N体散射的非耦合积分方程组*

鲍 诚 光
(中国科学院 高能物理研究所)

以下提出一组关于跃迁振幅的积分方程,用以求多体薛定锷方程的散射解.

令 $K^{(n)}$ 代表 n 粒子系的内部动能算符, $V=\sum_{i<j}^{n} V_{ij}=V_a+V_{\bar{a}}$, 其中 V_a 是(根据需要)从 V 中选择出来的一部分. 定义

$$G_0^{(n)}=(E^+-K^{(n)})^-,\qquad G^{(n)}=(E^+-K^{(n)}-V)^-,$$

$$G_{ij}^{(n)}=(E^+-K^{(n)}-V_{ij})^-,\qquad G_a^{(n)}=(E^+-K^{(n)}-V_a)^{-\,1)},$$

$$T^{(n)}=(1+VG^{(n)})V,\qquad T^{ij}=(1+V_{ij}G_{ij}^{(n)})V_{ij},$$

$$T^{ij+ik}=[1+(V_{ij}+V_{ik})G_{ij+ik}^{(n)}](V_{ij}+V_{ik})^{1)},$$

$$T^a=(1+V_aG_a^{(n)})V_a.$$

若把 V_a 再分为两部, $V_a=V_{a_1}+V_{a_2}$, 则定义

$$T_{a_1}^a=(1+V_aG_a^{(n)})V_{a_1},\qquad T_{a_2}^a=(1+V_aG_a^{(n)})V_{a_2}.$$

显然, $T^a=T_{a_1}^a+T_{a_2}^a$. 特别有 $T^{(n)}=T_a^{(n)}+T_{\bar{a}}^{(n)}$, 其中

$$T_{\bar{a}}^{(n)}=(1+VG^{(n)})V_{\bar{a}}.$$

若假定在初态 φ 中 $V_{\bar{a}}$ 不起作用, 则可证相应的散射解 $\psi=\varphi+G_0^{(n)}T_{\bar{a}}^{(n)}\varphi$. 因此求散射解的问题还原为求 $T_{\bar{a}}^{(n)}$ 的问题.

在三体的情况下, 设初态是 i 粒子撞向 j、k 粒子的束缚态. 令 $V_a=V_{jk}$, $V_{\bar{a}}=V_{ij}+V_{ik}$. 通过按顺序逐一独立求解以下三个积分方程[3]

$$T_{ij}^{\bar{a}}=T^{ij}+T^{ik}G_0^{(3)}T^{ij}+T_{ij}^{\bar{a}}G_0^{(3)}T^{ik}G_0^{(3)}T^{ij},\tag{1.1}$$

$$T_{ik}^{\bar{a}}=T^{ik}+T^{ij}G_0^{(3)}T^{ik}+T_{ik}^{\bar{a}}G_0^{(3)}T^{ij}G_0^{(3)}T^{ik},\tag{1.2}$$

$$T_{\bar{a}}^{(3)}=T^{\bar{a}}+T^aG_0^{(3)}T^{\bar{a}}+T_{\bar{a}}^{(3)}G_0^{(3)}T^aG_0^{(3)}T^{\bar{a}},\tag{1.3}$$

便可求得散射解. 若再解

$$T_a^{(3)}=T^a+T^{\bar{a}}G_0^{(3)}T^a+T_a^{(3)}G_0^{(3)}T^{\bar{a}}G_0^{(3)}T^a,\tag{2}$$

便可求到 $T^{(3)}$.

在(1.1)和(1.2)中 T^{ij} 是 V_{ij} 在不受干予下(此时还原为两体散射的情况)单独引起的跃迁算符, $T_{ij}^{\bar{a}}$ 是在 V_{ik} 干予下, 由 V_{ij} 引起的跃迁算符, $T^{\bar{a}}$ 是在 V_{ij} 和 V_{ik} 相互干予的情况下, 由它们共同引起的跃迁算符. 这样, 积分方程式(1.1)和(1.2)实际上回答了两对相互作用在跃迁过程中互相干予的问题. 因此, 作为一组基本类型的积分方程, 它可以逐步推广到多对相互作用在跃迁过程中互相干予的情况.

在四体的情况下, 设初态是 l 粒子撞向 i、j、k 的束缚态. 令 $V_a=V_{ij}+V_{ik}+V_{jk}$,

---

* 1972年12月18日收到.

1) 参考文献[3]的附录三, 其中 $G_{ij+ik}^{(n)}$ 由积分方程 $G_{ij+ik}^{(n)}=G_{ij}^{(n)}+G_{ij}^{(n)}V_{ik}G_{ij+ik}^{(n)}$ 来定义.

$V_{\tilde{a}} = V_{li} + V_{lj} + V_{lk}$. 首先从二体、三体的结果求出 T^{lk}、T^{li+lj}、T^{a}. 再逐一求解以下三个方程

$$T^{\tilde{a}}_{li+lj} = T^{li+lj} + T^{lk}G_0^{(4)}T^{li+lj} + T^{\tilde{a}}_{li+lj}G_0^{(4)}T^{lk}G_0^{(4)}T^{li+lj}, \tag{3.1}$$

$$T^{\tilde{a}}_{lk} = T^{lk} + T^{li+lj}G_0^{(4)}T^{lk} + T^{\tilde{a}}_{lk}G_0^{(4)}T^{li+lj}G_0^{(4)}T^{lk}, \tag{3.2}$$

$$T^{(4)}_{\tilde{a}} = T^{\tilde{a}} + T^{a}G_0^{(4)}T^{\tilde{a}} + T^{(4)}_{\tilde{a}}G_0^{(4)}T^{a}G_0^{(4)}T^{\tilde{a}}, \tag{3.3}$$

便可求到散射解. 同上亦可求出 $T^{(4)}$. 以上三个方程的核中残存有不连接图形[1],其求解可用文献[3]的方法,可得精确的近似介,下同.

若初态是以 l、i 为一方,j、k 为另一方的互撞,则令 $V_a = V_{li} + V_{jk}$, $V_{\tilde{a}} = V_{lj} + V_{lk} + V_{ij} + V_{ik}$. 首先从二体、三体的结果求出 T^{lj+lk}、T^{ij+ik}. 解方程

$$T^{\tilde{a}}_{lj+lk} = T^{lj+lk} + T^{ij+ik}G_0^{(4)}T^{lj+lk} + T^{\tilde{a}}_{lj+lk}G_0^{(4)}T^{ij+ik}G_0^{(4)}T^{lj+lk}, \tag{4.1}$$

$$T^{\tilde{a}}_{ij+ik} = T^{ij+ik} + T^{lj+lk}G_0^{(4)}T^{ij+ik} + T^{\tilde{a}}_{ij+ik}G_0^{(4)}T^{lj+lk}G_0^{(4)}T^{ij+ik}, \tag{4.2}$$

求出 $T^{\tilde{a}}$. 再解方程

$$T^{a}_{li} = T^{li} + T^{jk}G_0^{(4)}T^{li} + T^{a}_{li}G_0^{(4)}T^{jk}G_0^{(4)}T^{li}, \tag{4.3}$$

$$T^{a}_{jk} = T^{jk} + T^{li}G_0^{(4)}T^{jk} + T^{a}_{jk}G_0^{(4)}T^{li}G_0^{(4)}T^{jk}, \tag{4.4}$$

求出 T^{a}. 代回(3.3),便可求得 $T^{(4)}_{\tilde{a}}$. 式(4.3)(或(4.4))所包括的图形的不连接部分是共同的[1],不影响方程的求解.

在 n 体的情况下,设初态是 A、B 两集团的互撞. 令 $V_a = V_A + V_B$, $V_{\tilde{a}} = V_{AB}$. 先从 n_A 体和 n_B 体的结果求出 T^A 和 T^B. 解下列方程求出 T^a:

$$T^{a}_{A} = T^{A} + T^{B}G_0^{(n)}T^{A} + T^{a}_{A}G_0^{(n)}T^{B}G_0^{(n)}T^{A}, \tag{5.1}$$

$$T^{a}_{B} = T^{B} + T^{A}G_0^{(n)}T^{B} + T^{a}_{B}G_0^{(n)}T^{A}G_0^{(n)}T^{B}, \tag{5.2}$$

为了求 $T^{\tilde{a}}$, 我们设想把 A(或 B)分成 A_1、A_2 两部分. 此时 $V_{\tilde{a}} = V_{\tilde{a}_1} + V_{\tilde{a}_2}$. 利用方程组

$$T^{\tilde{a}}_{\tilde{a}_1} = T^{\tilde{a}_1} + T^{\tilde{a}_2}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}_1} + T^{\tilde{a}}_{\tilde{a}_1}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}_2}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}_1}, \tag{5.3}$$

$$T^{\tilde{a}}_{\tilde{a}_2} = T^{\tilde{a}_2} + T^{\tilde{a}_1}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}_2} + T^{\tilde{a}}_{\tilde{a}_2}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}_1}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}_2}, \tag{5.4}$$

可从 $T^{\tilde{a}_1}$、$T^{\tilde{a}_2}$ 求到 $T^{\tilde{a}}$. 如果我们把这种分割继续下去,通过一系列与式(5.3)、(5.4)相似的方程,便可从二体、三体的结果最终求出 $T^{\tilde{a}}$. 最后解

$$T^{(n)}_{\tilde{a}} = T^{\tilde{a}} + T^{a}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}} + T^{(n)}_{\tilde{a}}G_0^{(n)}T^{a}G_0^{(n)}T^{\tilde{a}}, \tag{5.5}$$

便可求到 n 体散射解.

以上积分方程组均可按顺序逐一独立求解. 从二体、三体……得到 n 体的结果,避开了 Фаддеев[2] 型方程耦合在一起的困难,便于推广到粒子数较多的情况[3].

吴式枢同志对本文提出了宝贵意见,作者表示衷心感谢.

参　考　文　献

[1] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **133B** (1964), 232.

[2] Л. Д. Фаддеев, *ЖЕТФ*, **39** (1960), 1459.
V. F. Kharchenko, V. E. Kuzmichev., *Nucl. Phys.*, **183A** (1972), 606.
I. H. Sloan, *Phys. Rev.*, **6C**, (1972), 1945.

[3] "N 体散射——(I)可逐一独立求解的积分方程组"(待发表).