关于标量-张量理论中含物质及黑体辐射的宇宙解*

方 励 之

(中国科学技术大学物理系)

各向同性的 3°K 黑体辐射的发现[1],支持了早期宇宙处于火球状态的演化理论,从而引起了讨论包含有物质及黑体辐射的宇宙模型的必要. 初期的模型多限于物质及辐射间无相互作用的情况,在最近的一些工作中[2], 通过物态方程唯象地引入了物质及辐射间的作用,即假定压力 p 与能量密度 ρ 之比

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho} \tag{1}$$

在早期宇宙中近于 1/3 (类辐射状态), 在现阶段宇宙中它近于零 (类物质状态). 在这种近似下,他们根据 Einstein 的引力理论,给出了符合于观测的宇宙解.

这篇短文的目的是讨论标量-张量理论[3] 中的相应问题. 目前,无论关于太阳扁率的实验[4], 或者关于行星反射雷达信号的实验[5], 都不能排除 Brans-Dicke 的标量场的存在的可能.我们想指明,在包含相互作用的物质及黑体辐射的宇宙模型问题上,标量-张量理论,也如 Einstein 引力理论一样有效,也就是: 如果同样采取关于式(1)的唯象假定,也可以找到符合于观测的解.

在均匀及各向同性的宇宙模型中,采用 Robertson-Walker 度规:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{k}{4} r^2\right)^2} (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{2}$$

在均匀宇宙中,显然标量场 φ 也应只是 t 的函数,问题的基本方程是:

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi\varphi^{-1}}{c^2}\rho + \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)^2 - 3\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\frac{\dot{a}}{a}, \tag{3}$$

$$3\dot{\varphi}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \ddot{\varphi} = \frac{8\pi}{c^2(2\omega + 3)}(\rho - 3p), \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{da^3}{dt} = 0. \tag{5}$$

上列方程组,目前已知的严格解仅有: 文[3]及[6]中给出了 $k = 0$ (平坦型) 以及 ε 为常数时的解,文[7]中给出了 $p = 0$ 时的两个解.

* 1972年8月31日收到.

现在,我们取一种最简单的关于 ε 的模型:

$$\varepsilon = \frac{1}{3\left(1+\frac{a}{a_1}\right)}. \tag{6}$$

其中 a_1 是常数, 当 $a \gg a_1$ 时 $\varepsilon \simeq 0$, 是无压物质占主要成份的状态; 当 $a \ll a_1$ 时 $\varepsilon \simeq \frac{1}{3}$, 是黑体辐射或高温物质占主要成份的状态. a_1 相当于宇宙演化的这两个阶段的转变半径. 当 $a_1 = 0$ 时,就过渡为通常的 $p = 0$ 模型.

将式(6)代入(5),积分可得

$$\rho a^3 = A\left(1+\frac{a_1}{a}\right), \tag{7}$$

$$p a^3 = \frac{1}{3} A \frac{a_1}{a}, \tag{8}$$

$$A = \rho_0 a_0^3 \left(1+\frac{a_1}{a}\right)^{-1}. \tag{9}$$

其中 ρ_0 是现在的平均能量密度, a_0 是现在的半径,将式(7)及(8)代入式(3)及(4),经过积分,可以将它们简化为

$$3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + 3\frac{kc^2}{a^2} = (2\omega+3)\frac{\dot\varphi}{\varphi}\left(1+\frac{a_1}{a}\right)\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\dot\varphi}{\varphi}\right)^2 - 3\frac{\dot\varphi}{\varphi}\frac{\dot a}{a}, \tag{10}$$

$$\dot\varphi a^3 = \frac{8\pi A}{c^2(2\omega+3)} t. \tag{11}$$

现在,我们寻求如下形式的解

$$\varphi = K a^n, \tag{12}$$

其中 K 及 n 是常数. 文 [3, 6]及 [7]中所给出的严格解, 大都是这种形式的. 式(12)表明,万有引力"常数" $G = \varphi^{-1}(4+2\omega)(3+2\omega)^{-1}$ 的变化率,与 Hubble 数 $H = \frac{\dot a}{a}$ 有着简单的关系

$$\left|\frac{\dot G}{G}\right| = |nH|. \tag{13}$$

根据式(12),代入方程组(10)和(11),不难证明: 当 $k = 1$ (闭型) 时, 存在如下的解

$$a = \frac{2\pi A}{Kc^2(2\omega+3)}(2Dt - t^2), \tag{14}$$

$$\varphi = \frac{K^3c^4(2\omega+3)^2}{4\pi^2A^2}(2Dt - t^2)^{-2}. \tag{15}$$

其中

$$D^2 = \left(\frac{3c^4K}{8\pi A} - a_1\right)\frac{4Kc^2(2\omega+3)}{8\pi A}. \tag{16}$$

在上述解中令 $a_1 = 0$, 它就过渡为文 [7] 中的一个解. 而文 [3, 6]及 [7] 中的其他严格解,由于辐射及其与物质的相互作用的出现,不再具有式(12)的形式.

为了便于看清引入辐射的影响,我们根据上述解, 写出在各时刻 t 及半径 a 下, 一些

可观测的物理量之间的关系

$$t = \frac{2c^2(2\omega + 3)}{8\pi} \frac{\varphi}{\rho} \left(1 + \frac{a_1}{a}\right) H \left[\sqrt{1 + \frac{8\pi\rho}{c^2(2\omega + 3)\varphi\left(1 + \frac{a_1}{a}\right)H^2}} - 1\right]. \tag{17}$$

由此看到，只当 $a \lesssim a_1$ 时，即早期宇宙中，辐射的影响是显著的，而当 $a \gg a_1$，即现阶段宇宙中，辐射的引入对一些观测量之间的关系的影响，是可以略去的．相当于说，尽管早期宇宙中由于辐射引起了明显的效应，但在现阶段中，都被"遗忘"了．在 Einstein 理论的一些解中，也存在着相似的特点．

为了分别求出物质及辐射的能量密度 ρ_m, ρ_r 及压力 p_m, p_r，可利用下列关系：

$$\rho_r + \rho_m = \rho, \tag{18}$$

$$p_r + p_m = p, \tag{19}$$

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r = \frac{1}{3}a^* T^4, \tag{20}$$

$$a^* = 7.57 \times 10^{-15} \text{尔格} \cdot \text{厘米}^{-3} \cdot \text{度}^{-4}.$$

此外，还应补充一个条件，文[2]中，引入一个附加的关系

$$p_m = h(a)p.$$

但在最后，他们又取 $h(a) \equiv 0$，似乎太特殊了．如果依据引入式(6)的图象，在早期宇宙中物质处于高温的状态，它们的压力与能量密度之比近于 1/3，则在总压力中，有一部分应是由物质供献的，而在现阶段中，由于物质的冷却，进入无压状态，而压力都是由辐射所供献的，那么，取下式就更合理一些：

$$h(a) = \frac{h}{1 + \frac{a}{a_1}}. \tag{21}$$

其中常数 h 应满足关系 $0 \leqslant h \leqslant 1$（由于压力 p_m 及 p_r 不能为负），它表示在早期宇宙中物质所占有的成份．由此，可以解出

$$\rho_m = \frac{A}{a^3}\left(1 + \frac{a_1}{a}\frac{h}{1 + \frac{a}{a_1}}\right), \tag{22}$$

$$p_r = \frac{1}{3}\frac{Aa_1}{a^4}\left(1 - \frac{h}{1 + \frac{a}{a_1}}\right), \tag{23}$$

$$\rho_r = \frac{Aa_1}{a^4}\left(1 - \frac{h}{1 + \frac{a}{a_1}}\right). \tag{24}$$

利用现在的 3°K 辐射密度 $\rho_{r,0}/c^2 = (a^* 3^4)/c^2 = 6.8 \times 10^{-34}$ 克·厘米$^{-3}$，以及物质密度 $\rho_{m,0}/c^2 \simeq 4 \times 10^{-29}$ 克·厘米$^{-3}$，由式(22)及(24)可以求出

$$\frac{a_1}{a_0} \simeq 1.7 \times 10^{-5}.$$

再利用 $G_0 = \varphi_0(4+2\omega)(3+2\omega)^{-1} = 6.67 \times 10^{-8}$ 厘米$^{+3}$·克$^{-1}$·秒$^{-2}$，$\omega \simeq 4$[4]，以及

Sandage 所给出的 Hubble 常数的范围 49—130 千米·秒$^{-1}$·百万秒差距$^{-1}$[8]，可以从式(17)，求出宇宙演化的时标的范围：

$$t_0 \sim (0.7—1.4) \times 10^{10} \text{ 年}.$$

根据这些数据，还可以计算减速因子 q 的数值范围：

$$q = -\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)_0 \frac{1}{H_0^2} \simeq 0.1—1.1.$$

减速因子 q 的观测值是 1.2 ± 0.4[8]，与上述理论值的符合情况，是令人满意的。在这些计算中，实际上不受含 $h(a)$ 项的影响，上述的符合是与关于 $h(a)$ 的具体选择无关的。

从前述模型，我们还可以得到一个有兴趣的结论，利用式(23)及(24)，可以求得辐射能量密度的变化率：

$$E_r = \frac{1}{a^3}\left\{\frac{d}{dt}(\rho_r a^3) + p_r \frac{da^3}{dt}\right\} = \frac{h\rho H}{\left(1 + \frac{a_1}{a}\right)^2}.$$

各量取目前值就得到

$$(E_r)_0 \simeq h \times 10^{-36} \text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-3}.$$

$(E_r)_0 > 0$，这与现阶段宇宙的情况是符合的，目前在天体中进行的核聚变及裂变过程，正把能量从物质状态变到辐射状态。由于 $h \leqslant 1$，所以上式还给出了 $(E_r)_0$ 的上限：$(E_r)_0 \leqslant 10^{-36}$ 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-3}$。

其他有物理意义的量是达到转变半径 a_1 的时间 t_1，及其相应的温度 T_1：

$$t_1 \simeq t_0 \frac{a_1}{a_0} \simeq 10^5 \text{ 年},$$

$$T_1 = T_0 \frac{a_0}{a_1}\left(1 - \frac{1}{2}h\right)^{1/4} \simeq 10^{5}\,{}^\circ\text{K}.$$

有趣地注意到，这个转变时间及转变温度与文[9]中从光子时代到凝聚时代的转变值，是相近的。

在工作过程中，承邹振隆同志提出有益的意见，并与陆启铿、刘煜奋及郭汉英等同志进行过讨论，谨致谢忱。

参 考 资 料

[1] A. A. Penzias, R. W. Wilson, *Astrophys. J.*, **142** (1965) 419.
[2] T. L. May, G. C. McVittie, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **148** (1970), 407; **153** (1971), 491.
[3] C. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **124** (1961), 925.
[4] R. H. Dicke, H. M. Goldenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **18** (1967), 313.
[5] I. I. Shapiro et al., *Phys. Rev. Lett.*, **26** (1971), 1132.
[6] R. E. Morganstern, *Phys. Rev.*, **4D** (1971), 278; **4D** (1971), 946.
[7] H. Dehnen, O. Obregón, *Astrophys. and Space. Sci.*, **15** (1972), 326.
[8] A. R. Sandage, *Physics today*, **23** (1970), No. 2, 34.
[9] W. Kundt, *Springer tracts in modern physics*, **58** (1971), 1.