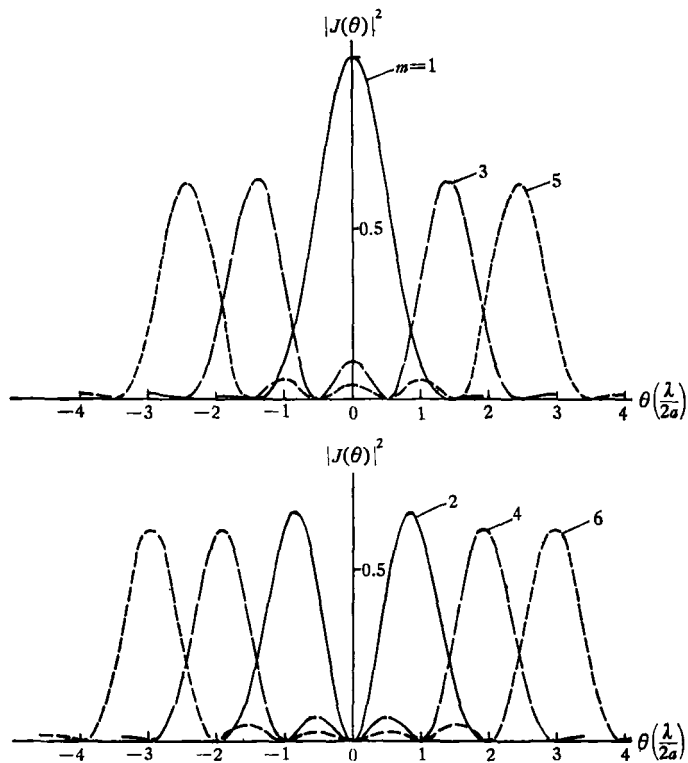


图 1 二维平行平面谐振腔前六个振荡模的相对角分布

表 1 二维平行平面谐振腔振荡模的相对角分布参量

模 序 数	半 宽 度 $\Delta\theta \left(\frac{\lambda}{2a}\right)$	微 分 半 宽 度 $d\theta \left(\frac{\lambda}{2a}\right)$	θ_H
1	1.18	1.18	0
2	2.62	0.9	0.8
3	3.72	0.9	1.4
4	4.76	0.9	1.95
5	5.80	0.9	2.4
6	6.84	0.9	3.0
≥ 7	$1.18 \times m$	0.9	$m/2$

上面所得结果与资料[5]的结论是一致的。

三、球面共焦谐振腔的角分布

对于二维共焦谐振腔来说,它的本征函数是^[6]

$$\begin{aligned}
 u_0(\xi) &= e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \\
 u_1(\xi) &= \sqrt{\pi} \xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \\
 u_2(\xi) &= (2\xi^2 - 1) e^{-\frac{1}{2}\xi^2},
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_3(\xi) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi(2\xi^2 - 3)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \\
 \dots\dots \\
 u_m(\xi) &= \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}{\Gamma(m + 1)} (-1)^m e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-\xi^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

它的角分布函数是

$$\left. \begin{aligned}
 J_0(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}, \\
 J_1(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (i\sqrt{\pi}) \omega e^{-\frac{1}{2}\omega^2}, \\
 J_2(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - \omega^2) e^{-\frac{1}{2}\omega^2}, \\
 J_3(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (i\sqrt{\pi}) \frac{\omega}{2} (3 - \omega^2) e^{-\frac{1}{2}\omega^2}, \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

实验上有意义的量是

$$\left. \begin{aligned}
 |J_0|^2 &= \frac{\pi}{2} e^{-\omega^2}, \\
 |J_1|^2 &= \frac{\pi}{2} \pi \omega^2 e^{-\omega^2}, \\
 |J_2|^2 &= \frac{\pi}{2} (1 - \omega^2)^2 e^{-\omega^2}, \\
 |J_3|^2 &= \frac{\pi}{2} \pi \frac{\omega^2}{4} (3 - \omega^2)^2 e^{-\omega^2}, \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

共焦谐振腔的角分布见图 2。共焦谐振腔的诸参量见表 2。表 2 中的单位是 $\sqrt{\frac{\lambda}{L}}$ 。

从表 2 和图 2 中看出,共焦谐振腔与平行平面谐振腔的角分布性质是极其不同的。

(1) 对于共焦谐振腔,主模 ($m = 0$) 具有最大的微分半宽度,而一次模具有最大的半宽度和与谐振腔轴线的夹角。

(2) 对共焦谐振腔,模序数增加,角分布并不变坏。出现这个结果是由于共焦谐振腔的相干面积或模体积随模序数的增加而变大之故。这一点可由共焦谐振腔的场分布函数曲线看出(见资料[7]的 57 页)。

(3) 共焦谐振腔角分布的最大峰(主瓣)始终出现在近轴线处,其原因为共焦谐振腔场分布函数的主体是高斯函数,而高斯函数在传播过程中是不变形的。

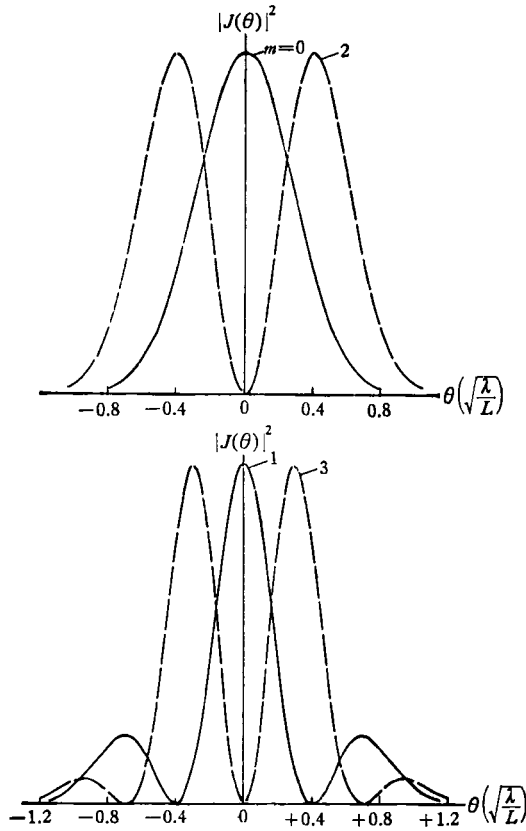


图 2 二维共焦谐振腔前四个振荡模的相对角分布

表 2 二维共焦谐振腔前四个振荡模的相对角分布参数

模 序 数	半 宽 度 $\Delta\theta \left(\sqrt{\frac{\lambda}{L}}\right)$	微 分 半 宽 度 $d\theta \left(\sqrt{\frac{\lambda}{L}}\right)$	θ_H
0	0.67	0.67	0
1	1.09	0.54	0.4
2	0.36	0.36	0
3	0.92	0.32	0.35

四、几点讨论

上面所得的角分布(或称为角谱),究竟有什么物理意义呢?从光学上看,每一个角谱元

$$J(\omega) d\omega \tag{16}$$

就是一个光栅,因为正弦光栅的角分布只有一个方向。

目前激光输出方向性变坏的原因之一,就是由于振荡的模数目太多造成的。这一点对平行平面谐振腔来说是一目了然的。

但对于共焦谐振腔来说,方向性随模序数的增加并不变坏。因此,多模出现也不会使

方向性变坏。那么改善方向性似乎可以用共焦谐振腔了。

我们要指出,这只是一种错觉。下面来说明这个问题。为此,看一看口径相同的平行平面谐振腔同共焦谐振腔的角分布的差别。为方便起见,只对主模进行讨论。对于平行平面谐振腔来说,它的半宽度是

$$1.18 \frac{\lambda}{2a}, \quad (17)$$

而共焦谐振腔的半宽度是

$$0.67 \sqrt{\frac{\lambda}{L}} = 1.34 \sqrt{N} \frac{\lambda}{2a}. \quad (18)$$

由式(18)看出,共焦谐振腔的半宽度比平行平面谐振腔的半宽度大 $\sim \sqrt{N}$ 倍。一般情况下 N 总是一个很大的数。为了减小共焦谐振腔的半宽度就必须减小 N ,但随着 N 的减小,厄米-高斯模存在的前提 ($N \gg 1$) 便被破坏了。

此外看到:凡是等价一个共焦谐振腔的选模方法均不会改善方向性。

参 考 资 料

- [1] A. G. Fox, T. Li, *Bell System. Tech. J.*, 40 (1961), 453.
- [2] В. В. Любимов, И. Б. Орлова, *ЖТФ*, 39 (1969), 2183.
- [3] Д. 伊凡宁柯, А. 索科洛夫, 经典场论, 科学出版社, 1958.
- [4] Л. А. Вайнштейн, *открытые резонаторы и открытые волноводы*, Изд. «Советское радио», 1966.
- [5] Ю. А. Ананьев, А. А. Мак, Б. М. Седов, *ЖЭТФ*, 52 (1967), 12.
- [6] G. D. Boyd, J. P. Gordon *Bell. System. Tech. J.*, 40(1961), 489.
- [7] 周世勋, 量子力学, 上海科学技术出版社, 1961.